

УДК 517.925 + 517.3

© А. С. Гонченко

ОБ АТТРАКТОРАХ ЛОРЕНЦЕВСКОГО ТИПА В МОДЕЛИ КЕЛЬТСКОГО КАМНЯ¹

В работе изучается хаотическая динамика неголономной модели кельтского камня. Показано, что при определенных значениях параметров, характеризующих геометрические и физические свойства камня, в модели наблюдается странный аттрактор лоренцевского типа, для которого также исследованы этапы его возникновения и разрушения.

Ключевые слова: кельтский камень, неголономная модель, аттрактор Лоренца, хаотическая динамика.

Введение

Задача исследования динамики движения кельтского камня на плоскости является одной из наиболее сложных и интересных задач динамики твердого тела вообще. Соответствующая неголономная модель (см. систему (1.1)) хотя и допускает два интеграла (энергии и геометрический) является неинтегрируемой. Заметим, что сама система (1.1) шестимерна, а на совместном уровне двух интегралов она становится четырехмерной. Кроме того, эта система обратима относительно замены времени $t \rightarrow -t$, а также она зависит от большого числа параметров, характеризующих, в частности, физические и геометрические свойства камня (см. (2.1)). Всё это свидетельствует о том, что динамика системы может быть весьма богатой и разнообразной.

Как показано в работах А. Борисова и И. Мамаева [1,2], в динамике кельтского камня могут наблюдаться различного типа устойчивые режимы: перманентные вращения, периодические и квазипериодические движения, а также хаотическая динамика. Что касается последней, то, как показано в недавних работах [3,4], она действительно весьма богатая. Здесь наблюдаются не только странные аттракторы (СА) различной природы (спиральные или шильниковские СА, аттракторы типа «тор-хаос», даже СА фейгенбаумовского типа), не только хаос, близкий к консервативному, но также и сравнительно малоисследованный тип хаоса, так называемая *смешанная динамика*. Последняя, как показано в работе [5], типична для обратимых систем, обладающих симметричными гомоклиническими и гетероклиническими траекториями.

Однако в хаотической динамике кельтского камня до сих пор не наблюдались аттракторы лоренцевского типа.² Хотя заметим, что как спиральные аттракторы, так и аттракторы лоренцевского типа могут возникать (в частности, в трехмерных отображениях и четырехмерных потоках) в результате простых и универсальных бифуркационных сценариев, которые начинаются с бифуркации потери устойчивости неподвижной точки (или периодического аттрактора) [8,9]. Для возникновения аттрактора лоренцевского типа характерен такой сценарий:

- устойчивая неподвижная точка \Rightarrow устойчивая точка периода два \Rightarrow появление гомоклинической точки у седла O типа $(2, 1)$ (см. рис. 1(а));

а для спирального аттрактора — такой:

- устойчивая неподвижная точка \Rightarrow замкнутая инвариантная кривая (тор) \Rightarrow появление гомоклинической точки у седло-фокуса O типа $(1, 2)$ (см. рис. 1(б)).

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 13-01-00589, Федеральной программы «Scientific and scientific-educational brain-power of innovative Russia» (Contract No. 14.B37.21.0863) и ФЦП «Кадры» (грант №14.B37.21.0361).

²Более того, автору неизвестны и другие примеры моделей из приложений, в которых бы обнаруживались аттракторы лоренцевского типа (кроме, конечно, тех моделей, которые непосредственно связаны со знаменитой системой Лоренца, см., например, обзорную статью [7] и соответствующие ссылки там). Заметим, что СА лоренцевского типа для диффеоморфизмов были обнаружены в трехмерных отображениях Эно [6].

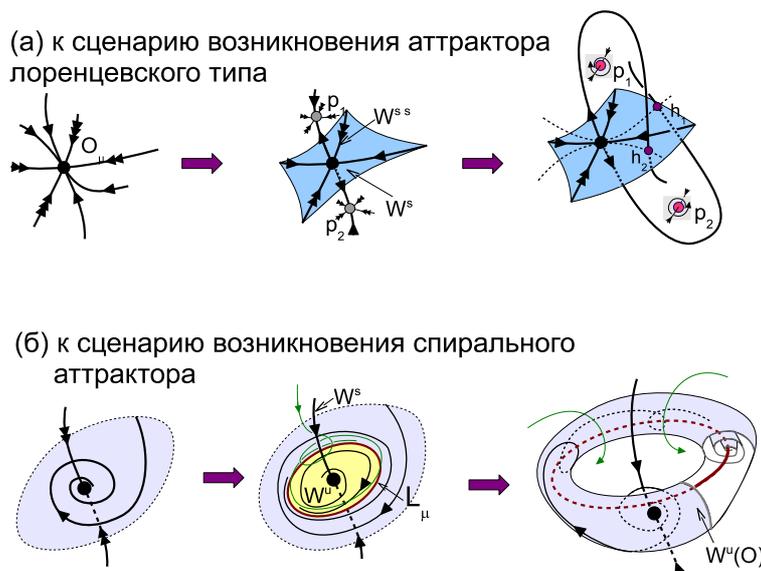


Рис. 1.

По существу, разница здесь состоит только в типе первой бифуркации потери устойчивости неподвижной точки: удвоение периода или бифуркация Андронова–Хопфа. В первом случае устойчивая точка становится седлом с одномерным неустойчивым многообразием (тип $(2, 1)$), а во втором — с двумерным неустойчивым (тип $(1, 2)$). (Подробнее см. в [9].)

В настоящей работе мы показываем, что в модели кельтского камня (с физическими параметрами, взятыми из работы [4]) все-таки существуют аттракторы лоренцевского типа. Мы также частично прослеживаем сценарии возникновения и разрушения таких аттракторов.

§ 1. Уравнения движения кельтского камня

Кельтский камень — это твердое тело на горизонтальной плоскости, обладающее свойством асимметрии относительно вращения вокруг вертикальной оси: если его вращение в одном направлении, например по часовой стрелке, является устойчивым, то в другую оно неустойчиво: если попытаться закрутить камень против часовой стрелки, он начнет замедлять свое вращение и сильно раскачиваться, затем меняет направление вращения на противоположное, раскачивания уменьшаются, и, в конце концов, он будет вращаться уже по часовой стрелке (в идеале — без трения — с той же угловой скоростью, что и в начале).

Мы изучаем динамику движения твердого тела по горизонтальной плоскости при условии, что проскальзывание отсутствует, то есть скорость тела в точке контакта с плоскостью равна нулю. Это условие можно записать в виде неголономной связи $\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0$, где \mathbf{r} — радиус-вектор, соединяющий центр масс G с точкой контакта R , а \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$ — скорость центра масс и угловая скорость тела соответственно. Считается, что координаты всех векторов заданы в некотором базисе, жестко связанном с телом. Хорошо известно (см. [1]), что уравнения движения твердого тела в этом случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + m\mathbf{g}\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (1.2)$$

— кинетический момент тела относительно точки контакта, γ — единичный орт вертикали, mg — вес тела. Система уравнений (1.1) имеет два интеграла:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) - mg(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}) \text{ и } (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad (1.3)$$

интеграл энергии и геометрический интеграл соответственно.

Мы рассматриваем кельтский камень в форме *эллиптического параболоида*. Тогда уравнение поверхности тела, $F(\mathbf{r}) = 0$, и координаты вектора $\boldsymbol{\gamma}$ задаются таким образом:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{r_1^2}{a_1} + \frac{r_2^2}{a_2} \right) - (r_3 + h) = 0, \\ r_1 &= -a_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_3}, \quad r_2 = -a_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_3}, \quad r_3 = -h + \frac{a_1 \gamma_1^2 + a_2 \gamma_2^2}{2\gamma_3^2}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где a_1, a_2 — радиусы главных кривизн при вершине параболоида, а h — высота центра масс, расположенного на оси параболоида. Предполагается также, что центр тяжести тела находится в точке $r_1 = r_2 = r_3 = 0$, а одна из главных осей инерции является вертикальной. Отличительной особенностью кельтских камней является то, что две другие главные оси повернуты относительно геометрических осей на угол δ , где $0 < \delta < \pi/2$. В этом случае тензор инерции в главных геометрических осях будет иметь вид [1]

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \cos^2 \delta + I_2 \sin^2 \delta & (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta & 0 \\ (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta & I_1 \sin^2 \delta + I_2 \cos^2 \delta & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

где I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции параболоида.

В силу соотношений (1.2) и (1.4), из которых \mathbf{M} и \mathbf{r} выражаются однозначно через $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$, система (1.1) может быть представлена в стандартной форме

$$(\dot{\boldsymbol{\omega}}, \dot{\boldsymbol{\gamma}}) = G(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, \mu) \quad (1.6)$$

шестимерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений от фазовых переменных $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ и $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{S}^3$, зависящей от параметров μ , характеризующих геометрические и физические свойства камня.

В рассматриваемой задаче, как и во многих других разделах динамики твердого тела, весьма удобными для исследования являются так называемые *координаты Андуайе–Депри* (L, H, G, g, l) , которые вводятся по формулам [10]

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, \quad M_2 = \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, \quad M_3 = L, \\ \gamma_1 &= (\sin \zeta \cos \tau + \sin \tau \cos \zeta \cos g) \sin l + \cos \zeta \sin g \cos l, \\ \gamma_2 &= (\sin \zeta \cos \tau + \sin \tau \cos \zeta \cos g) \cos l - \cos \zeta \sin g \sin l, \\ \gamma_3 &= \sin \zeta \sin \tau - \cos \tau \cos \zeta \cos g, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $\sin \tau = L/G$, $\sin \zeta = H/G$, и по определению (см., например, [10])

$$H = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = M_1 \gamma_1 + M_2 \gamma_2 + M_3 \gamma_3. \quad (1.8)$$

Здесь предполагается, что $\tau, \zeta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

На совместном уровне двух интегралов (1.3), где $\mathcal{H} = E$, уравнения (1.6) задают четырехмерный поток \mathcal{G}_E . Отметим, что новые координаты L, H, G, g и l выбраны так, что условие $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1$ выполняется автоматически. Это означает, что на уровне геометрического интеграла формулы (1.7) задают взаимно-однозначное преобразование везде, кроме плоскостей $L/G = \pm 1$ и $H/G = \pm 1$.

Далее мы будем исследовать динамические свойства систем \mathcal{G}_E на четырехмерных уровнях энергии $\mathcal{H}(L, G, H, l, g) = E$. При этом плоскости $g = g_0 = \text{const}$ (при подходящих g_0) можно

рассматривать в качестве секущих для соответствующего четырехмерного потока [1, 2]. И тогда исследование динамики последнего можно проводить с помощью однопараметрических семейств отображений Пуанкаре T_E вида

$$\bar{x} = \mathcal{F}_{g_0}(x, E), \quad \text{где } x = \left(l, \frac{L}{G}, \frac{H}{G} \right), \quad (1.9)$$

которое определено в области $0 \leq l < 2\pi$, $-1 \leq L/G \leq 1$, $-1 \leq H/G \leq 1$.

§ 2. Численное исследование модели кельтского камня и сценарии перехода к лоренцевскому аттрактору

При численных расчетах мы используем модель кельтского камня, физические параметры которого следующие:

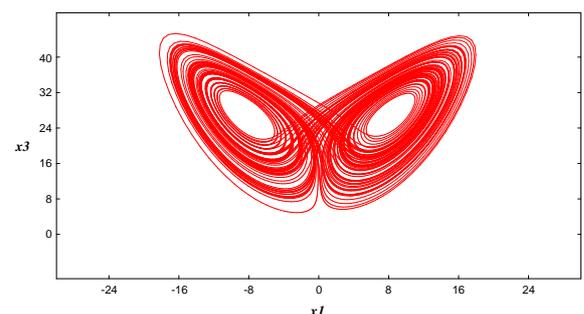
$$I_1 = 2, \quad I_2 = 6, \quad I_3 = 7, \quad m = 1, \quad g = 100, \quad a_1 = 9, \quad a_2 = 4, \quad h = 1, \quad (2.1)$$

а также $\delta = 0.485$, и изучаем динамику отображения Пуанкаре T_E (см. (1.9)) при $g_0 = 0$. Численные исследования проводились с помощью программного комплекса «Хаос», разработанного в Институте компьютерных исследований УдГУ.

Замечание 1. Кельтский камень с параметрами (2.1) и $\delta = 0.405$ изучался в работе [4], в которой при значениях $E = 770$ энергии был обнаружен аттрактор, весьма похожий на аттрактор рисунка 6(f). Поскольку аналогичные аттракторы, как мы уже знали, существуют у трехмерных отображений Эно [9] (см. также³) вблизи границ разрушения лоренцевских аттракторов, естественно возникает вопрос: а нет ли в данной модели кельтского камня (при близких значениях параметров) аттрактора лоренцевского типа? Этим и объясняется то, что численные исследования в настоящей работе проводились для камня с параметрами (2.1).



(a)



(b)

Рис. 2. (а) Аттрактор лоренцевского типа при $E = E^* = 752$ в модели кельтского камня (показано порядка 10000 итераций некоторой начальной точки); б) проекция на плоскость (x, z) аттрактора Лоренца из системы Лоренца

2.1. Характеристики СА при $E = E^* = 752$

На рисунке 2 показаны для сравнения (а) итерации одной точки на аттракторе A_{E^*} отображения T_E при $E = E^* = 752$ (выбран определенный ракурс для проектирования) и (б) проекция

³[GGOT] Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Ovsyannikov I.I., Turaev D. Lorenz-like attractors in three-dimensional Hénon maps // Math. Model. Nat. Phenom., 2013, 24 p (to appear).

траекторий классического аттрактора Лоренца из модели Лоренца при $r = 28, \sigma = 10, b = 8/3$ на плоскость (x, z) . Очевидно, что здесь прослеживается определенное сходство.

Седловая неподвижная точка O^* с координатами $l = 3.650, L/G = 0.669, H/G = -0.384$ на аттракторе A_{E^*} имеет мультипликаторы $\lambda_1 = 0.996, \lambda_2 = -0.664, \gamma = -1.312$. Если нарисовать ее неустойчивые многообразия («сепаратрисы»), то, как и ожидалось, они будут с «петлями» (результат существования гомоклинического пересечения) (см. рис. 5(a)), в отличие от неустойчивых сепаратрис потокового аттрактора Лоренца, которые представляют собой вполне монотонные спирали.

Для аттрактора A_{E^*} при $E = E^* = 752$ спектр ляпуновских показателей получился следующим: $\Lambda_1 = 0.0248, \Lambda_3 = -0.2445, 0.00007 < \Lambda_2 < 0.00015$. Отметим, что средний ляпуновский показатель Λ_2 получился чуть-чуть положительным, с колебаниями в указанных пределах. Очевидно, что здесь выполняются условия $\Lambda_1 > 0, \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 < 0$ и $\Lambda_1 + \Lambda_2 > 0$. Первые два условия означают, что аттрактор странный, а третье — что он псевдогиперболический (растяжение площадей трансверсально сильному сжатию, отвечающему показателю $\Lambda_3 < 0$).

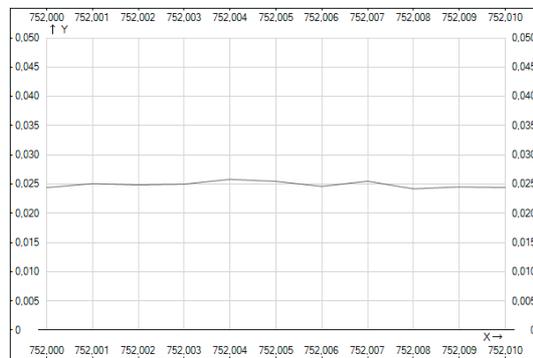


Рис. 3. Вид графика $\Lambda_1(E)$ на интервале $[752; 752.01]$

На графике рисунка 3 показана зависимость старшего показателя Λ_1 на интервале $[752; 752.01]$ значений параметра E , примыкающем к точке $E^* = 752$. График строился по точкам с шагом 0.001 по E .

Этот график подтверждает (но только численно!), что наш аттрактор не является квазиаттрактором, то есть не содержит устойчивых периодических траекторий больших периодов, которые также не появляются и при возмущениях. Как видно из рисунка 3, искомый график весь находится в области $\Lambda_1 > 0$, описывается непрерывной функцией, тогда как если бы A_{E^*} был квазиаттрактором, то на графике должны наблюдаться «провалы» с участками $\Lambda_1 < 0$, отвечающими «окнам устойчивости».

2.2. Этапы возникновения и разрушения аттрактора лоренцевского типа в отображении T_E .

На рисунке 4 проиллюстрированы основные этапы возникновения СА лоренцевского типа в отображении T_E при возрастании значений E от $E = 747$ до $E = 750$.

Сначала аттрактор у T_E — это устойчивая неподвижная точка O (рис. 4 a), которая при $E = E_1 = 747.61$ претерпевает бифуркацию удвоения периода, и аттрактором становится устойчивый цикл $P = (p_1, p_2)$ периода 2 (рис. 4 b) (см. также рис. 1 a). При $E = E_2 = 748.4395$ у отображения T_E образуется «гомоклиническая восьмерка-бабочка» неустойчивых многообразий (сепаратрис) седла O (рис. 4 c), из которой затем рождается седловая замкнутая инвариантная кривая $L = (L_1, L_2)$ периода 2 (где $T(L_1) = L_2, T(L_2) = L_1$, кривая L_1 окружает точку p_1 , а кривая L_2 — точку p_2). Этот момент отвечает также образованию сложного инвариантного множества Ω , которое не является пока притягивающим. При этом неустойчивые сепаратрисы седла O перестраиваются, и теперь, при $E_2 < E < E_3$, левая (правая) сепаратриса наматывается на правую (левую) точку цикла P (рис. 4 d). Как показывает численный счет, при $E = E_3 \sim 748.97$ сепаратрисы «ложатся» на устойчивое многообразие кривой L , затем

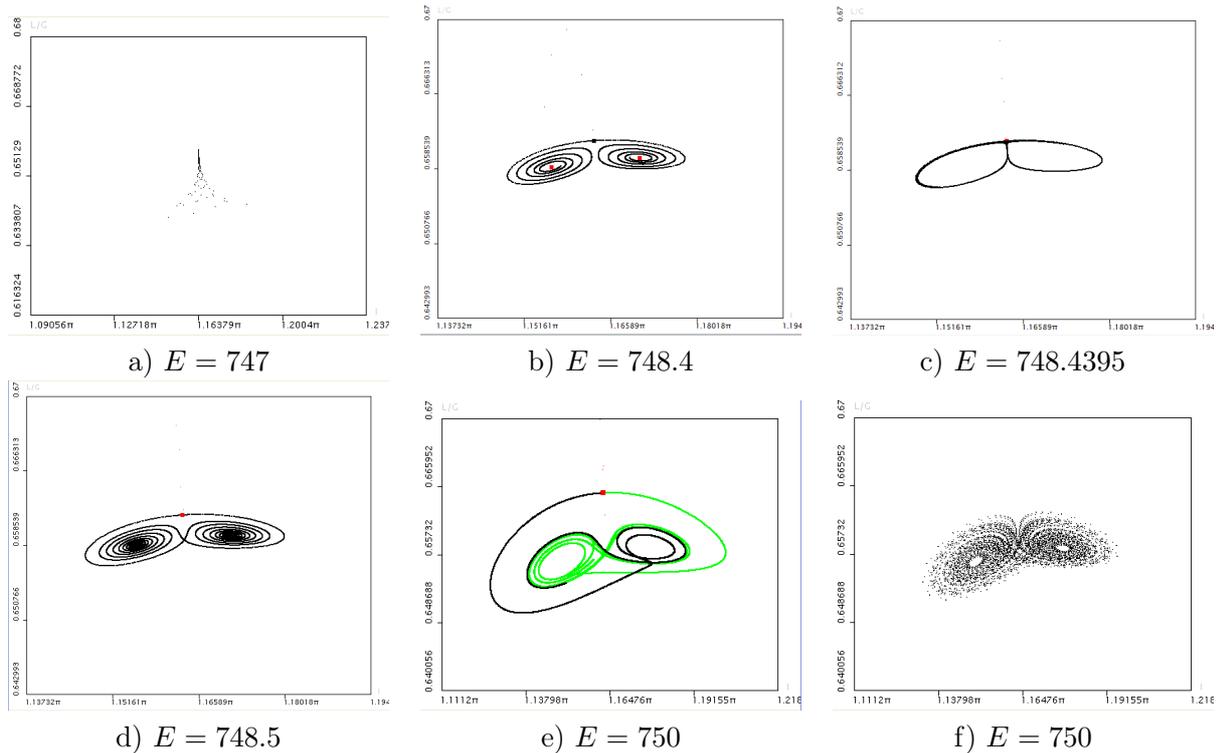


Рис. 4. Основные этапы возникновения аттрактора лоренцевского типа у отображения T_E : на рис. а, f показаны итерации некоторой начальной точки, а на рис. b–e показаны неустойчивые многообразия (сепаратрисы) точки O

сходят с него, и почти сразу же после этого, при $E = E_4 \sim 748.98$, цикл P периода 2 жестко теряет устойчивость (бифуркация Андронова–Хопфа) — в него «влипают» инвариантная кривая L . Значение $E = E_4$ — это бифуркационный момент образования СА, здесь инвариантное множество Ω становится притягивающим. Уже при близких значениях параметра к $E = E_4$ сепаратрисы начинают раскручиваться (см. рис. 4 e), их конфигурация становится похожей на лоренцевскую, что также относится и к фазовому портрету (см. рис. 4 f).

Замечание 2. Заметим, что указанные бифуркации происходят в полном соответствии со сценарием возникновения аттрактора Лоренца в модели Лоренца [11], с учетом того, что здесь мы рассматриваем трехмерное отображение, а в работе [11] — трехмерный поток. Отметим также, что сценарии возникновения аттракторов лоренцевского типа в трехмерных отображениях Эно [6, GGOT] отличались от указанного выше. Там точка периода 2 теряла устойчивость в результате бифуркации Андронова–Хопфа — из нее рождалась устойчивая замкнутая инвариантная кривая периода 2, которая затем либо «влипала» в «гомоклиническую восьмерку-бабочку» седла, либо (другой тип сценария) сливалась с седловой инвариантной кривой периода 2, родившейся из гомоклинической восьмерки [6, GGOT].

На рисунке 5 показаны: а) вид многообразий $W^u(O^*)$ и б) итерации точек на СА отображения T_E при выбранном нами (эталонном) значении параметра $E = E^* = 752$. Как раз этот аттрактор исследуется при счете ляпуновских показателей.

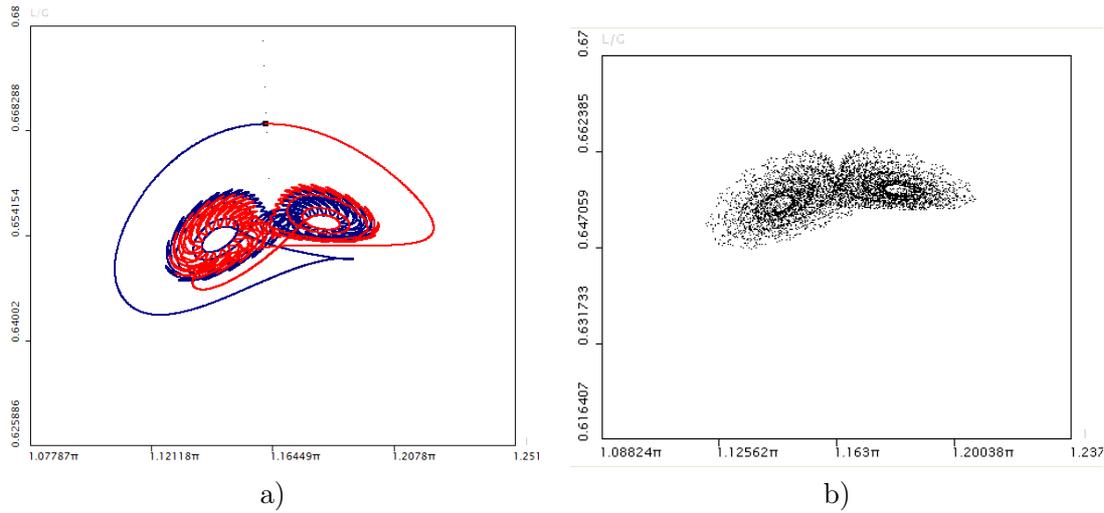


Рис. 5.

На рисунке 6 показаны этапы разрушения аттрактора лоренцевского типа, связанные с возникновением резонансных, (b), (d) и (e), а также хаотических (тор-хаос), (c) и (f), инвариантных кривых. Заметим, что при $E > 790$ от лоренцевского аттрактора «ничего не остается», а траектории из его окрестности убегают на новый устойчивый режим — большой спиральный аттрактор, наблюдавшийся в [3, 4].

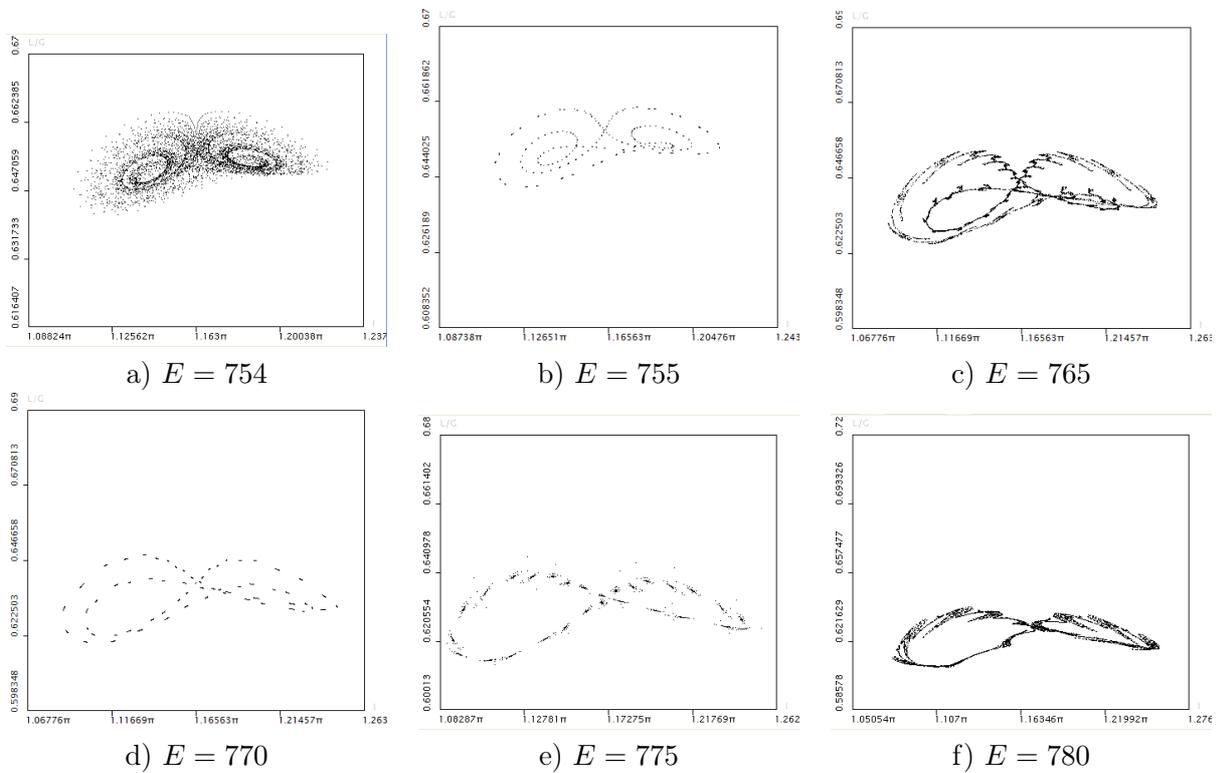


Рис. 6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов А.В., Мамаев И.С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // Неголономные динамические системы. М.–Ижевск: РХД, 2002. С. 293–316.
2. Борисов А.В., Мамаев И.С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // УФН. 2003. Т. 117. № 4. С. 407–418.
3. Гонченко А.С., Гонченко С.В., Казаков А.О. О некоторых новых аспектах хаотической динамики «кельтского камня» // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 3. С. 507–518.
4. Кузнецов С.П., Жалнин А.Ю., Сатаев И.Р., Седова Ю.В. Феномены нелинейной динамики диссипативных систем в неголономной динамике «кельтского камня» // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 4. С. 735–762.
5. Delshams A., Gonchenko S.V., Gonchenko V.S., Lazaro J.T., Sten'kin O.V. Abundance of attracting, repelling and elliptic orbits in two-dimensional reversible maps // Nonlinearity. 2013. Vol. 26. № 1. P. 1–35.
6. Gonchenko S.V., Ovsyannikov I.I., Simó C., Turaev D. Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15. P. 3493–3508.
7. Плыкин Р.В., Сатаев Е.А., Шлячков С.В. Странные аттракторы // Динамические системы–9 / ред. Аносов Д.В. М.: ВИНТИ, 1999. С. 100–148.
8. Шильников Л.П. Теория бифуркаций и турбулентность // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: ГГУ, 1986. С. 150–163.
9. Гонченко А.С., Гонченко С.В., Шильников Л.П. К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 1. С. 3–28.
10. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. М.–Ижевск: РХД, 2001. 384 с.
11. Шильников Л.П. Теория бифуркаций и модель Лоренца // Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсен, М. Мак-Кракен. М.: Мир, 1980. С. 317–335.

Поступила в редакцию 25.04.2013

Гонченко Александр Сергеевич, младший научный сотрудник, НИИ Прикладной математики и кибернетики, 603005, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, 10.
E-mail: agonchenko@mail.ru

A. S. Gonchenko

On Lorenz-like attractors in model of celtic stone

Keywords: celtic stone, nonholonomic model, Lorenz-like attractor, chaotic dynamics.

Mathematical Subject Classifications: 37J60, 37N15, 37G35

We study chaotic dynamics in a nonholonomic model of celtic stone. We show that, for certain values of parameters characterizing geometrical and physical properties of the stone, a strange Lorenz-like attractor is observed in the model. We study certain steps of appearance and break-down of this attractor.

REFERENCES

1. Borisov A.V., Mamaev I.S. Strange attractors in rattleback dynamics, *Nonholonomic dynamical systems*, Moscow–Izhevsk: RCD, 2002, pp. 293–316.
2. Borisov A.V., Mamaev I.S. Strange attractors in rattleback dynamics, *Advances in Physic Sciences*, 2003, vol. 117, no. 4, pp. 407–418.
3. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O. On new aspects of celtic stone chaotic dynamics, *Nelin. Dinamika*, 2012, vol. 8, no. 3, pp. 507–518.

4. Kuznetsov S.P., Zhalnin A.Yu., Sataev I.R., Sedova Yu.V. Phenomena of nonlinear dynamics of dissipative systems in nonholonomic mechanics of the rattleback, *Nelin. Dinamika*, 2012, vol. 8, no. 4, pp. 735–762.
5. Delshams A., Gonchenko S.V., Gonchenko V.S., Lazaro J.T. and Sten'kin O.V. Abundance of attracting, repelling and elliptic orbits in two-dimensional reversible maps, *Nonlinearity*, 2013, vol. 26, no. 1, pp. 1–35.
6. Gonchenko S.V., Ovsyannikov I.I., Simó C., Turaev D. Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2005, vol. 15, pp. 3493–3508.
7. Plykin R.V., Sataev E.A., Shlyachkov S.V. Strange attractors, *Dynamical systems–9*, red. Anosov D.V., Moscow: VINITI, 1999, pp. 100–148.
8. Shilnikov L.P. The bifurcation theory and turbulence, *Methods of qualitative theory of differential equations*, Gor'kii: Gor'kov. Gos. Univ., 1986, pp. 150–163.
9. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Shilnikov L.P. Towards scenarios of chaos appearance in three-dimensional maps, *Nelin. Dinamika*, 2012, vol. 8, no. 1, pp. 3–28.
10. Borisov A.V., Mamaev I.S. *Dinamika tverdogo tela* (Rigid body dynamics), Moscow–Izhevsk: RCD, 2001, 384 p.
11. Shilnikov L.P. The bifurcation theory and the Lorenz model, *Bifurcation of the cycle and its applications*, Moscow: Mir, 1980, pp. 317–335.

Received 25.04.2013

Gonchenko Alexander Sergeevich, Junior Researcher, Research Institute for Applied Mathematics and Cybernetics, ul. Ul'yanova, 10, Nizhnii Novgorod, 603005, Russia.
E-mail: agonchenko@mail.ru