

УДК 531.36:531.38

© *Е. А. Вишенкова, О. В. Холостова*

## К ДИНАМИКЕ ДВОЙНОГО МАЯТНИКА С ГОРИЗОНТАЛЬНО ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА <sup>1</sup>

В работе исследуются движения системы, состоящей из двух шарнирно соединенных тонких однородных стержней, вращающихся вокруг горизонтальных осей. Предполагается, что точка подвеса системы, совпадающая с концом одного из стержней, совершает горизонтальные высокочастотные гармонические колебания малой амплитуды.

Проведено исследование устойчивости четырех положений относительного равновесия на вертикали. Показано, что устойчивым может быть только нижнее («висящее») положение относительного равновесия. Для системы, состоящей из двух одинаковых стержней, вопрос об устойчивости этого равновесия решен в нелинейной постановке. Также для этой же системы изучен вопрос о существовании, бифуркациях и устойчивости высокочастотных периодических движений малой амплитуды, отличных от положений относительного равновесия на вертикали.

*Ключевые слова:* двойной маятник, высокочастотные вибрации, устойчивость, КАМ–теория.

### Введение

Первые результаты в изучении динамики маятника при вертикальных высокочастотных вибрациях точки подвеса получены в работе [1], где показано, что при достаточно больших значениях частоты вибраций перевернутое положение относительного равновесия становится устойчивым.

За более чем сто лет после этой публикации появилось значительное число работ, посвященных исследованию проблемы повышения динамической устойчивости механической системы за счет воздействия высокочастотных возмущений. Выделим среди них работы по исследованию математического [2–5], физического [6], сферического [7] маятников, а также системы маятников [8] при высокочастотных вибрациях точки подвеса. Достаточно полная библиография по данной тематике содержится в работах [8, 9].

В последнее время изучается также динамика твердого тела с произвольной геометрией масс при наличии быстрых вибраций одной из его точек [10–12].

Ряд работ связан с исследованием динамики двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса. Приближенный анализ устойчивости четырех положений относительных равновесий на вертикали маятника, состоящего из двух тонких стержней, при вертикальных высокочастотных вибрациях точки подвеса проведен в работах [8, 13]. Полный нелинейный анализ этой задачи содержится в статье [14]; здесь же рассмотрены высокочастотные периодические движения двойного маятника, отличные от указанных равновесий.

Случай произвольных значений частоты и амплитуды вертикальных гармонических колебаний точки подвеса маятника, состоящего из двух одинаковых стержней, рассмотрен в статье [15]. Проведен полный нелинейный анализ устойчивости четырех положений относительного равновесия на вертикали. Показано, что устойчивость перевернутого положения относительного равновесия возможна только в случае быстрых вибраций, в то время как устойчивость обоих вариантов «сложенных» маятников может быть реализована также в диапазоне умеренных значений частоты колебаний.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11–01–00322 и 10–01–0381) и программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (НШ–3797.2010.1).

В данной работе предполагается, что быстрые вибрации двойного маятника — системы из двух тонких однородных стержней — происходят вдоль горизонтали. Проведен полный линейный и нелинейный анализ устойчивости четырех положений относительного равновесия маятника на вертикали; изучен вопрос о существовании, бифуркациях и устойчивости высокочастотных периодических движений системы.

### § 1. Постановка задачи

Рассмотрим систему, состоящую из двух шарнирно соединенных тонких однородных стержней 1 и 2 (рис. 1), вращающихся вокруг горизонтальных осей в поле тяжести. Конец  $O_1$  стержня 1 является точкой подвеса системы. Предполагаем, что точка  $O_1$  совершает гармонические колебания вдоль горизонтали по закону  $OO_1 = a \cos(\Omega t)$  относительно некоторой фиксированной точки  $O$ .

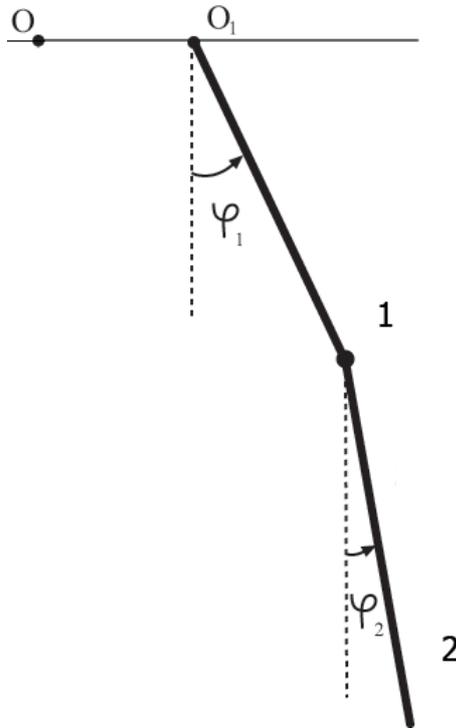


Рис. 1. Двойной маятник

Пусть  $m_1$  и  $m_2$  — массы стержней,  $l_1$  и  $l_2$  — их длины. Углы отклонения стержней от нижних вертикальных положений обозначим через  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Кинетическая и потенциальная энергии системы определяются выражениями

$$T = \frac{1}{6} \left[ l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 (m_1 + 3m_2) + m_2 l_2 \dot{\varphi}_2 (l_2 \dot{\varphi}_2 + 3l_1 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \right] - \frac{1}{2} a \Omega \sin(\Omega t) \left[ l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 (m_1 + 2m_2) + m_2 l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 \right] + \frac{1}{2} a^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t) (m_1 + m_2),$$

$$\Pi = -g \left[ l_1 \cos \varphi_1 \left( \frac{m_1}{2} + m_2 \right) + m_2 \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2 \right]$$

Введем канонически сопряженные с координатами  $\varphi_j$  импульсы  $p_{\varphi_j} = \partial T / \partial \dot{\varphi}_j$  ( $j = 1, 2$ ).

$$p_{\varphi_1} = -\frac{1}{2} a \Omega \sin(\Omega t) l_1 \cos \varphi_1 (m_1 + 2m_2) + \frac{1}{3} l_1^2 \dot{\varphi}_1 (m_1 + 3m_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2 \dot{\varphi}_2 l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$p_{\varphi_2} = -\frac{1}{2} a \Omega \sin(\Omega t) l_2 \cos \varphi_2 m_2 + \frac{1}{3} l_2 \dot{\varphi}_2 m_2 + \frac{1}{2} m_2 l_2 \dot{\varphi}_1 l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Разрешив эти соотношения относительно обобщенных скоростей  $\dot{\varphi}_1$  и  $\dot{\varphi}_2$ , получим:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= \frac{6m_2 \left( 2\widehat{p}_{\varphi_1} l_2 - 3\widehat{p}_{\varphi_2} l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right)}{m_2 l_1^2 l_2 \left( 4(m_1 + 3m_2) - 9m_2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) \right)}, \\ \dot{\varphi}_2 &= \frac{6 \left( 2\widehat{p}_{\varphi_2} l_1 (m_1 + 3m_2) - 3\widehat{p}_{\varphi_1} l_2 m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right)}{m_2 l_2^2 l_1 \left( 4(m_1 + 3m_2) - 9m_2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) \right)}, \\ \widehat{p}_{\varphi_1} &= p_{\varphi_1} + \frac{1}{2} a \Omega \sin(\Omega t) l_1 (m_1 + 2m_2) \cos \varphi_1, \quad \widehat{p}_{\varphi_2} = p_{\varphi_2} + \frac{1}{2} a \Omega \sin(\Omega t) l_2 m_2 \cos \varphi_2.\end{aligned}\quad (1.1)$$

Сделаем далее каноническую замену переменных  $\varphi_j, p_{\varphi_j} \rightarrow \widehat{\varphi}_j, \widehat{p}_{\varphi_j}$ , в которой  $\widehat{\varphi}_j = \varphi_j$  ( $j = 1, 2$ ), а новые импульсы вычисляются по формулам (1.1).

Это преобразование задается производящей функцией

$$S = \varphi_1 \widehat{p}_{\varphi_1} + \varphi_2 \widehat{p}_{\varphi_2} - \frac{1}{2} a \Omega \sin(\Omega t) \left[ (m_1 + 2m_2) l_1 \sin \varphi_1 + m_2 l_2 \sin \varphi_2 \right].$$

Гамильтониан преобразованной системы имеет вид (слагаемое — функция времени — отброшено)

$$\begin{aligned}H &= \frac{6 \left( m_2 l_2^2 \widehat{p}_{\varphi_1}^2 + (m_1 + 3m_2) l_1^2 \widehat{p}_{\varphi_2}^2 - 3m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \widehat{p}_{\varphi_1} \widehat{p}_{\varphi_2} \right)}{m_2 l_1^2 l_2^2 \left( 4(m_1 + 3m_2) - 9m_2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) \right)} \\ &\quad - \frac{1}{2} (m_1 + 2m_2) l_1 (g \cos \varphi_1 + a \Omega^2 \sin \varphi_1 \cos(\Omega t)) - \frac{1}{2} m_2 l_2 (g \cos \varphi_2 + a \Omega^2 \sin \varphi_2 \cos(\Omega t)).\end{aligned}$$

При  $l_1 = 0$  имеем случай одного стержня. Результаты исследования этого случая аналогичны результатам, полученным ранее при исследовании математического маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса [5].

Далее считаем, что  $l_1 \neq 0$ . Будем предполагать, что амплитуда  $a$  колебаний точки подвеса мала по сравнению с длиной  $l_1$ , а частота  $\Omega$  велика по сравнению с характерной частотой  $\sqrt{g/l_1}$ . Введем малый параметр  $\varepsilon = a/l_1$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ) и безразмерную частоту  $\omega$ , определяемую формулой  $\varepsilon^2 \omega^2 = g/(l_1 \Omega^2)$ . Полагаем  $\omega \sim 1$ , тогда  $a \Omega \sim 1$ .

Обезразмерим импульсы  $\widehat{p}_{\varphi_1}$  и  $\widehat{p}_{\varphi_2}$  при помощи множителя  $m_1 l_1^2 \Omega$ . Введем безразмерное время  $\tau$  и безразмерные параметры по формулам:

$$\tau = \Omega t, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1}, \quad \lambda = \frac{l_2}{l_1}.$$

В безразмерных переменных гамильтониан системы запишется в виде:

$$\begin{aligned}\widetilde{H} &= \frac{6 \left( \mu \lambda^2 p_1^2 + (1 + 3\mu) p_2^2 - 3\mu \lambda p_1 p_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right)}{\mu \lambda^2 \left( 4(1 + 3\mu) - 9\mu \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) \right)} \\ &\quad - \frac{1}{2} (1 + 2\mu) (\varepsilon^2 \omega^2 \cos \varphi_1 + \varepsilon \sin \varphi_1 \cos \tau) - \frac{1}{2} \mu \lambda (\varepsilon^2 \omega^2 \cos \varphi_2 + \varepsilon \sin \varphi_2 \cos \tau).\end{aligned}\quad (1.2)$$

Система с гамильтонианом (1.2) имеет четыре частных решения, отвечающих положениям относительного равновесия двойного маятника, для которых два стержня маятника расположены на одной вертикали. При этом  $p_1 = p_2 = 0$  и выполняется одно из соотношений:

$$1) \varphi_1 = \varphi_2 = 0; \quad 2) \varphi_1 = \varphi_2 = \pi; \quad 3) \varphi_1 = \pi, \varphi_2 = 0; \quad 4) \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi.\quad (1.3)$$

Решения 1) и 2) соответствуют «висящему» и «перевернутому» положениям относительного равновесия стержней. Решения 3) и 4) отвечают «сложенному» состоянию системы, для которого точка подвеса второго стержня расположена соответственно выше и ниже точки подвеса маятника.

Цель работы — исследование устойчивости названных положений относительного равновесия системы в рассматриваемом случае высокочастотных колебаний точки подвеса малой амплитуды. Для случая маятника, состоящего из двух одинаковых стержней, будет изучен также вопрос о существовании, бифуркациях и устойчивости высокочастотных периодических движений малой амплитуды, отличных от положений относительного равновесия на вертикали.

## § 2. Преобразование гамильтониана

Введем новый малый параметр  $e = \sqrt{\varepsilon}$  и сделаем в гамильтониане (1.2) каноническое преобразование вида

$$\varphi_j = \varphi'_j, \quad p_j = ep'_j \quad (j = 1, 2). \quad (2.1)$$

Функция Гамильтона системы примет вид

$$H' = eH'_1 + \frac{e^3}{6}H'_3,$$

$$H'_1 = \frac{6\left(\mu\lambda^2 p_1'^2 + (1 + 3\mu)p_2'^2 - 3\mu\lambda p_1' p_2' \cos(\varphi'_1 - \varphi'_2)\right)}{\mu\lambda^2\left(4(1 + 3\mu) - 9\mu \cos^2(\varphi'_1 - \varphi'_2)\right)} - \frac{1}{2}\left\{(1 + 2\mu) \sin \varphi'_1 \cos \tau + \mu\lambda \sin \varphi'_2 \cos \tau\right\},$$

$$H'_3 = -3\left(\mu\lambda\omega^2 \cos \varphi'_2 + (1 + 2\mu)\omega^2 \cos \varphi'_1\right).$$

Затем осуществим каноническую замену переменных  $\varphi'_j, p'_j \rightarrow \theta_j, p_{\theta_j}$ , исключаящую в полученном гамильтониане время  $\tau$  из слагаемых до порядка  $e^3$  включительно. Это преобразование может быть получено при помощи метода Депри–Хори [16] и имеет вид

$$\varphi'_j = \theta_j + e\theta_j^{(1)} + \frac{e^2}{2!}\theta_j^{(2)} + O(\varepsilon^3), \quad (2.2)$$

$$p'_j = p_{\theta_j} + ep_{\theta_j}^{(1)} + \frac{e^2}{2!}p_{\theta_j}^{(2)} + O(\varepsilon^3), \quad (2.3)$$

$$\theta_1^{(1)} = 0, \quad \theta_2^{(1)} = 0, \quad p_{\theta_1}^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + 2\mu) \cos \theta_1 \sin \tau, \quad p_{\theta_2}^{(1)} = \frac{1}{2}\mu\lambda \cos \theta_2 \sin \tau,$$

$$\theta_1^{(2)} = \frac{\partial W_2}{\partial p_{\theta_1}} + L_1\theta_1^{(1)}, \quad \theta_2^{(2)} = \frac{\partial W_2}{\partial p_{\theta_2}} + L_1\theta_2^{(1)}, \quad p_{\theta_1}^{(2)} = -\frac{\partial W_2}{\partial \theta_1} + L_1p_{\theta_1}^{(1)}, \quad p_{\theta_2}^{(2)} = -\frac{\partial W_2}{\partial \theta_2} + L_1p_{\theta_2}^{(1)},$$

$$L_1 f = \sum_{j=1}^2 \left( \frac{\partial f}{\partial \theta_j} \frac{\partial W_1}{\partial p_{\theta_j}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\theta_j}} \frac{\partial W_1}{\partial \theta_j} \right),$$

$$W_1 = -\left(\frac{1}{2} + \mu\right) \sin \theta_1 \sin \tau - \frac{1}{2}\mu\lambda \sin \theta_2 \sin \tau,$$

$$W_2 = -\frac{12\left(2\mu\lambda^2 p_{\theta_1} - 3\mu\lambda p_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)\right) \left(\frac{1}{2} + \mu\right) \cos \theta_1 \cos \tau}{\mu\lambda^2\left(4 + 12\mu - 9\mu \cos^2(\theta_1 - \theta_2)\right)} -$$

$$-\frac{6\left(2(1 + 3\mu)p_{\theta_2} - 3\mu\lambda p_{\theta_1} \cos(\theta_1 - \theta_2)\right) \cos \theta_2 \cos \tau}{\lambda\left(4 + 12\mu - 9\mu \cos^2(\theta_1 - \theta_2)\right)}.$$

При помощи указанного преобразования, получим гамильтониан требуемого вида

$$K = eK_1 + \frac{e^3}{6}K_3 + O(e^4),$$

$$K_1 = \frac{6\left(\mu\lambda^2 p_{\theta_1}^2 + (1 + 3\mu)p_{\theta_2}^2 - 3\mu\lambda p_{\theta_1} p_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)\right)}{\mu\lambda^2\left(4(1 + 3\mu) - 9\mu \cos^2(\theta_1 - \theta_2)\right)},$$

$$K_3 = -3\left(\mu\lambda\omega^2 \cos \theta_2 + (1 + 2\mu)\omega^2 \cos \theta_1\right) + \\ + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2} + \mu\right) \cos \theta_1 \left[36 \left(\frac{1}{2} + \mu\right) \cos \theta_1 - 27\mu \cos(\theta_1 - \theta_2) \cos \theta_2\right]}{4(1 + 3\mu) - 9\mu \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} + \\ + \frac{1}{4} \frac{\mu \cos \theta_2 \left[-54 \cos(\theta_1 - \theta_2) \left(\frac{1}{2} + \mu\right) \cos \theta_1 + 9(2 + 6\mu) \cos \theta_2\right]}{4(1 + 3\mu) - 9\mu \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Делая еще одну замену  $\theta_j, p_{\theta_j} \rightarrow \theta_j, p_j$  по формулам

$$\theta_j = \theta_j, \quad p_{\theta_j} = p_j/e \quad (2.4)$$

и возвращаясь к параметру  $\varepsilon$ , получим функцию Гамильтона

$$H = \frac{6\left(\mu\lambda^2 p_1^2 + (1 + 3\mu)p_2^2 - 3\mu\lambda p_1 p_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\right)}{\mu\lambda^2\left(4(1 + 3\mu) - 9\mu \cos^2(\theta_1 - \theta_2)\right)} + \frac{1}{4}\varepsilon^2\Pi + O(\varepsilon^3), \quad (2.5)$$

$$\Pi = -2\left(\mu\lambda\omega^2 \cos \theta_2 + (1 + 2\mu)\omega^2 \cos \theta_1\right) + \\ + 3 \frac{(1 + 2\mu)^2 \cos^2 \theta_1 - 3\mu(1 + 2\mu) \cos(\theta_1 - \theta_2) \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \mu(1 + 3\mu) \cos^2 \theta_2}{4(1 + 3\mu) - 9\mu \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (2.6)$$

Слагаемое  $O(\varepsilon^3)$  в соотношении (2.5) является  $2\pi$ -периодической функцией  $\tau$ .

### § 3. Условия устойчивости в линейном приближении

Если в гамильтониане (2.5), (2.6) отбросить слагаемое  $O(\varepsilon^3)$ , получим приближенный (укороченный) гамильтониан, отвечающий консервативной системе с двумя степенями свободы с потенциальной энергией  $\varepsilon^2\Pi/4$ . Положения относительного равновесия (1.3) исходной задачи с гамильтонианом (1.2) являются положениями равновесия приближенной системы.

Поочередно полагая

$$1) \theta_1 = q_1, \theta_2 = q_2; \quad 2) \theta_1 = \pi + q_1, \theta_2 = \pi + q_2; \quad 3) \theta_1 = \pi + q_1, \theta_2 = q_2; \quad 4) \theta_1 = q_1, \theta_2 = \pi + q_2,$$

получим потенциальную энергию в окрестности каждого положения равновесия.

Условия устойчивости и неустойчивости положений равновесия  $q_j = 0, p_j = 0$  ( $j = 1, 2$ ) приближенных систем найдем, исследуя квадратичную относительно величин  $q_j, p_j$  часть потенциальной энергии.

Эта квадратичная часть может быть представлена в виде (множитель  $\varepsilon^2/4$  отброшен):

$$\Pi_2(q_1, q_2) = u_{20}q_1^2 + 2u_{11}q_1q_2 + u_{02}q_2^2, \quad (3.1)$$

где  $u_{ij}$  — постоянные коэффициенты.

Достаточные условия устойчивости рассматриваемого положения равновесия (условия минимума функции потенциальной энергии) задаются неравенствами:

$$u_{20} > 0, \quad d = u_{20}u_{02} - u_{11}^2 > 0 \quad (3.2)$$

1) *Случай*  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ .

Для коэффициентов  $u_{ij}$  имеем выражения:

$$u_{20} = (1 + 2\mu)\omega^2 - 3 \frac{(1 + 3\mu)(2 + \mu)^2}{(4 + 3\mu)^2}, \quad u_{11} = \frac{9\mu(2 + \mu)}{2(4 + 3\mu)^2}, \quad u_{02} = \mu\lambda\omega^2 - \frac{3\mu}{(4 + 3\mu)^2}. \quad (3.3)$$

Первое неравенство из (3.2) выполняется при

$$\omega^2 > \omega_0^2 = \frac{3(1+3\mu)(\mu+2)^2}{(4+3\mu)^2(1+2\mu)} > 0. \quad (3.4)$$

Рассмотрим второе неравенство из (3.2), сводящееся к виду

$$d = \frac{\mu}{4(4+3\mu)^3} F > 0, \quad (3.5)$$

$$F = 4\lambda(1+2\mu)(4+3\mu)^3\omega^4 - 12(4+3\mu)(3\mu^3\lambda + 13\mu^2\lambda + 2\mu + 16\mu\lambda + 1 + 4\lambda)\omega^2 + 9(\mu+2)^2.$$

Рассмотрим дискриминант квадратного относительно  $\omega^2$  трехчлена  $F$ :

$$D = 144(4+3\mu)^2 F_1, \\ F_1 = (1+3\mu)^2(\mu+2)^4\lambda^2 + (1+2\mu)(3\mu-2)(\mu+2)^2\lambda + (1+2\mu)^2.$$

В свою очередь, дискриминант квадратного относительно  $\lambda$  трехчлена  $F_1$  равен

$$D_1 = -\mu(108\mu^7 + 1116\mu^6 + 4779\mu^5 + 10908\mu^4 + 14184\mu^3 + 10368\mu^2 + 3888\mu + 576).$$

Так как при всех  $\mu > 0$  величина  $D_1$  отрицательная, функция  $F_1$  сохраняет постоянный знак (положительный). Следовательно, квадратичный относительно  $\omega^2$  трехчлен  $F$  имеет два корня. Эти корни вычисляются по формулам:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{3}{2\lambda(4+3\mu)^2(1+2\mu)} (3\mu^3\lambda + 13\lambda\mu^2 + 16\lambda\mu + 4\lambda + 2\mu + 1 \pm \\ \pm \sqrt{(\mu+2)^4(3\mu+1)^2\lambda^2 + (6\mu^4 + 23\mu^3 + 18\mu^2 - 12\mu - 8)\lambda + (2\mu+1)^2}),$$

причем  $0 < \omega_2^2 < \omega_1^2$ .

Поэтому решение неравенства (3.5) составляют два интервала  $0 < \omega^2 < \omega_2^2$  и  $\omega^2 > \omega_1^2$ .

Определим положение величины  $\omega_0^2$  относительно корней  $\omega_{1,2}^2$ . Так как

$$F(\omega_0^2) = -\frac{81\mu^2(\mu+2)^2}{64(4+3\mu)^4} < 0,$$

то  $\omega_2^2 < \omega_0^2 < \omega_1^2$ .

Таким образом, неравенства (3.4) и (3.5) одновременно выполняются при

$$\omega^2 > \omega_1^2. \quad (3.6)$$

Соотношение (3.6) определяет условие устойчивости «висящего» положения равновесия приближенной системы. В исходных размерных переменных данное условие имеет вид:

$$\Omega < \Omega_*, \quad \Omega_* = \frac{\Upsilon\sqrt{gl_1}}{a} \quad (3.7)$$

$$\Upsilon^2 = \frac{3\left((4l_2 + l_1)m_1^3 + (16l_2 + 2l_1)m_2m_1^2 + 13l_2m_2^2m_1 + 3l_2m_2^3 + \sqrt{\varkappa}\right)}{2l_2(4m_1 + 3m_2)^2(2m_2 + m_1)} \quad (3.8)$$

$$\varkappa = (m_1 + 3m_2)^2(2m_1 + m_2)^4l_2^2 - (2m_1 + m_2)^2m_1^2(2m_2 + m_1)(2m_1 - 3m_2)l_1l_2 + m_1^4l_1^2(2m_2 + m_1)^2.$$

Величина  $\varkappa$  получена из положительной функции  $F_1$ , поэтому  $\varkappa > 0$ .

Таким образом, нижнее положение равновесия приближенной системы устойчиво, если частота  $\Omega$  колебаний точки подвеса не превышает предельного значения, определяемого правой частью неравенства (3.7).

2) Случай  $\theta_1 = \theta_2 = \pi$ .

Коэффициенты  $u_{ij}$  функции (3.1) имеют вид (3.3), где  $\omega^2$  заменяются на  $-\omega^2$ .

При любом значении параметра  $\mu$  ( $\mu > 0$ ) имеем  $u_{20} < 0$ , поэтому условия (3.2) не выполняются. Значит для любых значений  $\omega$  «перевернутое» положение равновесия неустойчиво.

3) *Случай*  $\theta_1 = \pi$ ,  $\theta_2 = 0$ .

Коэффициенты функции (3.1) имеют вид:

$$u_{20} = -(1 + 2\mu)\omega^2 - 3\frac{(1 + 3\mu)(2 + \mu)^2}{(4 + 3\mu)^2}, \quad u_{11} = \frac{9\mu(2 + \mu)}{2(4 + 3\mu)^2}, \quad u_{02} = \mu\lambda\omega^2 - \frac{3\mu}{(4 + 3\mu)^2} \quad (3.9)$$

Как и для случая 2), имеем  $u_{20} < 0$ , поэтому рассматриваемое положение равновесия неустойчиво при любых значениях частоты  $\omega$ .

4) *Случай*  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \pi$ .

Коэффициенты  $u_{ij}$  функции (3.1) имеют вид (3.9), где  $\omega^2$  заменяются на  $-\omega^2$ .

Как и для случая 1), первое неравенство из (3.2) выполняется при условии (3.4). Проведем проверку второго условия (3.2), сводящегося к неравенству

$$F' = -(4\lambda(1 + 2\mu)(4 + 3\mu)^3\omega^4 - 12(4 + 3\mu)(3\mu^3\lambda + 13\mu^2\lambda - 2\mu + 16\mu\lambda - 1 + 4\lambda)\omega^2 - 9(\mu + 2)^2) > 0.$$

Рассмотрим дискриминант квадратного относительно  $\omega^2$  трехчлена  $F'$ :

$$D = 144(4 + 3\mu)^2 F_1', \\ F_1' = (1 + 3\mu)^2(\mu + 2)^4\lambda^2 - (1 + 2\mu)(3\mu - 2)(\mu + 2)^2\lambda + (1 + 2\mu)^2.$$

Дискриминант квадратного относительно  $\lambda$  трехчлена  $F_1'$  имеет вид

$$D_1 = -9(1 + 2\mu)^2(\mu + 2)^4\mu(4 + 3\mu) < 0.$$

Значит функция  $F_1'$  сохраняет постоянный знак (положительный). Следовательно, квадратный относительно  $\omega^2$  трехчлен  $F'$  будет иметь два корня:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{3}{2\lambda(4 + 3\mu)^2(1 + 2\mu)}(3\mu^3\lambda + 13\lambda\mu^2 - 2\mu + 16\lambda\mu - 1 + 4\lambda \pm \sqrt{(\mu + 2)^4(3\mu + 1)^2\lambda^2 + (-6\mu^4 - 23\mu^3 - 18\mu^2 + 12\mu + 8)\lambda + (2\mu + 1)^2})$$

причем  $\omega_2^2 < 0 < \omega_1^2$ .

Следовательно, решение второго неравенства из (3.2) имеет вид

$$0 \leq \omega^2 < \omega_1^2. \quad (3.10)$$

Сравним величины  $\omega_0^2$  и  $\omega_1^2$ . Вычислим

$$F'(\omega_0^2) = -\frac{81\mu^2(\mu + 2)^2}{64(4 + 3\mu)^4} < 0.$$

Таким образом,  $\omega_0^2$  лежит вне интервала  $(\omega_2^2, \omega_1^2)$ . А так как  $\omega_0^2 > 0$ , то справедливо соотношение

$$0 < \omega_1^2 < \omega_0^2.$$

Следовательно, неравенства (3.4) и (3.10) несовместны, а рассматриваемое решение неустойчиво при любых значениях частоты  $\omega$ .

Таким образом, из четырех рассмотренных положений равновесия приближенной системы устойчивым может быть только нижнее положение, и условие его устойчивости задается неравенством (3.6).

Условия устойчивости и неустойчивости положений равновесия приближенной системы совпадают при достаточно малых значениях  $\varepsilon$  с условиями устойчивости в линейном приближении и условиями неустойчивости соответствующих положений относительного равновесия полной системы с гамильтонианом (2.5), (2.6).

Отметим, что в случае математического маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса [5], аналогично, верхнее положение относительного равновесия неустойчиво, нижнее устойчиво при не слишком больших значениях частоты колебаний точки подвеса. В случае двойного маятника, состоящего из двух одинаковых стержней, при вертикальных вибрациях точки подвеса все четыре положения относительного равновесия на вертикали могут быть устойчивы при достаточно большом значении частоты вибраций [14].

#### § 4. Нелинейный анализ устойчивости нижнего положения относительного равновесия в случае двух одинаковых стержней

Рассмотрим случай двух одинаковых стержней ( $l_1 = l_2$ ,  $m_1 = m_2$ , то есть  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ ) и проведем нелинейный анализ устойчивости нижнего положения относительного равновесия в предположении, что выполнено условие (3.6) устойчивости в линейном приближении. В исследуемом случае это условие принимает вид

$$\omega > \omega_1 = \frac{1}{14} \sqrt{78 + 12\sqrt{37}} \approx 0.87772 \quad (4.1)$$

или, в исходных переменных,

$$\Omega < \frac{\sqrt{gl_1}}{14a} \sqrt{78 + 12\sqrt{37}}.$$

Положим в гамильтониане (2.5)  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\theta_i = q_i$  ( $i = 1, 2$ ) и разложим его в ряд по  $q_i$ ,  $p_i$ . Гамильтониан возмущенного движения имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \tilde{K}_2 + \tilde{K}_4 + O_5 + O(\varepsilon^3), \\ \tilde{K}_2 &= \left[ \left( -\frac{27}{49} + \frac{3}{4}\omega^2 \right) q_1^2 + \frac{27}{196} q_1 q_2 + \left( -\frac{3}{196} + \frac{1}{4}\omega^2 \right) q_2^2 \right] \varepsilon^2 - \frac{18}{7} p_1 p_2 + \frac{6}{7} p_1^2 + \frac{24}{7} p_2^2, \\ \tilde{K}_4 &= \left[ \left( \frac{306}{343} - \frac{1}{16}\omega^2 \right) q_1^4 - \frac{9}{1372} q_2 q_1 (257q_1^2 - 186q_2 q_1 + 47q_2^2) + \left( \frac{17}{686} - \frac{1}{48}\omega^2 \right) q_2^4 \right] \varepsilon^2 - \\ &\quad - \frac{9}{49} (q_1 - q_2)^2 (8p_2 - 3p_1)(3p_2 - 2p_1). \end{aligned}$$

Слагаемое  $O_5$  означает совокупность членов не менее пятой степени относительно  $q_j$ ,  $p_j$ , ( $j = 1, 2$ ).

Сделаем каноническое преобразование  $q_j = \tilde{q}_j \sqrt{\varepsilon}$ ,  $p_j = \tilde{p}_j \varepsilon \sqrt{\varepsilon}$  ( $j = 1, 2$ ).

Гамильтониан системы примет вид

$$K' = \varepsilon K'_2 + \varepsilon^2 K'_4 + O(\varepsilon^3), \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} K'_2 &= \left( -\frac{27}{49} + \frac{3}{4}\omega^2 \right) \tilde{q}_1^2 + \frac{27}{196} \tilde{q}_2 \tilde{q}_1 + \left( -\frac{3}{196} + \frac{1}{4}\omega^2 \right) \tilde{q}_2^2 + \frac{6}{7} (\tilde{p}_1^2 - 3\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 + 4\tilde{p}_2^2), \\ K'_4 &= \left( \frac{306}{343} - \frac{1}{16}\omega^2 \right) \tilde{q}_1^4 - \frac{9}{1372} \tilde{q}_2 \tilde{q}_1 (257\tilde{q}_1^2 - 186\tilde{q}_2 \tilde{q}_1 + 47\tilde{q}_2^2) + \left( \frac{17}{686} - \frac{1}{48}\omega^2 \right) \tilde{q}_2^4 - \\ &\quad - \frac{9}{49} (\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2)^2 (8\tilde{p}_2 - 3\tilde{p}_1)(3\tilde{p}_2 - 2\tilde{p}_1). \end{aligned}$$

Затем при помощи линейного  $2\pi$ -периодического по  $\tau$  унивалентного канонического преобразования

$$\tilde{q}_1 = n_{13}P_1 + n_{14}P_2, \quad \tilde{q}_2 = n_{23}P_1 + n_{24}P_2, \quad \tilde{p}_1 = n_{31}Q_1 + n_{32}Q_2, \quad \tilde{p}_2 = n_{41}Q_1 + n_{42}Q_2,$$

$$\begin{aligned} n_{13} &= \frac{1}{12} \frac{\sqrt{6}(686\sigma_2^2 - 1764\omega^2 + 1539)}{\sqrt{\sigma_1}\sqrt{ac + 16c^2}} + O(\varepsilon), & n_{14} &= \frac{1}{12} \frac{\sqrt{6}(686\sigma_1^2 - 1764\omega^2 + 1539)}{\sqrt{\sigma_2}\sqrt{-ac + 16c^2}} + O(\varepsilon), \\ n_{23} &= \frac{9}{2} \frac{(49\omega^2 - 48)\sqrt{6}}{\sqrt{\sigma_1}\sqrt{ac + 16c^2}} + O(\varepsilon), & n_{24} &= \frac{9}{2} \frac{(49\omega^2 - 48)\sqrt{6}}{\sqrt{\sigma_2}\sqrt{-ac + 16c^2}} + O(\varepsilon), \\ n_{31} &= -\frac{1}{36} \frac{\sqrt{6}\sqrt{\sigma_1}(2744\sigma_2^2 - 3087\omega^2 + 2268)}{\sqrt{ac + 16c^2}} + O(\varepsilon), \\ n_{32} &= -\frac{1}{36} \frac{\sqrt{6}\sqrt{\sigma_2}(2744\sigma_1^2 - 3087\omega^2 + 2268)}{\sqrt{-ac + 16c^2}} + O(\varepsilon), \\ n_{41} &= -\frac{7}{24} \frac{\sqrt{6}\sqrt{\sigma_1}(98\sigma_2^2 - 27)}{\sqrt{ac + 16c^2}} + O(\varepsilon), & n_{42} &= -\frac{7}{24} \frac{\sqrt{6}\sqrt{\sigma_2}(98\sigma_1^2 - 27)}{\sqrt{-ac + 16c^2}} + O(\varepsilon), \\ \sigma_1 &= \frac{1}{98} \sqrt{28812\omega^2 - 13482 - 168\sqrt{16807\omega^4 - 17493\omega^2 + 6192}}, \\ \sigma_2 &= \frac{1}{98} \sqrt{28812\omega^2 - 13482 + 168\sqrt{16807\omega^4 - 17493\omega^2 + 6192}}, \end{aligned}$$

$$a = 1715\omega^2 - 528, \quad c = \sqrt{16807\omega^4 - 17493\omega^2 + 6192} \quad (4.3)$$

приведем квадратичную часть гамильтониана к нормальной форме

$$K_2^* = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 + O(\varepsilon))(Q_1^2 + P_1^2) + (\sigma_2 + O(\varepsilon))(Q_2^2 + P_2^2) \right]. \quad (4.4)$$

Здесь  $\sigma_j$  ( $j = 1, 2$ ) — частоты малых колебаний приближенной системы в окрестности нижнего положения равновесия, а поправки  $O(\varepsilon)$  не зависят от  $\tau$ .

Выражение под радикалом в (4.3), а также величина  $a$  в области исследования всегда положительны, поэтому при выполнении условия (4.1) имеем  $16c^2 + ac > 0$ . Выражение  $16c^2 - ac$  положительно для всех исследуемых значений частоты, кроме  $\omega = \frac{4}{7}\sqrt{3} \approx 0.98974$ , при котором это выражение обращается в нуль. Этот случай далее будет рассмотрен отдельно.

Для последующего исследования перейдем к «полярным» координатам

$$Q_j = \sqrt{2r_j} \sin \theta_j, \quad P_j = \sqrt{2r_j} \cos \theta_j, \quad (j = 1, 2)$$

и затем при помощи близкого к тождественному  $2\pi$ -периодического по  $\tau$  преобразования типа преобразования Биркгофа нормализуем в гамильтониане члены четвертой степени. Это преобразование может быть получено методом Дебри–Хори. Отметим, что при

$$\omega = \frac{1}{98} \sqrt{294 + 210\sqrt{2149}} \approx 1.0218$$

в системе имеет место резонанс четвертого порядка  $3\sigma_1 = \sigma_2$ . Этот случай далее не исследуется. При отсутствии резонанса четвертого порядка нормализованный гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma &= \varepsilon \left[ (\sigma_1 + O(\varepsilon))r_1 + (\sigma_2 + O(\varepsilon))r_2 \right] + \\ &+ \varepsilon^2 \left[ (c_{20} + O(\varepsilon))r_1^2 + (c_{11} + O(\varepsilon))r_1r_2 + (c_{02} + O(\varepsilon))r_2^2 \right] + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$c_{20} = \frac{1}{784} \frac{a_1 c + a_2}{c^2 a_3}, \quad c_{02} = \frac{1}{784} \frac{-a_1 c + a_2}{c^2 a_3},$$

$$c_{11} = \frac{81}{2744} \frac{117649\omega^6 + 1513728 + 806736\omega^4 + 829962\omega^2}{\sigma_1 \sigma_2 c^2},$$

$$a_1 = 372712032\omega^6 - 1006466958\omega^4 + 617372280\omega^2 - 14874516,$$

$$a_2 = -48735627654\omega^8 + 156828117033\omega^6 - 151648837956\omega^4 + 49864296762\omega^2 - 1196073216,$$

$$a_3 = 1372\omega^4 - 1092\omega^2 + 27,$$

где поправки  $O(\varepsilon)$  к величинам  $c_{ij}$  не зависят от  $\tau$ , а слагаемое  $O(\varepsilon^3)$  означает совокупность членов не менее пятой степени относительно  $r_j^{1/2}$  ( $j = 1, 2$ ) с  $2\pi$ -периодическими по  $\tau$  коэффициентами.

Отметим, что при выполнении условия (4.1) выражение  $a_3$  в знаменателях коэффициентов  $c_{20}$  и  $c_{02}$  всегда положительно.

Если для коэффициентов гамильтониана  $\Gamma$  выполняется неравенство

$$D_2 = c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} \neq 0,$$

то при достаточно малых значениях  $\varepsilon$  положение равновесия  $r_1 = r_2 = 0$  устойчиво для большинства (в смысле Лебега) начальных условий [16, 17].

Если квадратичная форма

$$c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 \quad (4.6)$$

знакоопределена при  $r_1 \geq 0, r_2 \geq 0$ , то положение равновесия  $r_1 = r_2 = 0$  формально устойчиво [18].

Расчеты показывают, что

$$D_2 = -\frac{189}{37632} \frac{16807\omega^8 b_1 - 108\omega^2 b_2 - 140683308703488}{a_3 c^4},$$

$$b_1 = 517134583\omega^4 - 3712669044\omega^2 + 3367743948,$$

$$b_2 = 2206392428884\omega^4 + 1066954222677\omega^2 + 1351117444500.$$

При выполнении условия (4.1) знаменатель функции  $D_2$  положителен, а числитель обращается в нуль при  $\omega = \omega^* = 2.619576184$ , положителен при  $\omega_1 < \omega < \omega^*$  и отрицателен при  $\omega^* < \omega$ .

Коэффициент квадратичной формы  $c_{02}$  обращается в нуль при  $\omega = \omega_2 = 1.339314671$ ; в интервалах  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  и  $\omega_2 < \omega \leq \omega^*$  имеем соответственно  $c_{02} > 0$  и  $c_{02} < 0$ . Коэффициент  $c_{20}$  обращается в нуль при  $\omega = \omega_3 = 1.505177934$ ; при  $\omega_1 < \omega < \omega_3$  и  $\omega_3 < \omega \leq \omega^*$  имеем соответственно  $c_{20} > 0$  и  $c_{20} < 0$ . Коэффициент  $c_{11}$  положителен в области  $\omega_1 < \omega$ .

Совместный анализ знаков функции  $D_2$  и коэффициентов  $c_{ij}$  квадратичной формы приводит к следующим результатам. В области  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  все коэффициенты положительны, поэтому квадратичная форма определена положительно. В области  $\omega \geq \omega^*$  имеем  $D_2 < 0, c_{20} < 0, c_{02} < 0$ , значит квадратичная форма определена отрицательно. При  $\omega_2 \leq \omega < \omega^*$  квадратичная форма знакопеременная.

Таким образом, в области устойчивости в линейном приближении нижнее положение относительного равновесия двойного маятника устойчиво для большинства начальных условий (кроме, может быть, точки  $\omega = \omega^*$ ) и формально устойчиво в интервалах  $\omega_1 \leq \omega < \omega_2$  и  $\omega^* \leq \omega$ .

В случае  $\omega = \frac{4}{7}\sqrt{3} \approx 0.98977$  замена переменных, нормализующая квадратичную часть функции Гамильтона (4.2), имеет вид

$$\tilde{q}_1 = n_{12}Q_2 + n_{13}P_1, \quad \tilde{q}_2 = n_{23}P_1, \quad \tilde{p}_1 = n_{34}P_2, \quad \tilde{p}_2 = n_{41}Q_1 + n_{44}P_2,$$

где

$$\begin{aligned} n_{12} &= -6^{-3/4}\sqrt{21} + O(\varepsilon), & n_{13} &= \frac{1}{1988}2982^{3/4}\sqrt{14} + O(\varepsilon), \\ n_{23} &= -\frac{2}{1491}2982^{3/4}\sqrt{14} + O(\varepsilon), & n_{34} &= -\frac{1}{21}6^{3/4}\sqrt{21} + O(\varepsilon), \\ n_{41} &= \frac{1}{56}2982^{1/4}\sqrt{14} + O(\varepsilon), & n_{44} &= -\frac{1}{56}6^{3/4}\sqrt{21} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Частоты малых колебаний равны  $\sigma_1 = \frac{3}{196}\sqrt{2982}$ ,  $\sigma_2 = \frac{3}{28}\sqrt{6}$ .

Нормализация в членах четвертой степени приводит гамильтониан к виду (4.5), где

$$c_{20} = \frac{162831}{27832}, \quad c_{02} = \frac{285}{112}, \quad c_{11} = \frac{531}{568}\sqrt{497}.$$

Так как  $c_{ij} > 0$ , то квадратичная форма (4.6) определено положительная, ее дискриминант  $D_2 = 374.81 > 0$ . Таким образом, при данном значении частоты нижнее положение относительного равновесия двойного маятника устойчиво для большинства начальных условий и формально устойчиво.

## § 5. О других периодических движениях в системе двух одинаковых стержней

### 5.1. Положения равновесия приближенной системы, отличные от вертикальных

Рассмотрим теперь вопрос о существовании и устойчивости высокочастотных периодических движений рассматриваемой системы двух одинаковых стержней, отличных от положений относительных равновесий на вертикали.

В приближенной системе им отвечают положения равновесия, определяемые условиями

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \psi_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \psi_2} = 0,$$

где функция  $\Pi$  определяется формулой (2.6) при  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ . Указанные соотношения равносильны системе уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{27}{4} \frac{\left[ \cos \psi_2 (\cos \psi_1 \sin(\psi_2 - \psi_1) - \sin \psi_1 \cos(\psi_2 - \psi_1)) + 2 \cos \psi_1 \sin \psi_1 \right]}{-16 + 9 \cos^2(\psi_2 - \psi_1)} - \\ & - \frac{27}{4} \frac{\left[ 9 \cos \psi_1 (\cos \psi_2 \cos(\psi_2 - \psi_1) - \cos \psi_1) - 4 \cos^2 \psi_2 \right] \sin 2(\psi_2 - \psi_1)}{(-16 + 9 \cos^2(\psi_2 - \psi_1))^2} + \frac{3}{2} \omega^2 \sin \psi_1 = 0, \\ & \frac{3}{4} \frac{\left[ -9 \cos \psi_1 (\sin \psi_2 \cos(\psi_2 - \psi_1) + \cos \psi_2 \sin(\psi_2 - \psi_1)) + 4 \sin 2\psi_2 \right]}{-16 + 9 \cos^2(\psi_2 - \psi_1)} + \\ & + \frac{27}{4} \frac{\left[ 9 \cos \psi_1 (\cos \psi_2 \cos(\psi_2 - \psi_1) - \cos \psi_1) - 4 \cos^2 \psi_2 \right] \sin 2(\psi_2 - \psi_1)}{(-16 + 9 \cos^2(-\psi_1 + \psi_2))^2} + \frac{1}{2} \omega^2 \sin \psi_2 = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Рассматривая частоту  $\omega$  как параметр и придавая ей различные значения ( $\omega > 0$ ), построим в плоскости величин  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнениям (30) и соответствующих искомым положениям равновесия.

Одновременно будем проверять полученные решения на устойчивость с помощью условий, аналогичных неравенствам (3.2).

Численно-графический анализ решений этой системы приводит к следующим результатам.

При  $\omega > 0.87772$  в приближенной системе, кроме четырех положений равновесия на вертикали, другие положения равновесия отсутствуют. При этом равновесным точкам  $[0, 0]$  и  $[\pi, \pi]$  отвечают точка минимума и точка максимума потенциальной энергии соответственно, а равновесным точкам  $[0, \pi]$ ,  $[\pi, 0]$  — седловые точки.

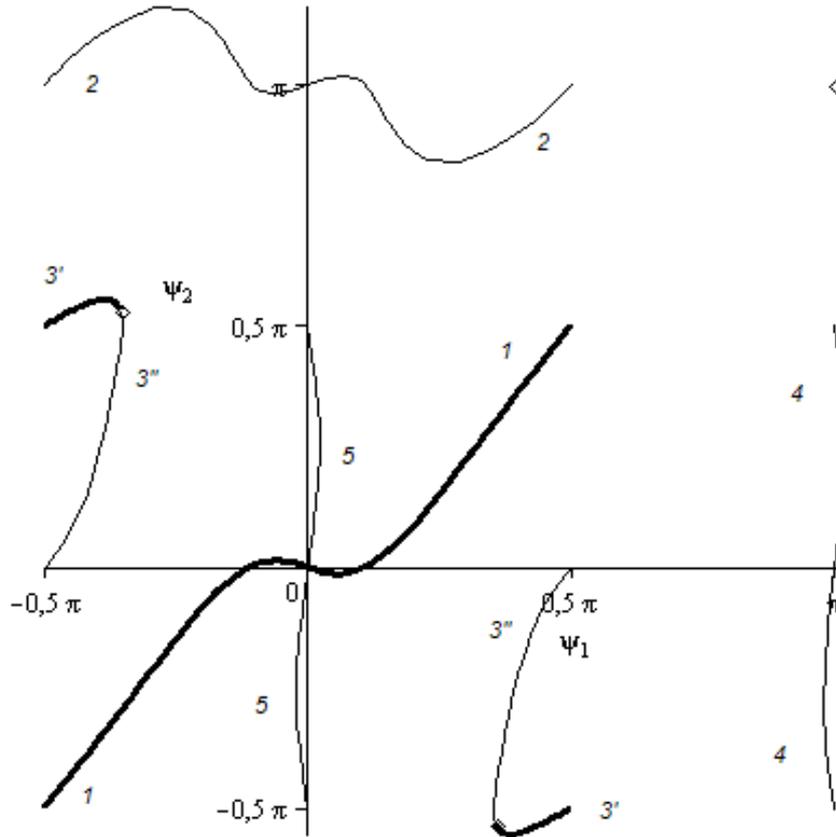


Рис. 2. Положения равновесия

При  $\omega \leq 0.87772$  в окрестности точки  $[0, 0]$ , преобразующейся в седловую, возникают две симметричные устойчивые равновесные точки — точки минимума функции  $\Pi$ . В плоскости  $\psi_1, \psi_2$  геометрическое место этих равновесных точек для значений  $0 \leq \omega \leq 0.87772$  образуют кривые, помеченные на рис. 2 номером 1. Кривые при  $\omega = 0.87772$  берут начало в точке  $[0, 0]$  и при  $\omega \rightarrow 0$  (то есть при  $\Omega \rightarrow \infty$ ) заканчиваются в точках  $[\pi/2, \pi/2]$  и  $[-\pi/2, -\pi/2]$ , соответствующих «развернутому» расположению стержней вдоль горизонтали.

При  $\omega \leq 0.8376$  в окрестности точки  $[0, \pi]$ , преобразующейся в точку максимума функции  $\Pi$ , появляются две симметричные неустойчивые (седловые) равновесные точки. Геометрическое место этих равновесных точек в плоскости  $\psi_1, \psi_2$  для значений  $0 \leq \omega \leq 0.8376$  образуют кривые, помеченные на рис. 2 номером 2. Предельными точками этих кривых при  $\omega \rightarrow 0$  являются точки  $[\pi/2, \pi]$  и  $[-\pi/2, \pi]$ , соответствующие горизонтальному положению стержня 1 и верхнему вертикальному положению стержня 2.

При  $\omega \leq 0.6128$  возникают еще четыре дополнительные равновесные точки, первая пара возникает в окрестности точки  $A_1 = [-1.114023724, 1.652290248]$ , а вторая — в окрестности  $A_2 = [1.114023724, -1.652290248]$ . В точках  $A_1, A_2$   $\partial^2 \Pi / \partial \psi_2^2$  обращается в нуль. Геометрическое место равновесных точек при  $0 \leq \omega \leq 0.6128$  образуют кривые  $3'$  и  $3''$ . Точки, образующие кривые  $3'$ , являются устойчивыми точками (точками минимума потенциальной энергии), а точки, образующие кривые  $3''$ , — неустойчивыми (седловыми). В граничных точках  $A_1$  и  $A_2$  устойчивость не исследуется. Предельными точками кривых  $3'$  при  $\omega \rightarrow 0$  являются точки  $[-\pi/2, \pi/2]$  и  $[\pi/2, -\pi/2]$ , отвечающие «сложенному» расположению стержней вдоль горизонтали. Предельными точками кривых  $3''$  при  $\omega \rightarrow 0$  являются точки  $[-\pi/2, 0]$  и  $[\pi/2, 0]$ , соответствующие горизонтальному положению стержня 1 и нижнему вертикальному положению стержня 2.

При  $\omega \leq 0.1673$  в окрестности точки  $[\pi, 0]$ , преобразующейся в точку максимума потенци-

альной энергии, появляются две симметричные неустойчивые (седловые) равновесные точки. Геометрическое место этих равновесных точек при  $0 \leq \omega \leq 0.1673$  образуют кривые, помеченные на рис. 2 номером 4. Предельными точками этих кривых при  $\omega \rightarrow 0$  являются точки  $[\pi, \pi/2]$  и  $[\pi, -\pi/2]$ , отвечающих верхнему вертикальному положению стержня 1 и горизонтальному положению стержня 2.

При  $\omega \leq 0.1598$  в окрестности точки  $[0, 0]$ , преобразующейся в точку максимума функции  $\Pi$ , возникают две симметричные неустойчивые (седловые) точки, геометрическое место которых образуют кривые 5. В пределе при  $\omega \rightarrow 0$  имеем точки  $[0, \pi/2]$  и  $[0, -\pi/2]$ , соответствующие нижнему вертикальному положению стержня 1 и горизонтальному положению стержня 2.

Таким образом, дополнительные («боковые») положения равновесия приближенной системы существуют только в диапазоне частот колебаний точки подвеса, для которых вертикальные относительные равновесия неустойчивы. В зависимости от частоты вибрации точки подвеса таких равновесий может быть от одного до шести (для каждого еще имеется симметричная пара). Одна или две пары устойчивы в области существования, остальные неустойчивы.

Заметим, что в случае математического маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса «боковое» положение равновесия соответствующей приближенной системы устойчиво в области существования [5]. В случае двойного маятника, состоящего из двух одинаковых стержней, при вертикальных вибрациях точки подвеса, все существующие «боковые» равновесия приближенной системы неустойчивы [14].

### 5.2. Периодические движения в системе двух одинаковых стержней и устойчивость

Возвращаясь к полной системе, заметим, что согласно теории периодических движений Пуанкаре из каждого определяемого уравнениями (5.1) положения равновесия  $\psi_1 = \psi_{1*}$ ,  $\psi_2 = \psi_{2*}$  приближенной системы рождается единственное, аналитическое по  $\varepsilon$ ,  $2\pi$ -периодическое по  $\tau$  решение полной системы с периодическими членами порядка  $O(\varepsilon^3)$  и выше,

$$\psi_1(\tau) = \psi_{1*} + O(\varepsilon^3), \quad \psi_2(\tau) = \psi_{2*} + O(\varepsilon^3).$$

Этому решению в свою очередь отвечает единственное  $2\pi$ -периодическое решение исходной системы с гамильтонианом (1.2) (при  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ ), описывающее движение рассматриваемой системы и имеющее вид

$$\varphi'_1(\tau) = \psi_{1*} + \varepsilon \frac{3(-6 \cos(\psi_{1*}) + 3 \cos(\psi_{1*} - \psi_{2*}) \cos(\psi_{2*}))}{16 - 9 \cos(\psi_{1*} - \psi_{2*})^2} \cos(\tau) + O(\varepsilon^2), \quad (5.2)$$

$$\varphi'_2(\tau) = \psi_{2*} + \varepsilon \frac{3(9 \cos(\psi_{1*} - \psi_{2*}) \cos(\psi_{1*}) - 8 \cos(\psi_{2*}))}{16 - 9 \cos(\psi_{1*} - \psi_{2*})^2} \cos(\tau) + O(\varepsilon^2), \quad (5.3)$$

$$p'_1(\tau) = \frac{3}{2} \varepsilon \cos(\psi_{1*}) \sin(\tau) + O(\varepsilon^2), \quad p'_2(\tau) = \frac{1}{2} \varepsilon \cos(\psi_{2*}) \sin(\tau) + O(\varepsilon^2). \quad (5.4)$$

Данные соотношения получены в результате проведения обратной последовательности замен переменных с использованием формул (2.4), (2.2)–(2.3), (2.1). Эти соотношения описывают положения относительного равновесия, либо высокочастотные периодические колебания двойного маятника. В последнем случае каждый стержень маятника «дрожит» с малой (порядка  $\varepsilon$ ) амплитудой в окрестности «среднего» значения  $\psi_{j*}$  ( $j = 1, 2$ ) его отклонения от вертикали, являющиеся равновесными значениями углов приближенной системы. Период колебаний равен периоду колебаний точки подвеса.

Неустойчивые решения в линейном приближении являются также неустойчивыми в исходной системе в силу непрерывности по  $\varepsilon$  характеристических показателей линеаризованных уравнений возмущенного движения.

Часть порождающих положений равновесия приближенной системы являются устойчивыми (на рис. 2 им соответствуют кривая 1, пара кривых 3'). Отвечающие им периодические решения полной системы устойчивы в линейном приближении.

Проведем полный нелинейный анализ устойчивости этих решений. Процедура исследования аналогична процедуре, описанной для нижнего вертикального положения относительного равновесия.

Положим в (2.5)  $\mu = 1$ ,  $\lambda = 1$  и введем возмущения по формулам

$$\theta_j = \varphi'_j(\tau) + x_j, \quad p_j = p'_j(\tau) + y_j, \quad (j = 1, 2), \quad \omega = \omega^*.$$

Функции  $\varphi'_j(\tau)$ ,  $p'_j(\tau)$  ( $j = 1, 2$ ) вычисляются по формулам (5.2).

Разложим гамильтониан в ряд Тейлора до членов четвертого порядка включительно относительно возмущений  $x_j$ ,  $y_j$  ( $j = 1, 2$ ). Затем проведем исследование, аналогичное проделанному для нижнего вертикального положения. Гамильтониан системы примет вид

$$K' = \varepsilon K'_2 + \varepsilon^{3/2} K'_3 + \varepsilon^2 K'_4 + O(\varepsilon^{5/2})$$

Далее при помощи линейного  $2\pi$ -периодического по  $\tau$  унивалентного канонического преобразования гамильтониан системы можно привести к виду (4.5).

Описываемая процедура реализована численно при помощи расчета на компьютере вдоль кривых 1 и 3'. Результаты расчета таковы.

Для всех точек исследуемых кривых коэффициенты  $c_{20}$ ,  $c_{02}$ ,  $c_{11}$  всегда отрицательны. Значит, квадратичная форма определенно отрицательная при любых значениях  $r_1 > 0$ ,  $r_2 > 0$ . Дискриминант  $D_2$  квадратичной формы (3.6) также всегда отрицателен.

Таким образом, в области устойчивости в линейном приближении рассматриваемые периодические движения устойчивы для большинства начальных условий и формально устойчивы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stephenson A. On a new type of dynamical stability // Mem. and Proc. of the Manchester Literary and Phil. Soc. 1908. Vol. 52. Pt. 2. № 8. P. 1–10.
2. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физ. наук. 1951. Т. 44. Вып. 1. С. 7–20.
3. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588–597.
4. Бардин Б.С., Маркеев А.П. Об устойчивости равновесия маятника при вертикальных колебаниях точки подвеса // Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59. № 6. С. 922–929.
5. Холостова О.В. Об устойчивости периодических движений маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 4. С. 35–39.
6. Боголюбов Н.Н. Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. трудов Института строит. механики АН УССР. 14. 1950. С. 9–34.
7. Маркеев А.П. О динамике сферического маятника с вибрирующим подвесом // Прикладная математика и механика. 1999. Т. 63. № 2. С. 213–219.
8. Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа «маятник». Алма-Ата: Наука, 1981. 253 с.
9. Юдович В.И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики. 2006. Т. 4. № 3. С. 26–158.
10. Маркеев А.П. К теории движения твердого тела с вибрирующим подвесом // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427. № 6. С. 771–775.
11. Маркеев А.П. Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. № 2. С. 193–203.
12. Холостова О.В. Об устойчивости равновесий твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Вестник РУДН. Математика. Информатика. Физика. 2011. № 2. С. 111–122.
13. Stephenson A. On induced stability // Phil. Mag. 1909. Vol. 17. Ser. 7. P. 765–766.
14. Холостова О.В. О движениях двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 25–40.
15. Холостова О.В. Об устойчивости относительных равновесий двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса // Механика твердого тела. 2011. № 4. С. 18–30.
16. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
17. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. 3-е изд. М.: Едиториал УРСС, 2009. 416 с.
18. Glimm J. Formal stability of Hamiltonian systems // Comm. Pure Appl. Math. 1964. Vol. 17. № 4. P. 509–526.

Поступила в редакцию 30.09.2011

Холостова Ольга Владимировна д. ф.-м. н., профессор, кафедра теоретической механики, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125080, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., 4.

E-mail: kholostova\_o@mail.ru

Вишенкова Екатерина Алексеевна, студентка, кафедра теоретической механики, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125080, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., 4.

E-mail: vishenkova@bk.ru

***E. A. Vishenkova, O. V. Kholostova***

**To dynamics of a double pendulum with a horizontally vibrating point of suspension**

*Keywords:* double pendulum, high-frequency oscillations, stability, KAM-theory.

Mathematical Subject Classifications: 53A17, 70E20, 70E50

We consider the motion of a system consisting of two hinged thin uniform rods rotating about horizontal axes. It is assumed that the point of suspension of the system coinciding with the point of suspension of one of the rods makes horizontal high-frequency harmonic oscillations of a small amplitude.

Investigation of stability of four relative equilibria in the vertical is carried out. It is proved that only the lower («hanging») relative equilibrium can be stable if the oscillation frequency of the point of suspension doesn't exceed the fixed value. For a system consisting of two identical rods the nonlinear problem of stability of this equilibrium is solved. The problem of existence, bifurcations and stability of high-frequency periodic motions of a small amplitude which differ from the relative equilibria in the vertical is also studied for the system.

#### REFERENCES

1. Stephenson A. On a new type of dynamical stability, *Mem. and Proc. of the Manchester Literary and Phil. Soc.*, 1908, vol. 52, pt. 2, no. 8, pp. 1–10.
2. Kapitsa P.L. Pendulum with a vibrating suspension, *Uspekhi Fiz. Nauk*, 1951, vol. 44, no. 1, pp. 7–20.
3. Kapitsa P.L. Dynamic stability of a pendulum with vibrating suspension point, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1951, vol. 21, no. 5, pp. 588–597.
4. Bardin B.S., Markeev A.P. On stability of an equilibrium of a pendulum with a vertically vibrating suspension point, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1995, vol. 59, no. 6, pp. 922–929.
5. Kholostova O.V. On stability of periodic motions of a pendulum with a horizontally vibrating point of suspension, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Mekh. Tv. Tela*, 1997, no. 4, pp. 35–39.
6. Bogolubov N.N. Perturbation theory in nonlinear mechanics, *Sb. Tr. Inst. Stroit. Mekh. Akad. Nauk Ukr. SSR*, 14, 1950, pp. 9–34.
7. Markeev A.P. On dynamics of a spherical pendulum with a vibrating suspension, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1999, vol. 63, no. 2, pp. 213–219.
8. Strizhak T.G. *Metody issledovaniya dinamicheskikh sistem tipa «mayatnik»* (Methods for studying dynamical systems of a pendulum-type), Alma-Ata: Nauka, 1981, 253 p.
9. Yudovich V.I. Vibrodynamics and vibrogeometry in mechanical systems with constraints, *Uspekhi Mekh.*, 2006, vol. 4, no. 3, pp. 26–158.
10. Markeev A.P. To the theory of a rigid body with a vibrating suspension, *Dokl. Ross. Akad. Nauk*, 2009, vol. 427, no. 6, pp. 771–775.
11. Markeev A.P. Equations of the approximate theory of a motion of a rigid body with a vibrating suspension point, *Prikl. Mat. Mekh.*, 2011, vol. 75, no. 2, pp. 193–203.
12. Kholostova O.V. On stability of relative equilibria of a rigid body with a vibrating point of support, *Vestn. Ross. Univ. Dr. Nar. Ser. Mat. Inform. Fiz.*, 2011, no. 2, pp. 111–122.
13. Stephenson A. On induced stability, *Phil. Mag.*, 1909, vol. 17, ser. 7, pp. 765–766.
14. Kholostova O.V. On motions of a double pendulum with a vibrating suspension point, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Mekh. Tv. Tela*, 2009, no. 2, pp. 25–40.

15. Kholostova O.V. On stability of relative equilibria of a double pendulum with a vibrating suspension point, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Mekh. Tv. Tela*, 2011, no. 4, pp. 18–30.
16. Markeev A.P. *Tochki libratsii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike* (Libration points in celestial mechanics and cosmodynamics), Moscow: Nauka, 1978, 312 p.
17. Arnold V.I., Kozlov V.V., Neustadt A.I. *Matematicheskie aspekty klassicheskoi i nebesnoi mekhaniki* (Mathematical aspects of classical and celestial mechanics), Moscow: Editorial URSS, 2004, 416 p.
18. Glimm J. Formal stability of Hamiltonian systems, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1964, vol. 17, no. 4, pp. 509–526.

Received 30.09.2011

Kholostova Ol'ga Vladimirovna, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Theoretical Mechanics, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4, Volokolamskoe sh., Moscow, 125080, Russia.

E-mail: kholostova\_o@mail.ru

Vishenkova Ekaterina Alekseevna, Student, Department of Theoretical Mechanics, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4, Volokolamskoe sh., Moscow, 125080, Russia.

E-mail: vishenkova@bk.ru