

УДК 521.1

© *Б. П. Кондратьев, Н. Г. Трубицына, А. О. Опарин, П. О. Соловьёва***НЕОДНОРОДНЫЙ ШАР КАК МОДЕЛЬ ПЛАНЕТ.
ВНУТРЕННИЕ ТОЧКИ МАКСИМАЛЬНОГО ПРИТЯЖЕНИЯ**

Получен критерий существования точек перегиба для гравитационного потенциала внутри неоднородной сферической планеты. Согласно ему, точки перегиба (точки локального максимума силы притяжения) могут существовать только на таком расстоянии r от центра, где плотность вещества составляет две трети от средней плотности внутреннего шара с указанным радиусом. Критерий сформулирован и для осевого момента инерции планеты.

Ключевые слова: неоднородные шары, ньютоновский потенциал, момент инерции, точки перегиба потенциала, модели планет.

Введение. В теории потенциала всё, что касается гравитационных полей однородных и неоднородных шаров, изучено, казалось-бы, детально. Однако кое-что осталось вне поля зрения исследователей. Речь идет об изучении точек перегиба гравитационного потенциала внутри шаров. В данной статье мы получим простое условие для существования точек перегиба внутри неоднородного шара и убедимся в его эффективности на примерах.

1. Постановка задачи и вывод основного критерия. Дан неоднородный шар радиуса R с законом распределения плотности $\rho(r)$. Мы можем рассматривать два вклада в полный потенциал во внутренней точке r :

вклад от шара с тем же радиусом r , для которого пробная точка не является внутренней:

$$\varphi_1(r) = \frac{4\pi G}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr',$$

и вклад от сферической оболочки, для которой пробная точка не является внешней:

$$\varphi_2(r) = 4\pi G \int_r^R \rho(r') r' dr'.$$

В итоге полный потенциал во внутренней точке шара дается известной формулой (см., например, [1]):

$$\varphi(r) = 4\pi G \left(\frac{1}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \int_r^R \rho(r') r' dr' \right). \quad (1)$$

Далее понадобятся производные от потенциала (1): первая —

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{M(r)G}{r^2}, \quad (2)$$

где

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$$

есть масса шара внутри радиуса r , и вторая производная —

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} = \frac{2M(r)G}{r^3} - 4\pi G\rho(r). \quad (3)$$

Фактически (3) есть известное уравнение Пуассона

$$\varphi'' + \frac{2}{r}\varphi' = -4\pi G\rho(r). \quad (4)$$

Нас интересуют точки перегиба кривой $\varphi(r)$ внутри шара. Необходимым условием существования точки перегиба является равенство нулю второй производной:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} = 0. \quad (5)$$

Если функция $\varphi(r)$ — внутренний потенциал, тогда из уравнения Пуассона (4) следует

$$\frac{d\varphi}{dr} = -2\pi G\rho(r)r. \quad (6)$$

Имеем здесь два варианта. В первом требуем

$$\varphi'' = 0 \quad \text{при любом } 0 \leq r \leq R, \quad (7)$$

тогда следует взять $r\rho(r) = c = \text{const}$. Получаем неоднородный шар,

$$\rho(r) = \frac{c}{r}, \quad M(r) = 2\pi cr^2, \quad \varphi(r) = 2\pi Gc(2R - r), \quad \varphi'' = 0, \quad (8)$$

имеющий сингулярность плотности в центре, однако масса и потенциал данного шара остаются конечными. То, что потенциал имеет сингулярность, не является препятствием к применению модели: астрофизики часто помещают в центр моделей звездных систем черные дыры (вокруг которых образуются зоны хаоса в движении звезд). Существенно, что для потенциала внутри шара типа (8) нет точки перегиба (есть, однако, интересная особенность: притяжение на внутреннюю точку в таком шаре не зависит от расстояния пробной точки от его центра). Введем функцию $f(r)$ — отношение средней плотности внутри радиуса r к плотности на его границе

$$f = \frac{\overline{\rho(r)}}{\rho(r)}, \quad \overline{\rho(r)} = \frac{M(r)}{V}.$$

Важным свойством шара с характеристиками (8) является то, что для него

$$f = \frac{3}{2}. \quad (9)$$

Наперед заметим, что постоянными функциями f обладают также однородный шар и шар с законом плотности $\rho = \frac{c}{r^2}$ (рассмотрим их ниже).

Но, кроме (7), есть второй вариант: соотношение (6) можно рассматривать еще и как уравнение для отдельной точки r , такой, в которой вторая производная изменяет свой знак:

$$\varphi'' = 0 \quad \text{в отдельной точке } r.$$

С учетом (2) уравнение (6) примет вид

$$\frac{M(r)G}{r^2} = 2\pi G\rho(r)r,$$

что дает для массы промежуточного шара соотношение

$$M(r) = 2\pi\rho(r)r^3. \quad (10)$$

Тогда, с учетом выражения $M(r)$ из (10), имеем критерий

$$\overline{\rho(r)} = \frac{2\pi\rho(r)r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{2}\rho(r).$$

Таким образом, для неоднородных шаров установлено: *не считая точек разрыва плотности, точки перегиба для потенциала $\varphi(r)$ (а это точки локального максимума силы*

притяжения) могут существовать только на таком расстоянии r от центра, где плотность $\rho(r)$ составляет две трети от средней плотности внутреннего шара с указанным радиусом:

$$\rho(r) = \frac{2}{3}\overline{\rho(r)}, \quad \text{или} \quad f(r) = \frac{3}{2}. \quad (11)$$

В другом виде для нахождения точек перегиба имеем из (11) интегральное уравнение

$$\int_0^r \rho(r') r'^2 dr' = \frac{1}{2} \rho(r) r^3.$$

2. Однородный шар. Однородный шар — особый случай, он не описывается уравнением (11). Для него внутренний потенциал имеет вид [1]

$$\varphi(r) = \frac{2}{3} \pi G \rho (3R^2 - r^2),$$

и поэтому вторая производная внутри шара всюду отрицательна,

$$\varphi'' = -\frac{4}{3} \pi G \rho < 0,$$

и в нуль нигде не обращается. Поэтому для однородного шара точки перегиба существуют лишь на его поверхности, то есть там, где происходит скачок вторых производных. Действительно,

$$\begin{aligned} \varphi'' &= -4\pi G \rho \quad \text{при} \quad r \leq R, \\ \varphi'' &= \frac{2M(R)G}{r^3} > 0 \quad \text{при} \quad r \geq R. \end{aligned}$$

Сила притяжения для однородного шара имеет максимум на его поверхности, а введенная выше функция $f = 1$.

3. Особый случай неоднородного шара с законом $\rho = \frac{c}{r^2}$. Замечательно, что в шаре с законом плотности

$$\rho = \frac{c}{r^2}, \quad M(r) = 4\pi cr, \quad \varphi(r) = 4\pi Gc \ln \frac{eR}{r}, \quad f = 3$$

функция также оказывается постоянной и равной $f = 3$.

4. Проверка критерия $\rho(r) = \frac{2}{3}\overline{\rho(r)}$ на неоднородных шарах с непрерывным распределением плотности. Прежде всего, в слабо неоднородных моделях точек перегиба потенциала может и не быть. Такой оказывается, например, следующая известная модель.

4.1. Модель Лежандра–Лапласа с законом плотности

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \frac{\sin x}{x}, \quad x = \frac{r}{R}, \\ f &= 3 \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x}, \quad \varphi = 4\pi G \rho_0 R^2 \left(\frac{\sin x}{x} - \cos 1 \right). \end{aligned}$$

Здесь функция f не доходит до значения $\frac{3}{2}$, и поэтому точек перегиба в шаре не существует. Но вот примеры с точками перегиба.

4.2. Шар.

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right), \quad M(r) = \frac{4}{3} \pi \rho_0 r^3 \left(1 - \frac{3}{4} \frac{r}{R} \right), \quad \varphi(r) = \frac{2}{3} \pi G \rho_0 \left(R^2 - r^2 + \frac{r^3}{2R} \right).$$

Имеем, согласно условию (11), уравнение

$$\left(1 - \frac{r}{R} \right) r^3 = \frac{2}{3} r^3 \left(1 - \frac{3}{4} \frac{r}{R} \right),$$

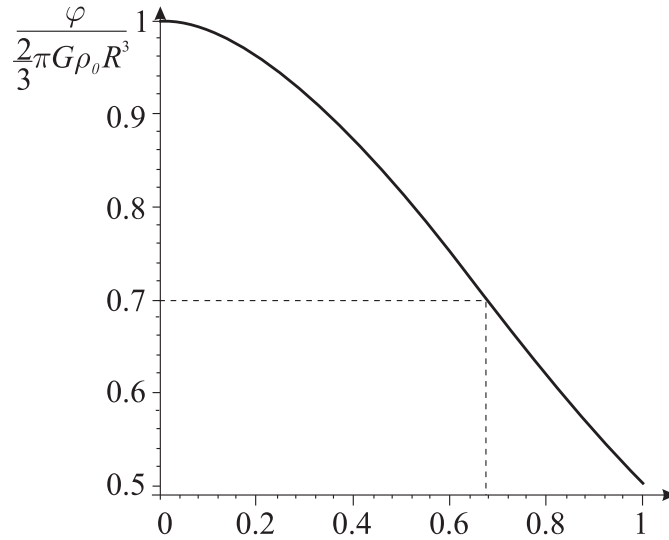


Рис. 1.

решение которого

$$r = \frac{2}{3}R. \tag{12}$$

Подтверждение того, что (12) и есть точка перегиба, мы видим на рисунке 2. Внутри данного шара сила притяжения (по модулю) растет в интервале $0 \leq r \leq \frac{2}{3}R$ и убывает в интервале $\frac{2}{3}R \leq r \leq R$.

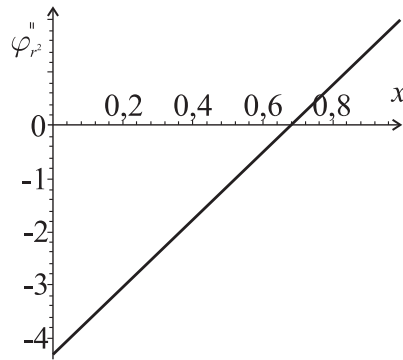


Рис. 2.

4.3. Шар Шустера (шаровые звездные скопления).

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \rho_0 \left/ \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right)^{5/2} \right., \\ M(r) &= \frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3 (r/R)^3 \left/ \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right)^{3/2} \right., \\ \varphi_{\text{внутр}}(r) &= \frac{4}{3}\pi G \rho_0 R^2 \left[1 / \sqrt{1 + r^2/R^2} - 1 / (2\sqrt{2}) \right]. \end{aligned} \tag{13}$$

Условие (11) для шара (13) дает

$$1 + x^2 = \frac{3}{2}, \quad \left(x = \frac{r}{R} \right),$$

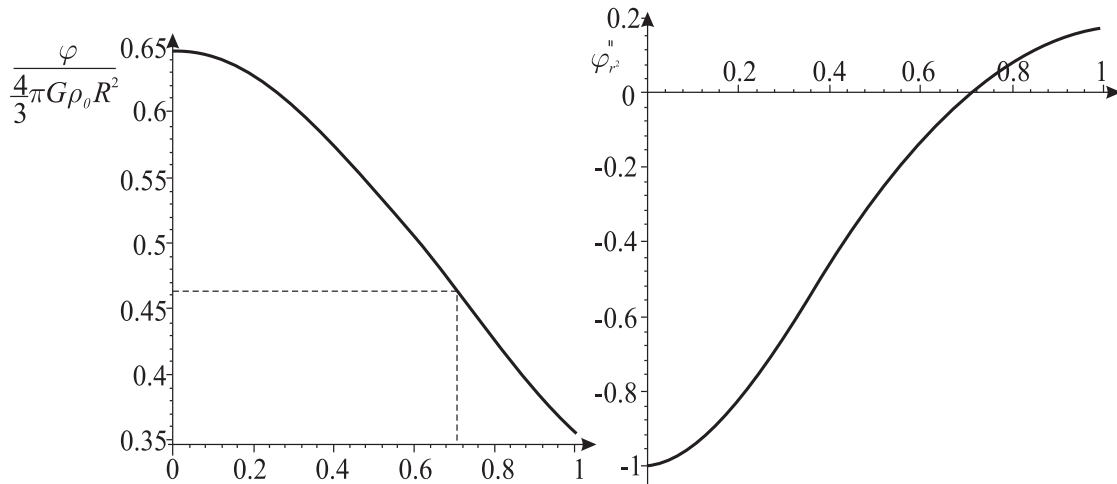


Рис. 3.

то есть внутренняя точка перегиба (и точка максимума силы притяжения) равна

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707107. \quad (14)$$

Результат (14) подтверждается прямым расчетом на рисунке 3.

4.4. Шар с плотностью (хорошее приближение для планет земной группы).

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \rho_0 \left(1 - \gamma \frac{r^2}{R^2}\right), \quad M(r) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3 x^3 \left(1 - \frac{3}{5}\gamma x^2\right); \quad x \equiv \frac{r}{R}, \\ f(x) &= \frac{1 - \frac{3}{5}\gamma x^2}{1 - \gamma x^2}, \quad I(x) = \frac{8}{3}\pi\rho_0 R^5 \left(\frac{x^5}{5} - \frac{\gamma}{7}x^7\right), \\ \varphi_{\text{внутр}}(r) &= 2\pi G\rho_0 R^2 \left[1 - \frac{\gamma}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{\gamma}{10}x^4\right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Как легко видеть, для существования точек перегиба необходимо потребовать $\gamma \geq \frac{5}{9}$. Эта модель будет использована ниже при моделировании Земли.

5. Шар, состоящий из ядра и оболочки. Важно, что закон «3/2» действует и тогда, когда шар состоит из оболочек конечной толщины.

5.1. Однородное ядро — однородная оболочка разной плотности. Для такого шара полная масса

$$M = \frac{4}{3}\pi \{(\rho_1 - \rho_2) R_1^3 + \rho_2 R_2^3\}.$$

Потенциал всей модели на точку в оболочке шара:

$$\varphi(r) = 2\pi G\rho_1 R_1^2 \left\{ \frac{2R_1}{3r} (1 - n) + n \left(\frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{r^2}{3R_1^2} \right) \right\}.$$

Такой шар имеет две внутренние точки перегиба: одна — на переходе из однородного шара в однородную оболочку; вторая же точка перегиба, согласно критерию (11), существует при условии

$$\frac{R_1^3 \rho_1 + \rho_2 (r^3 - R_1^3)}{\rho_2 r^3} = \frac{3}{2}. \quad (16)$$

Так, при $n = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 0,5$, $R_1 = 3$, $R_2 = 5$ для точки перегиба из уравнения (16) находим значение

$$x = \frac{r}{R_1} = 2^{1/3}, \quad r \approx 3,78,$$

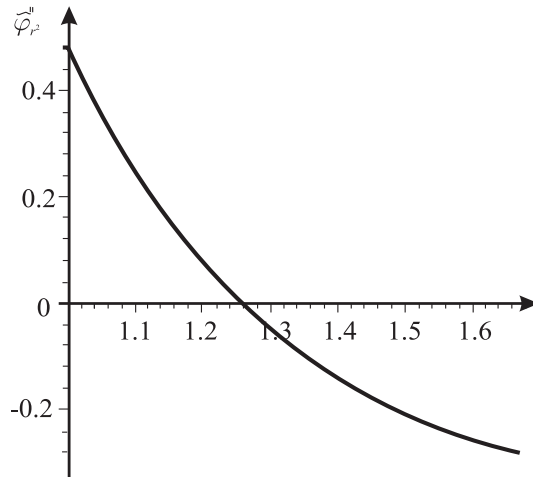


Рис. 4.

что совпадает с положением этой точки на рисунке 4.

5.2. Шар (однородное ядро, однородная оболочка) — простая эффективная модель Земли. Берем для него [2]

$$R_1 = 0.548R_2, \quad \rho_1 = 11, \quad \rho_2 = 4.437, \quad n = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Полный радиус $R_2 = 6371$ км, полная масса $M = 5.98 \cdot 10^{24}$ кг — как у реальной Земли, момент инерции модели $I \approx 0.345MR_2^2$ также близок к земному $I \approx 0.331MR_2^2$.

$$\frac{\varphi}{2\pi G\rho_1 R_1^2} = 1 - \frac{x^2}{3} + n \left(\frac{R_2^2}{R_1^2} - 1 \right), \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$\frac{\varphi}{2\pi G\rho_1 R_1^2} = \frac{2}{3} \frac{1-n}{x} + n \left(\frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{x^2}{3} \right).$$

Таким образом, согласно критерию (9), точка перегиба на рисунке 5 существует.

5.3. Модель: неоднородное ядро — однородная оболочка. Она описывается формулами

$$\rho = \rho_0 (1 - \gamma x^2), \quad 0 \leq x = \frac{r}{R_1} \leq 1;$$

$$\rho = \rho_2 = \text{const}, \quad 1 \leq x \leq \frac{R_2}{R_1}; \tag{17}$$

$$R_1 = 4, \quad R_2 = 7, \quad n = \frac{\rho_0}{\rho_2} = 5, \quad \gamma = 1 - 1/n.$$

График плотности и функция $f(x)$ показаны на рисунке 6.

В таком шаре нет разрыва плотности, но есть *две* точки перегиба потенциала!

5.4. Модель Земли с законом плотности по Буллину. Аппроксимация плотности по модели Буллена [3] создана с помощью сплайнов. Результаты показаны на рисунке 7.

Согласно критерию «2/3», в модели Буллена внутри Земли *есть две точки перегиба потенциала* (два локальных максимума силы тяжести): на глубинах $h = 734.75$ км и $h = 1564.58$ км.

6. Критерий для момента инерции планеты. Почти для всех планет Солнечной системы и многих спутников известен нормированный момент инерции относительно оси вращения I/MR^2 . Покажем, что критерий (11) для существования точки перегиба потенциала можно сформулировать и для осевого момента инерции планеты.

Для этого выразим момент инерции относительно оси через момент инерции относительно центра шара [4]:

$$I = \frac{8}{3}\pi \int_0^R \rho(r) r^4 dr. \tag{18}$$

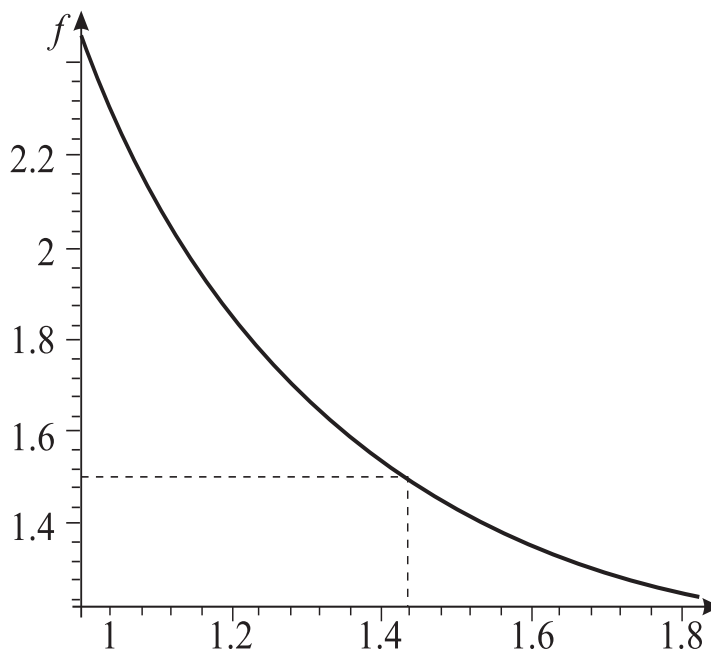


Рис. 5.

Интегрируя (18) по частям, где

$$u = r^2, \quad v = \int_0^r r^2 \rho(r) dr,$$

и используя вспомогательное выражение для массы подсистемы

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r) r^2 dr = \frac{4}{3}\pi r^3 \overline{\rho(r)},$$

получим

$$\frac{8}{3}\pi \int_0^R r^4 \overline{\rho(r)} dr = \frac{8}{3}\pi \int_0^R r^4 \rho(r) f(r) dr. \quad (19)$$

Здесь введена уже известная нам функция

$$\frac{\overline{\rho(r)}}{\rho(r)} = f(r).$$

Вновь интегрируя по частям выражение (19), где

$$u = f(r), \quad v = \int_0^r r^4 \rho(r) dr,$$

получим

$$I = \frac{2}{3} \left\{ MR^2 - f(R) I(R) + \int_0^R I(r) df \right\},$$

или

$$I \left(1 + \frac{2}{3} f(R) \right) = \frac{2}{3} MR^2 + \frac{2}{3} \int_0^R I(r) \frac{df}{dr} dr. \quad (20)$$

Под знаком интеграла в правой части (20) стоит момент инерции сферической подсистемы

$$I(r) = \frac{8}{3}\pi \int_0^r \rho(r) r^4 dr.$$

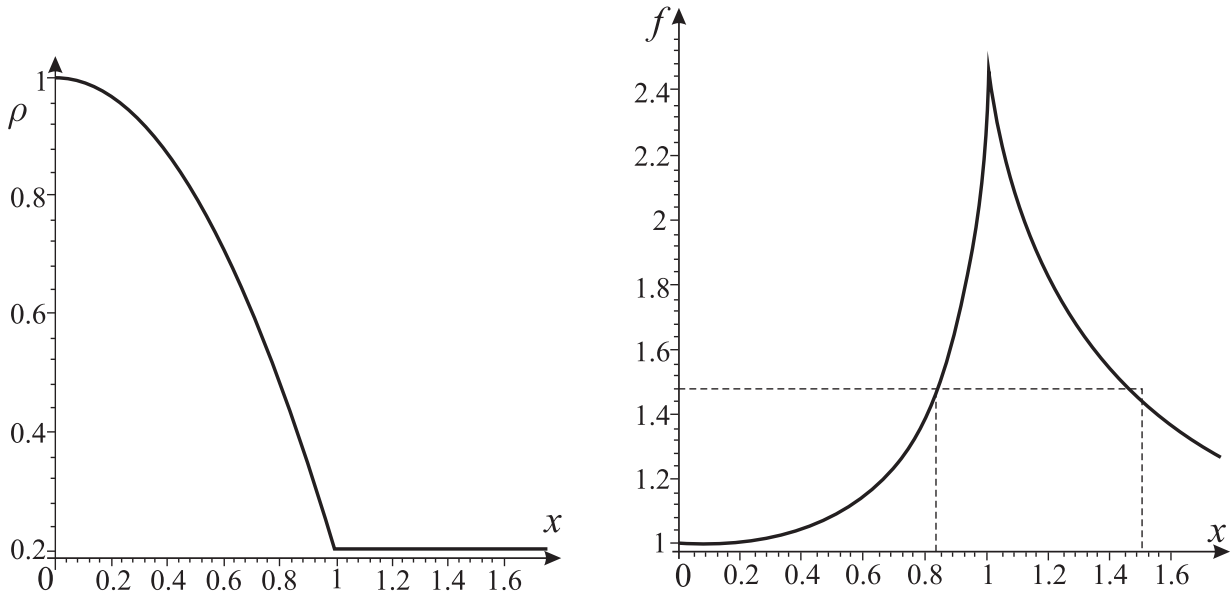


Рис. 6.

Всё сводится к оценке указанного интеграла

$$Int = \frac{2}{3} \int_0^R I(r) \frac{df}{dr} dr,$$

играющего роль малой поправки к основному члену $\frac{2}{3}MR^2$ в правой части (20). Для его оценки достаточно взять простой закон плотности (15) для планет. Тогда, используя выражения для $f(x)$ и $I(x)$ из (17), имеем определенный интеграл:

$$\frac{Int}{MR^2} = \frac{4}{3(1 - \frac{3}{5}\gamma)} \int_0^1 \left(\frac{x^5}{5} - \frac{\gamma}{7}x^7 \right) \frac{d}{dx} \frac{1 - \frac{3}{5}\gamma x^2}{1 - \gamma x^2} dx. \tag{21}$$

Численное интегрирование (21) при требуемом значении параметра γ

$$f(1) = \frac{3}{2} \rightarrow \gamma = \frac{5}{9}$$

дает

$$\frac{Int}{MR^2} = \frac{2}{35}.$$

В итоге значение критического момента инерции планеты оказывается равным

$$\frac{I_{cr}}{MR^2} \approx 0.362.$$

Поэтому аналог критерия (11)

$$\rho(r) = \frac{2}{3}\overline{\rho(r)}$$

такой: если у планеты с гладким распределением плотности момент инерции превышает критическое значение,

$$\frac{I}{MR^2} > 0.362,$$

то внутри такой планеты не существует точки перегиба потенциала. Если же у планеты момент инерции оказывается меньше критического,

$$\frac{I}{MR^2} \leq 0.362, \tag{22}$$

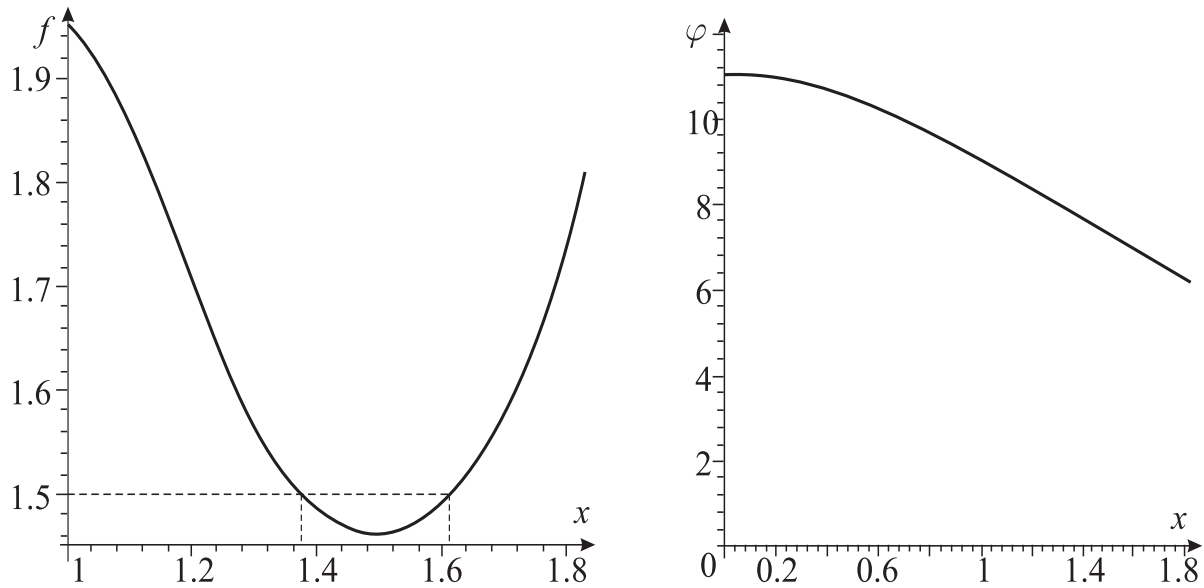


Рис. 7.

точка перегиба потенциала (точка максимума силы притяжения к центру) в ней существует.

Данный критерий можно приложить к планетам и спутникам.

| | Средняя плотность, г/см ³ | Отношение средней плотности к плоскости коры | Момент инерции (в единицах MR^2) |
|----------|---|---|--|
| Меркурий | 0,52 | | 0,33 |
| Венера | 5,248 | $\frac{5,248}{2,88} = 1,822$ | 0,334 |
| Земля | 5,517 | $\frac{5,517}{2,91} = 1,896$ | 0,331 |
| Марс | 3,933 | $\frac{3,933}{2,86} = 1,375$ | 0,366 |
| Луна | 3,344 | $\frac{3,344}{2,85} = 1,173$ | 0,394 |
| Фобос | 1,86 | | 0,4 |
| Юпитер | 1,33 | | 0,254 |
| Сатурн | 0,69 | | 0,22 |
| Уран | 1,29 | | 0,225 |
| Нептун | 1,67 | | 0,290 |
| Солнце | | | 0,22 |
| Титан | 1,88 | | 0,342 |

Таблица 1. Осевые моменты инерции некоторых небесных тел

Как видим, внутри Луны и Марса точка максимума силы притяжения отсутствует. Из четырех Галилеевских спутников Юпитера спутник Ио также, по-видимому, не имеет максимума силы притяжения в своих недрах.

7. Обсуждение. В работе дан строгий вывод критерия существования точек перегиба гравитационного потенциала внутри неоднородной сферической планеты. Установлено, что точки перегиба (точки локального максимума силы притяжения) могут существовать только на таком расстоянии от центра, где плотность составляет две трети от средней плотности внутреннего шара с указанным радиусом. Критерий существования точки перегиба потенциала сформулирован также и для осевого момента инерции планеты. Рассмотрен ряд примеров для проверки данного критерия.

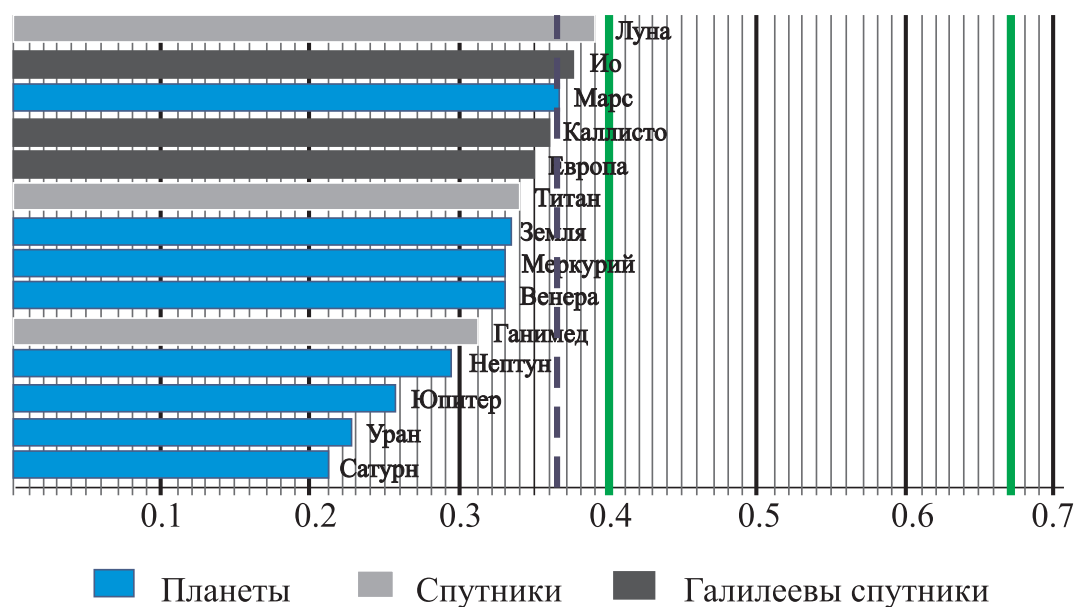


Рис. 8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубошин Г.Н. Теория притяжения. М.: Физматгиз, 1961. 288 с.
2. Снайдер Р. Двухплотностная модель Земного шара. М.: Мир, 1988. 160 с.
3. Буллен К.Е. Плотность Земли. М.: Мир, 1978. 245 с.
4. Кондратьев Б.П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир, 2007. 512 с.

Поступила в редакцию 01.02.2013

Кондратьев Борис Петрович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра астрономии и механики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1; Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, 196140, Россия, С.-Петербург, Пулковское шоссе, 65/1.

E-mail: kond@uni.udm.ru

Трубицына Наталья Геннадьевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра астрономии и механики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

E-mail: trnat@list.ru

Опарин Алексей Олегович, студент, кафедра астрономии и механики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

E-mail: kond@uni.udm.ru

Соловьёва Полина Олеговна, студент, кафедра астрономии и механики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

E-mail: kond@uni.udm.ru

B. P. Kondratyev, N. G. Trubitsyna, A. O. Oparin, P. O. Solovyeva

A non-homogeneous sphere as a model of the planets. Internal points of maximum gravity

Keywords: inhomogeneous spheres, Newton's potential, moment of inertia, inflection points of potential, model of the planets.

Mathematical Subject Classifications: 70F15

We obtained the criterion for the existence of gravitational potential inflection points within a inhomogeneous

spherical planet. According to the criterion obtained, inflection points (the point of local maximum gravity) can exist only at such a distance r from the center, at which the matter density is two-thirds of the average density of the inner ball with a specified radius. The criterion is defined for the axial moment of the planet inertia too.

REFERENCES

1. Duboshin G.N. *Teoriya prityazheniya* (Theory of gravity), Moscow: Fizmatgiz, 1961, 288 p.
2. Snayder P. *Dvuhplotnostnaya model Zemnogo shara* (Two density model of the Earth), Moscow: Mir, 1988, 160 p.
3. Bullen K.E. *Plotnost' Zemli* (The density of the Earth), Moscow: Mir, 1978, 245 p.
4. Kondratyev B. P. *Teoriya potentsiala. Nove metody i zadachi s resheniyami* (Potential theory. New methods and problems with solutions), Moscow: Mir, 2007, 512 p.

Received 01.02.2013

Kondratyev Boris Petrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia; Pulkovo Observatory of the Russian Academy of Sciences, Pulkovskoe shosse, 65/1, St. Petersburg, 196140, Russia.

E-mail: kond@uni.udm.ru

Trubitsyna Natalya Gennadyevna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

E-mail: trnat@list.ru

Oparin Aleksei Olegovich, student, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

E-mail: kond@uni.udm.ru

Solovyeva Polina Olegovna, student, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

E-mail: kond@uni.udm.ru