МАТЕМАТИКА 2013. Вып. 2

УДК 517.53

© *А. С. Ильчуков*

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОШИ–РИМАНА

В работе рассматривается следующая краевая задача для обобщенного уравнения Коши–Римана в единичном круге $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} : \partial_{\overline{z}} w + b(z)\overline{w} = 0$, $\Re w = g$ на ∂G, $\Im w = h$ в точке $z_0 = 1$. Коэффициент $b(z)$ выбирается из некоторого множества S_P, построенного с помощью весов, причем $S_P \subsetneq L_2$, $S_P \not\subset L_q$, $q > 2$. В свою очередь, краевое условие g выбирается из пространства, порожденного модулем непрерывности μ, обладающим некоторыми специальными свойствами. Показывается, что задача имеет единственное решение $w = w(z)$ в круге G, причем $w \in C(\overline{G})$. Кроме того, вне точки $z = 0$ поведение решения задачи определяется тем же самым модулем непрерывности μ, что означает, что для решения задачи отсутствует «логарифмический эффект».

Ключевые слова: обобщенное уравнение Коши–Римана, задача Дирихле, модуль непрерывности.

Введение

Обобщенным уравнением Коши–Римана называют следующее уравнение:

$$\partial_{\overline{z}} w + A(z)w + B(z)\overline{w} = 0, \quad z \in G, \tag{0.1}$$

где

$$\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right), \quad z = x + i \cdot y,$$

множество G является ограниченной областью комплексной плоскости, а коэффициенты $A(z)$, $B(z)$ являются некоторыми комплекснозначными функциями, заданными на области G.

В случае когда коэффициенты $A(z)$, $B(z)$ находятся в пространстве $L_q(G)$, $q > 2$, применима теория И. Н. Векуа, которая была разработана в монографии [1], при этом уравнение (0.1) называется регулярной обобщенной системой Коши–Римана, а решение уравнения — обобщенной аналитической функцией. Однако теория Векуа не применима, если коэффициенты $A(z)$, $B(z)$ допускают особенности порядка выше или равной 1, как, например, в следующем уравнении:

$$\partial_{\overline{z}} w + \frac{A(z)}{z} \cdot w + \frac{B(z)}{z} \cdot \overline{w} = 0, \quad z \in G. \tag{0.2}$$

В уравнении (0.2), вообще говоря, коэффициенты не принадлежат пространству $L_q(G)$, $q > 2$. Тем не менее вопросы о решении краевых задач с уравнениями такого рода рассматривались в работах Л. Г. Михайлова, З. Д. Усманова, А. Тунгатарова, Н. Блиева, М. Отелбаева, Р. Сакса, Г. Макацария (см., например, работы [2–5]). При этом использовались различные предположения, такие как малость выражений $A(z) - A(0)$, $B(z) - B(0)$, малость самих коэффицентов $A(z)$, $B(z)$, малость меры области G.

В работе [6] М. Райссигом и А. Ю. Тимофеевым была рассмотрена следующая задача:

$$\partial_{\overline{z}} w + b(z) \cdot \overline{w} = 0, \quad z \in G = \{z : |z| < 1\}, \tag{0.3}$$

$$\Re w = g(z), \quad z \in \partial G, \quad \Im w\big|_{z_0=1} = h. \tag{0.4}$$

При этом без каких-либо предположений малости был получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $b \in S_P(G)$, $g \in C^{\lambda_0}(\partial G)$, $\lambda_0 \in (0,1)$, $h \in \mathbb{R}$. *Тогда задача* (0.3)–(0.4) *имеет единственное решение* $w = w(z)$, *причем* $w \in C(\overline{G}) \bigcap C^{\lambda_0}(\overline{G} \setminus \{0\})$.

Здесь под пространством $S_P(G)$ понимается объединение пространств, порожденных весами, обладающих специальными свойствами. Свойства этого пространства приведены в параграфе 1, при этом можно отметить, что $S_P(G) \subsetneq L_2(G)$, но $S_P(G) \not\subset L_q(G)$ для любого $q > 2$. Далее, под пространством $C^{\lambda_0}(\partial G)$ понимается пространство Гёльдера с показателем λ_0, а под множеством $C^{\lambda_0}(\overline{G} \setminus \{0\})$ — объединение всех пространств вида $C^{\lambda_0}(\overline{G \setminus U_l})$, где $U_l = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{2^l}\}$. Таким образом, теорема 1 интересна также и тем, что она дает связь между поведением граничного условия $g(z)$ и решением $w(z)$ задачи (0.3)–(0.4) в терминах условия Гёльдера.

Вообще говоря, условие Гёльдера можно обобщить с помощью понятия модуля непрерывности, используя соответствующий аппарат для исследования поведения функции. Так, в работе [7] А. Ю. Тимофеевым был получен следующий результат о краевых условиях из пространства Липшица, дополняющий результат теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть* $b \in S_P(G)$, $g \in C_{\mu_{1,0}}(\partial G)$, $\lambda_0 \in (0,1)$, $h \in \mathbb{R}$. *Тогда задача* (0.3)–(0.4) *имеет единственное решение* $w = w(z)$, *причем* $w \in C(\overline{G}) \bigcap C_{\mu_{1,5}}(\overline{G} \setminus \{0\})$.

При этом использовались следующие обозначения: $\mu_{1,0}(t) := t$, $\mu_{1,k}(t) := t \cdot \ln^k \frac{1}{t}$, $k \geqslant 1$, $t \in (0, \frac{1}{e})$. Все функции $\mu_{1,k}(t)$ являются модулями непрерывности; соответственно, $C_{\mu_{1,k}}(K)$ являются пространствами функций, заданных на компакте K и порожденных модулем непрерывности $\mu_{1,k}(t)$. Опять же под пространством $C_{\mu_{1,5}}(\overline{G} \setminus \{0\})$ понимается объединение всех пространств вида $C_{\mu_{1,5}}(\overline{G \setminus U_l})$. Заметим, что из результата теоремы 2 следует, что в процессе решения задачи (0.3)–(0.4) с граничным условием, взятым из липшицевого пространства, возникает так называемый «логарифмический эффект».

Данная работа посвящена дальнейшему исследованию поведения решения задачи (0.3)–(0.4) с коэффициентом $b \in S_P(G)$, а именно доказательству следующего утверждения.

Теорема 3. *Пусть* $b \in S_P(G)$, $g \in C^{\mu}(\partial G)$, $\mu \in \Phi$, $h \in \mathbb{R}$. *Тогда задача* (0.3)–(0.4) *имеет единственное решение* $w = w(z)$, *причем* $w \in C(\overline{G}) \bigcap C^{\mu}(\overline{G} \setminus \{0\})$.

Пространство Φ, приведенное в условии теоремы 3, является подмножеством множества модулей непрерывности; его свойства были рассмотрены в работе [8], часть из них приведена в параграфе 2. Можно отметить, что функции вида $\mu(t) = t^{\lambda}$, $\lambda \in (0,1)$, лежат в пространстве Φ, отсюда следует, что теорема 3 обобщает теорему 1. С другой стороны, в результате теоремы 3 отсутствует «логарифмический эффект», характерный для результата теоремы 2. Доказательство теоремы 3 основывается на результатах о поведении решения задачи Дирихле для голоморфных функций в пространствах, порожденных модулями непрерывности из класса Φ, которые рассмотрены в работе [8] и приведены в параграфе 3. Далее, в параграфе 4 приведена схема доказательства теоремы 3.

§ 1. Пространство функций $S_P(G)$

В этом параграфе приведены понятия веса и пространства S_P, рассмотренные в работе [6].

Определение 1. Функция $p = p(t)$, определенная на полуинтервале $(0, 1]$, называется *весом*, если p удовлетворяет следующим аксиомам:

(C1) p является положительной функцией;

(C2) p является возрастающей функцией;

(C3) существует $\lim\limits_{t \to 0+} p(t) = 0$;

(C4) интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{p(t)}$ конечен.

Множество всех весов p обозначим P.

Используя веса $p \in P$ можно определить следующие классы функций.

Определение 2. Пусть $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $p \in P$. Определим пространство функций $S_{p(|z|)}(G)$ следующим образом:

$$S_{p(|z|)}(G) := \{f \in L_{\infty,loc}(G \setminus \{0\}) : \sup_{G\setminus\{0\}} |f(z)| \cdot p(|z|) < \infty\}.$$

Тогда под $S_P(G)$ будем понимать $\bigcup_{p\in P} S_{p(|z|)}(G)$.

Отметим следующие свойства введенных пространств (см. [6]):

(1) $S_P(G)$ является линейным подпространством пространства $L_2(G)$;

(2) $S_P(G) \neq L_2(G)$;

(3) $S_P(G) \not\subset L_q(G)$ для любого $q > 2$;

(4) величина, определенная для $f \in S_{p(|z|)}(G)$ как

$$||f||_p := \sup_{G\setminus\{0\}} |f(z)| \cdot p(|z|),$$

является нормой в пространстве $S_{p(|z|)}(G)$.

§ 2. Пространство модулей непрерывности Φ

Определим вначале, что понимается под модулем непрерывности в данной работе.

Определение 3. Рассмотрим функцию $\mu(t) : (0, l] \to \mathbb{R}$. Будем называть функцию μ *модулем непрерывности*, если μ удовлетворяет следующим свойствам:

(1) $\mu(t) > 0$ для всех $t \in (0, l]$;

(2) существует $\lim\limits_{t\to+0} \mu(t) = 0$;

(3) функция $\mu(t)$ почти возрастает, то есть найдется такая постоянная $c_\mu > 0$, что $\mu(t_1) \leqslant c_\mu \cdot \mu(t_2)$ для всех $t_1, t_2 \in (0, l] : t_1 \leqslant t_2$;

(4) функция $\varphi(t) = \frac{\mu(t)}{t}$ почти убывает на $(0, l]$, то есть найдется такая постоянная $c_\varphi > 0$, что $\varphi(t_1) \geqslant c_\varphi \cdot \varphi(t_2)$ для всех $t_1, t_2 \in (0, l] : t_1 \leqslant t_2$.

С помощью модулей непрерывности можно выделить пространства функций следующим образом. Рассмотрим произвольный компакт K комплексной плоскости. Пусть также функция μ является модулем непрерывности.

Определение 4. Будем говорить, что функция $f : K \to \mathbb{C}$ принадлежит пространству $C^\mu(K)$, если

$$\sup_{\substack{z_1,z_2\in K\\ z_1\neq z_2}} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{\mu(|z_1 - z_2|)} < \infty.$$

Можно отметить следующие свойства пространств $C^\mu(K)$ (см., например, [8]):

(1) пространство $C^\mu(K)$ является линейным подпространством пространства $C(K)$;

(2) величина

$$||f||_{C^\mu(K)} := \max\left\{\max_{z\in K} |f(z)|, \sup_{\substack{z_1,z_2\in K\\ z_1\neq z_2}} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{\mu(|z_1 - z_2|)}\right\}$$

является нормой в пространстве $C^\mu(K)$;

(3) нормированное пространство $(C^\mu(K), ||\cdot||_{C^\mu(K)})$ является банаховым.

Рассмотрим далее, как вводилось пространство функций Φ в работе [8].

Определение 5. Будем говорить, что функция $\mu : (0; l_0] \to \mathbb{R}$ принадлежит классу Φ, если

(1) существует $\lim\limits_{t\to+0} \mu(t) = 0$;

(2) $\mu(t)$ почти возрастает;

(3) $\sup\limits_{t>0} \frac{1}{\mu(t)} \displaystyle\int_0^t \frac{\mu(t)}{t}\, dt = A_\mu < \infty$;

(4) $\sup\limits_{t>0} \frac{t}{\mu(t)} \displaystyle\int_t^{l_0} \frac{\mu(t)}{t^2}\, dt = B_\mu < \infty$.

В работе [8] были отмечены следующие свойства функций $\mu \in \Phi$:

(1) $\mu(t) \geqslant 0$ для всех $t \in (0, l_0]$;

(2) функция $\frac{\mu(t)}{t}$ почти убывает.

Таким образом, функции из пространства Φ являются модулями непрерывности в смысле определения 3. Примерами модулей непрерывности $\mu \in \Phi$ могут послужить функции $\mu(t) = t^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, или $\mu(t) = t^\alpha \ln^p \frac{1}{t}$, $\alpha \in (0,1)$, $p > 0$. Но пространство Φ не содержит все модули непрерывности, например модуль непрерывности $\mu(t) = t$ не находится в Φ.

Проверим одно свойство функций $\mu \in \Phi$, которое понадобится в параграфе 4.

Лемма 1. *Для любой функции $\mu \in \Phi$ можно найти такие числа $\alpha \in (0,1)$, $C_\alpha > 0$, что для всех $t \in (0, l_0]$ выполнено $\mu(t) \geqslant C_\alpha t^\alpha$.*

Доказательство. Так как $\mu \in \Phi$, то функция $\varphi(x) = \frac{\mu(x)}{x}$ почти убывает на $(0, l_0]$; следовательно, существует такое число $K > 0$, что для всех $x \in (0, l_0]$ выполнено

$$\frac{\mu(x)}{x} \geqslant K > K - \varepsilon = K_\varepsilon > 0,$$

где $\varepsilon \in (0, K)$ является произвольным фиксированным числом. Рассмотрим число $C_\varepsilon = \frac{B_\mu K}{\varepsilon}$, тогда для всех $x \in (0, l_0]$

$$B_\mu \cdot \frac{\mu(x)}{x} \leqslant C_\varepsilon \left(\frac{\mu(x)}{x} - K_\varepsilon \right).$$

Поскольку для всех $x \in (0, l_0]$

$$C_\varepsilon \left(\frac{\mu(x)}{x} - K_\varepsilon \right) \geqslant \int_x^{l_0} \frac{\mu(t)}{t^2}\, dt \geqslant \int_x^{l_0} \frac{K_\varepsilon}{t}\, dt = K_\varepsilon (\ln l_0 - \ln x).$$

то

$$\frac{\mu(x)}{x} \geqslant \frac{K_\varepsilon}{C_\varepsilon} (\ln l_0 - \ln x) + K_\varepsilon.$$

Отметим, что для всех $p \neq -1$ справедливо следующее равенство:

$$\int_x^l \frac{(\ln l - \ln t)^p}{t}\, dt = \frac{1}{p+1} (\ln l - \ln x)^{p+1}.$$

Тогда имеем, что

$$C_\varepsilon \left(\frac{\mu(x)}{x} - K_\varepsilon \right) \geqslant \int_x^{l_0} \left(\frac{K_\varepsilon}{C_\varepsilon} (\ln l_0 - \ln t) + K_\varepsilon \right) \frac{dt}{t} = \frac{K_\varepsilon}{2C_\varepsilon} (\ln l_0 - \ln x)^2 + K_\varepsilon (\ln l_0 - \ln x),$$

а значит,

$$\frac{\mu(x)}{x} \geqslant \frac{K_\varepsilon}{2C_\varepsilon^2} (\ln l_0 - \ln x)^2 + \frac{K_\varepsilon}{C_\varepsilon} (\ln l_0 - \ln x) + K_\varepsilon.$$

Действуя далее по индукции, получаем, что для всех $x \in (0, l_0]$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$, выполнено неравенство

$$\frac{\mu(x)}{x} \geqslant K_\varepsilon \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln l_0 - \ln x)^k}{k!(C_\varepsilon)^k}. \tag{2.1}$$

Заметим, что сумма, стоящая в правой части неравенства (2.1), является частичной суммой ряда $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln l_0 - \ln x)^k}{k!(C_\varepsilon)^k}$, который сходится равномерно для всех $x \in (0, l_0]$, поэтому в неравенстве (2.1) можно перейти к пределу при $n \to +\infty$. Тем самым получим, что для всех $x \in (0, l_0]$ выполнено неравенство

$$\frac{\mu(x)}{x} \geqslant K_\varepsilon \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln l_0 - \ln x)^k}{k!(C_\varepsilon)^k} = K_\varepsilon e^{\frac{1}{C_\varepsilon}(\ln l_0 - \ln x)} = K_\varepsilon l_0^{\frac{1}{C_\varepsilon}} x^{-\frac{1}{C_\varepsilon}}.$$

Обозначив $\alpha = 1 - \frac{1}{C_\varepsilon}$, $C_\alpha = K_\varepsilon l_0^{\frac{1}{C_\varepsilon}}$, получим, что для всех $x \in (0, l_0]$ выполнено неравенство $\mu(x) \geqslant C_\alpha x^\alpha$. □

Следствие 1. *Пусть K — компакт комплексной плоскости, $\mu \in \Phi$. Тогда найдется такое $\alpha \in (0,1)$, что $C^\alpha(K) \subset C^\mu(K)$.*

§ 3. Задача Дирихле для голоморфных функций в пространствах, порожденных модулем непрерывности

Отметим, что в работе [6] использовался следующий результат касательно задачи Дирихле для голоморфных функций (см., например, [9]).

Теорема 4. *Пусть вещественнозначная функция g задана на ∂G, где $G = \{z : |z| < 1\}$, и непрерывна по Гёльдеру с показателем λ, где $0 < \lambda < 1$. Тогда существует единственная голоморфная в G функция f, удовлетворяющая условиям*

$$\Re f = g(z), \quad z \in \partial G, \quad \Im f|_{z=z_0} = c,$$

где $z_0 \in \partial G$ — фиксированное число, причем f является непрерывной по Гёльдеру в $\overline{G}$ с тем же самым показателем λ.

Этот результат можно обобщить на случай модулей непрерывности $\mu \in \Phi$. Действительно, в [8] доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть вещественнозначная функция g задана на ∂G, где $G = \{z : |z| < 1\}$, и удовлетворяет условию*

$$|g(e^{i\theta_1}) - g(e^{i\theta_2})| \leqslant A \cdot \mu(|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|), \quad \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi), \tag{3.1}$$

где $\mu \in \Phi$. Тогда существует единственная голоморфная в G функция f, удовлетворяющая условиям

$$\Re f = g(z), \quad z \in \partial G, \quad \Im f|_{z=z_0} = c, \tag{3.2}$$

где $z_0 \in \partial G$ — фиксированное число, причем f удовлетворяет во всех точках $\overline{G}$ следующему неравенству:

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant C \cdot \mu(|z_1 - z_2|), \quad z_1, z_2 \in \overline{G}. \tag{3.3}$$

Отметим, что неравенство (3.1) фактически означает, что $g \in C^\mu(\partial G)$, при этом в качестве постоянной A, стоящей в правой части указанного неравенства, можно использовать $||g||_{C^\mu(\partial G)}$. Опять же неравенство (3.3) означает, что $f \in C^\mu(\overline{G})$. Из доказательства теоремы 5 следует, что $C = C_1 \cdot A = C_1 \cdot ||g||_{C^\mu(\partial G)}$. Таким образом, из неравенства (3.3) следует, что

$$||f||_{C^\mu(\overline{G})} \leqslant C_1 \cdot \left(||g||_{C^\mu(\partial G)} + |c|\right),$$

где постоянная C_1 зависит только от модуля непрерывности μ, а постоянная c взята из неравенства (3.2).

§ 4. Схема доказательства теоремы 3

Доказательство теоремы 3 проводится аналогично доказательству теоремы 1 (см. схему [6, с. 661–662]). Основное отличие появляется в пункте 3 схемы.

1. Будем искать решение $w = w(z)$ задачи (0.3)–(0.4) в виде

$$w(z) = f(z) \cdot \exp \omega(z), \tag{4.1}$$

где $f(z) \in H(G)\bigcap C(\overline{G})$, $\exp\omega(z) \in L_\infty(G)$. Подставляя (4.1) в уравнение (0.3), получаем уравнение для $\omega = \omega(z)$:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\overline{z}} + b(z)\cdot\frac{\overline{f(z)}}{f(z)}\cdot\frac{\overline{\exp\omega(z)}}{\exp\omega(z)} = 0, \quad z\in G. \tag{4.2}$$

Подбираем решение уравнения (4.2) так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\Im\omega\big|_{\partial G} = 0, \quad \Re\omega\big|_{z_0=1} = 0. \tag{4.3}$$

Из (4.2) получаем следующее представление (см. [1]):

$$\omega(z) = \widetilde{f}(\omega, f)(z) - T_G\left(b\cdot\frac{\overline{f}}{f}\cdot\frac{\overline{\exp\omega}}{\exp\omega}\right)(z), \quad z\in G, \tag{4.4}$$

где $\widetilde{f}$ — некоторая зависящая от ω и f голоморфная функция. Из свойств оператора T_G, приведенных в [1, 6], следует, что $T_G\left(b\cdot\frac{\overline{f}}{f}\cdot\frac{\overline{\exp\omega}}{\exp\omega}\right) \in C(\overline{G})\bigcap C^\lambda(\overline{G}\setminus\{0\})$ для любого $\lambda\in(0,1)$, причем

$$\left|\left|T_G\left(b\cdot\frac{\overline{f}}{f}\cdot\frac{\overline{\exp\omega}}{\exp\omega}\right)\right|\right|_{C(\overline{G})} \leqslant C_b, \qquad \left|\left|T_G\left(b\cdot\frac{\overline{f}}{f}\cdot\frac{\overline{\exp\omega}}{\exp\omega}\right)\right|\right|_{C^\lambda(\overline{G\setminus U_l})} \leqslant C_{b,l,\lambda},$$

где постоянные C_b и $C_{b,l,\lambda}$ не зависят от ω и f.

2. Подберем далее функцию $\widetilde{f}$ так, чтобы выполнялись условия (4.3), то есть

$$\begin{cases} \Im\widetilde{f}\Big|_{\partial G} = \Im T_G\left(b\cdot\frac{\overline{f}}{f}\cdot\frac{\overline{\exp\omega}}{\exp\omega}\right)\Big|_{\partial G}, \\ \Re\widetilde{f}\Big|_{z_0=1} = \Re T_G\left(b\cdot\frac{\overline{f}}{f}\cdot\frac{\overline{\exp\omega}}{\exp\omega}\right)\Big|_{z_0=1}. \end{cases} \tag{4.5}$$

Правая часть первого соотношения (4.5) является функцией класса $C^\lambda(\partial G)$, $0<\lambda<1$. Из работы [9] следует, что найдется единственная голоморфная в G функция $\widetilde{f}(z)$, которая удовлетворяет условиям (4.5). Кроме того, выполнена следующая оценка:

$$||\widetilde{f}||_{C^\lambda(\overline{G})} \leqslant C\cdot||\widetilde{f}||_{C^\lambda(\partial G)}.$$

Таким образом, правая часть (4.4), а значит и левая часть, то есть функция $\omega(z)$, для любых $f\in H(G)\bigcap C(\overline{G})$ и $\omega\in L_\infty(G)$ является функцией класса $C(\overline{G})\bigcap C^\lambda(\overline{G}\setminus\{0\})$. Далее, применяя к отображению

$$\omega \to F_1(f,\omega) := \widetilde{f}(\omega, f) - T_G\left(b\cdot\frac{\overline{f}}{f}\cdot\frac{\overline{\exp\omega}}{\exp\omega}\right)$$

теорему Тихонова о неподвижной точке, получаем, что для любой функции $f\in H(G)\bigcap C(\overline{G})$ существует единственная функция $\omega\in C(\overline{G})\bigcap C^\lambda(\overline{G}\setminus\{0\})$ со свойствами (4.2)–(4.3). Поскольку это верно для любого наперед заданного $0<\lambda<1$, то, по лемме 1, функция $\omega\in C(\overline{G})\bigcap C^\mu(\overline{G}\setminus\{0\})$. Таким образом, для любой функции $f\in H(G)\bigcap C(\overline{G})$ существует функция $w(z)$ вида (4.1), которая является в G решением уравнения (0.3).

3. Подберем такую голоморфную в G функцию $\widehat{f}\in C(\overline{G})$, чтобы для функции $w=\widehat{f}\cdot\exp\omega$, где ω — функция второго шага, выполнялись граничные условия (0.4). Для этого рассмотрим отображение

$$\omega \to \widehat{f},$$

где

$$\Re\widehat{f} = \Re(w\cdot\exp(-\omega)) = \exp(-\Re\omega)\cdot g(z) = g_1(z), \quad z\in\partial G,$$
$$\Im\widehat{f} = \exp(-\Re\omega(z_0=1))\cdot\Im w(z_0=1) = h.$$

Заметим, что $g_1(z) \in C^\mu(\partial G)$. Таким образом, подбираем такую голоморфную в G функцию $\widehat{f}$, чтобы

$$\Re\widehat{f}\Big|_{\partial G} = g_1(z), \quad \Im\widehat{f}\Big|_{z_0=1} = h.$$

По теореме 5, такая функция существует, причем единственная. Кроме того, $\widehat{f} \in C^\mu(\overline{G})$.

Для доказательства существования решения рассмотрим отображение

$$K : f \in H(G) \cap C(\overline{G}) \to \omega = K_1(f) \to \widehat{f} = K_2(\omega), \quad \widehat{f} = K(f),$$

где $\omega = K_1(f)$ — неподвижная точка для отображения $\omega = F_1(\omega, f)$, $\widehat{f}$ — решение приведенной выше задачи Дирихле. Применяя теорему Шаудера о неподвижной точке к отображению $\widehat{f} = K(f)$, как и в [6], получаем доказательство существования решения задачи (0.3)–(0.4).

4. Единственность решения задачи (0.3)–(0.4) в классе функций Соболева из $C(\overline{G})$ доказывается так же, как и в [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 512 с.
2. Михайлов Л.Г. Новый класс интегрируемых уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе, 1963. 183 с.
3. Усманов З.Д. Обобщенные системы Коши–Римана с сингулярной точкой. Душанбе, 1993. 245 с.
4. Тунгатаров А. К теории уравнений Карлемана–Векуа с сингулярной точкой // Математический сборник. 1993. Т. 184. № 3. С. 111–120.
5. Bliev N. Generalized analytic functions in fractional spaces. Longman, Harlow, 1997.
6. Reissig M., Timofeev A. Dirichlet problems for generalized Cauchy–Riemann systems with singular coefficients // Complex variables. 2005. Vol. 73. № 1–2. P. 653–672.
7. Тимофеев А.Ю. Краевая задача для обобщенного уравнения Коши–Римана в пространствах, описываемых модулем непрерывности // Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4. № 1. С. 146–152.
8. Ильчуков А.С., Тимофеев А.Ю. Задача Дирихле для голоморфных функций в пространствах функций, описываемых поведением модуля непрерывности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 1. С. 58–65.
9. Tutschke W. Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen. Klassische, funktionalanalytische und komplexe Methoden. Leipzig: Teubner-Texte zur Mathematik, 1978. 193 s.

Поступила в редакцию 01.04.2013

Ильчуков Александр Сергеевич, аспирант, Сыктывкарский государственный университет, 167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский проспект, 55.
E-mail: randomvenomspawn@gmail.com

A. S. Il'chukov

On behaviour of solution of boundary value problem for generalized Cauchy–Riemann equation

Keywords: generalized Cauchy–Riemann equation, Dirichlet problem, modulus of continuity.

Mathematical Subject Classifications: 30E25

The following boundary value problem for generalized Cauchy–Riemann equation in the unit disk $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ is considered in the paper: $\partial_{\overline{z}} w + b(z)\overline{w} = 0$, $\Re w = g$ on ∂G, $\Im w = h$ at the point $z_0 = 1$. The coefficient $b(z)$ is chosen from some set S_P, constructed by scales, with $S_P \subsetneq L_2$, $S_P \not\subset L_q$, $q > 2$. The boundary value g is chosen from the space, constructed by a modulus of continuity μ with some special properties. It is shown that the problem has unique solution $w = w(z)$ in the unit disk G with $w \in C(\overline{G})$. Moreover, outside the point $z = 0$ the behaviour of the solution $w(z)$ is defined by the same modulus of continuity μ; it means there is no "logarithmic effect" for the solution.

REFERENCES

1. Vekua I.N. *Obobshchennye analiticheskie funktsii* (Generalized analytic functions), Moscow: Nauka, 1988, 512 p.

2. Mikhailov L.G. *A new class of singular integral equations and its applications to differential equations with singular coefficients*, Berlin: Akademie-Verlag, 1970.

3. Usmanov Z.D. *Generalized Cauchy–Riemann systems with a singular point*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 85, Longman, Harlow, 1997.

4. Tungatarov A. On the theory of the Carleman–Vekua equation with a singular point, *Russ. Acad. Sci. Sb. Math.*, 1994, vol. 78, no. 2, pp. 357–365.

5. Bliev N. *Generalized analytic functions in fractional spaces*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 86, Longman, Harlow, 1997.

6. Reissig M., Timofeev A. Dirichlet problems for generalized Cauchy–Riemann systems with singular coefficients, *Complex variables*, 2005, vol. 73, no. 1–2, pp. 653–672.

7. Timofeev A.Yu. Boundary problem for the generalized Cauchy–Riemann equation in the spaces, described by the modulus of continuity, *Ufa Mathematical Journal*, 2012, vol. 4, no. 1, pp. 146–152.

8. Ilchukov A.S., Timofeev A.Yu. Dirichlet problem for holomorphic functions in spaces, described by modulus of continuity with predefined conditions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 1, pp. 58–65.

9. Tutschke W. *Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen. Klassische, funktionalanalytische und komplexe Methoden*, Leipzig: Teubner-Texte zur Mathematik, 1978. 193 s.

Received 01.04.2013

Il'chukov Aleksandr Sergeevich, post-graduate student, Syktyvkar State University, pr. Oktyabr'skii, 55, Syktyvkar, 167001, Russia.
E-mail: randomvenomspawn@gmail.com