

УДК 521.19

© В. В. Пашкевич

ПОСТРОЕНИЕ ДОЛГОСРОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О ВРАЩЕНИИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОЙ ЗЕМЛИ¹

Основной целью данной работы является построение новых высокоточных рядов вращения абсолютно твердой Земли, которые являются динамически согласованными с эфемеридой DE406/LE406. Динамика вращательного движения абсолютно твердой Земли изучается численно с помощью параметров Родрига–Гамильтона на 2000-летнем и 6000-летнем интервалах времени. Все вычисления в данном исследовании производятся с четверной точностью. Орбитальное движение возмущающих небесных тел определяется эфемеридой DE406/LE406. Результаты численного решения рассматриваемой проблемы сравниваются с полуаналитическими решениями задачи о вращении абсолютно твердой Земли SMART97 и S9000 соответственно относительно неподвижной эклиптики эпохи J2000. Начальные условия для численного интегрирования берутся из соответствующих полуаналитических решений. Исследование невязок сравнения между высокоточными численными решениями задачи о вращении абсолютно твердой Земли и полуаналитическими решениями этой задачи производятся методами наименьших квадратов и спектрального анализа. Задача решалась с учетом наиболее существенных из релятивистских возмущений во вращательном движении Земли — геодезических возмущений. В результате построены новые долгосрочные решения вращения абсолютно твердой Земли RERS2012 (Rigid Earth Rotation Series 2012), динамически согласованные с эфемеридой DE406/LE406 на 2000-летнем и 6000-летнем интервалах времени.

Ключевые слова: численное интегрирование, эфемерида, вращение абсолютно твердой Земли.

Введение

В предыдущей работе [4] были построены высокоточные ряды вращения абсолютно твердой Земли S9000, динамически адекватные эфемериде DE404/LE404 на 2000-летнем интервале времени. Основной целью данного исследования является построение новых высокоточных рядов вращения абсолютно твердой Земли RERS2012A/B и RERS2012C/D, динамически адекватных эфемериде DE406/LE406 [5], на 2000-летнем и 6000-летнем интервалах времени соответственно. В настоящем исследовании разработана итерационная схема для исследования проблемы вращения Земли. В результате ее применения были построены новые высокоточные численные и полуаналитические решения вращения Земли на интервале времени в 2000 и 6000 лет. Задача решалась с учетом наиболее существенных из релятивистских возмущений во вращательном движении Земли — геодезических возмущений. Все вычисления в данном исследовании производятся с четверной точностью.

§ 1. Математическая модель задачи

Численное решение задачи получается из решения дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода для вращения абсолютно твердой Земли относительно неподвижной эклиптики и равноденствия эпохи J2000:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_i} - \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0. \quad (1)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках сотрудничества между Польской и Российской академиями наук: тема № 34.

Здесь и далее точка над буквами означает дифференцирование по времени. Функция Лагранжа в (1) имеет вид

$$L = T + U, \quad (2)$$

где U — силовая функция гравитационного взаимодействия Земли с возмущающими телами (Луной, Солнцем и большими планетами). Силовая функция U разлагается по сферическим гармоникам и учитывает только члены с коэффициентами C_{j0} для $j = 2, \dots, 5$, C_{22}, C_{3k}, S_{3k} для $k = 1, 2, 3$ и C_{41}, S_{41} . Орбитальное движение возмущающих тел определяется эфемеридой DE406/LE406. Кинетическая энергия вращательного движения абсолютно твердой Земли, учитывающая существенную часть из релятивистских возмущений во вращательном движении Земли — геодезического вращения [3], определяется следующим образом:

$$T = \frac{1}{2}(A\omega_{*1}^2 + B\omega_{*2}^2 + C\omega_{*3}^2), \quad (3)$$

где $\vec{\omega}_* = \vec{\omega} + \vec{\sigma}$ является релятивистским вектором угловой скорости вращения Земли, включающим геодезическое вращение; $\vec{\omega}$ является ньютоновым вектором угловой скорости вращения Земли; A, B и C — главные моменты инерции Земли; ω_{*1}, ω_{*2} и ω_{*3} — проекции релятивистского вектора угловой скорости на оси главных моментов инерции. Вектор угловой скорости геодезического вращения Земли, который является наиболее существенным релятивистским компонентом вращательного движения Земли вокруг собственного центра масс, определяется следующим выражением:

$$\vec{\sigma} = \sum_{j \neq \oplus} \frac{Gm_j}{c^2 |\vec{R}_j - \vec{R}_{\oplus}|^3} \left\{ (2\dot{\vec{R}}_j - \frac{3}{2}\dot{\vec{R}}_{\oplus}) \times (\vec{R}_j - \vec{R}_{\oplus}) \right\}, \quad (4)$$

где c — скорость света в вакууме, G — гравитационная постоянная, m_j — масса j -го возмущающего тела, $\vec{R}_{\oplus}, \dot{\vec{R}}_{\oplus}, \vec{R}_j, \dot{\vec{R}}_j$ — барицентрические векторы положений и скоростей Земли и j -го возмущающего тела соответственно. Символ \times обозначает векторное произведение, индекс \oplus относится к обозначению Земли и индекс j относится к обозначению Луны, Солнца и больших планет. В качестве переменных, описывающих вращение Земли вокруг собственного центра масс, в (1) используются четыре параметра Родрига–Гамильтона, связанных с углами Эйлера ψ, θ и ϕ следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \phi}{2}, & \lambda_1 &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \phi}{2}, \\ \lambda_2 &= \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \phi}{2}, & \lambda_3 &= \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \phi}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Параметры Родрига–Гамильтона — ограниченные переменные. Это очень важно для численного решения задачи. Заметим, что дифференциальные уравнения вращательного движения Земли в углах Эйлера содержат аналитическую особенность вида $\sin^{-1} \theta$, ограничивающую выбор координатной системы. Использование параметров Родрига–Гамильтона в качестве переменных задачи позволяет устранить эту особенность. Дифференциальные уравнения вращательного движения Земли в параметрах Родрига–Гамильтона были нами получены из уравнений Лагранжа второго рода. Их вид, как и более подробное описание математической модели проблемы, приводится в нашей статье [3].

Для численного решения задачи применяется метод высокоточного численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений НИРПИ [1], основанный на равномерной чебышевской интерполяции правых частей дифференциальных уравнений. Интегрирование выполнялось с постоянным шагом, равным 1 суткам, от начальной эпохи 1 января 2000 года (JD=2451545.0). В результате применения итерационной схемы численное решение строится заново для каждой новой итерации. На первой итерации итерационного алгоритма начальные условия численного интегрирования берутся из полуаналитического решения SMART97 [2]

для построения рядов RERS2012A/C или S9000 [4] для построения рядов RERS2012B/D. Для каждой последующей итерации берутся новые начальные условия из нового, построенного на предыдущей итерации, полуаналитического решения, и производится новое численное интегрирование.

§ 2. Итеративный алгоритм

При построении полуаналитических решений для упрощения решения дифференциальных уравнений, как правило, пренебрегают некоторыми составляющими их членами. Это обстоятельство ограничивает интервал применения этих решений. Численные решения являются более точными, так как при их построении численно решаются более полные дифференциальные уравнения. Таким образом, увеличивается интервал их применения. Точность численных решений зависит от точности начальных условий численного интегрирования, которые обычно берутся из полуаналитических решений.

В настоящем исследовании разработан итеративный алгоритм, уточняющий и согласующий численные и полуаналитические решения.

1. Начальные условия численного интегрирования вычисляются из полуаналитического решения задачи о вращении абсолютно твердой Земли (S9000 или SMART97). На всем исследуемом интервале времени с шагом в 1 сутки в углах Эйлера производится сравнение численного решения с исходным полуаналитическим решением.

Выражения для невязок сравнения между численным и полуаналитическим решениями задачи о вращении абсолютно твердой Земли имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\psi &= \sum_{k=0}^6 \psi_k t^k + \sum_j \sum_{k=0}^4 [\psi_{Sjk} \sin(\nu_{j0} + \nu_{j1}t) + \psi_{Cjk} \cos(\nu_{j0} + \nu_{j1}t)] t^k \\ \Delta\theta &= \sum_{k=0}^6 \theta_k t^k + \sum_j \sum_{k=0}^4 [\theta_{Sjk} \sin(\nu_{j0} + \nu_{j1}t) + \theta_{Cjk} \cos(\nu_{j0} + \nu_{j1}t)] t^k \\ \Delta\phi &= \sum_{k=0}^6 \phi_k t^k + \sum_j \sum_{k=0}^4 [\phi_{Sjk} \sin(\nu_{j0} + \nu_{j1}t) + \phi_{Cjk} \cos(\nu_{j0} + \nu_{j1}t)] t^k \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где ψ — угол долготы восходящего узла динамического экватора Земли на неподвижной эклиптике эпохи J2000; θ — угол наклона динамического экватора Земли к неподвижной эклиптике эпохи J2000; ϕ — угол собственного вращения Земли между восходящим узлом динамического экватора Земли и главной осью минимального момента инерции Земли; ν_{j0}, ν_{j1} — фазы и частоты соответствующих полуаналитических решений соответственно; t — время в юлианских днях; ψ_k, θ_k, ϕ_k — коэффициенты систематических членов; $\psi_{Sjk}, \theta_{Sjk}, \phi_{Sjk}, \psi_{Cjk}, \theta_{Cjk}, \phi_{Cjk}$ — коэффициенты периодических и пуассоновых членов.

2. Исследование невязок сравнения производится методами наименьших квадратов и спектрального анализа [4]. Совокупность частот теории вращения Земли (S9000 или SMART97) используются без изменений. В новых рядах вращения абсолютно твердой Земли только уточняются коэффициенты систематических, периодических и пуассоновых членов. Вычисляются члены нового (i -го) ряда, равные сумме вычисленных из невязок сравнения коэффициентов систематических, периодических и пуассоновых членов и коэффициентов соответствующих членов ($i - 1$ -го) ряда:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{RERS2012Xi} &= \Delta\psi_{i-1} + \psi_{RERS2012Xi-1} \\ \theta_{RERS2012Xi} &= \Delta\theta_{i-1} + \theta_{RERS2012Xi-1} \\ \phi_{RERS2012Xi} &= \Delta\phi_{i-1} + \phi_{RERS2012Xi-1} \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Систематические, периодические и пуассоновые члены представляют новые высокоточные ряды вращения абсолютно твердой Земли RERS2012Xi (где i — номер итерации, $X = A, B, C, D$ — индекс рядов). Ряды с индексами A и C строятся из рядов SMART97 на 2000-летнем и 6000-летнем интервалах времени соответственно. Ряды с индексами B и D строятся из рядов S9000 и SMART97 на 2000-летнем и 6000-летнем интервалах времени соответственно.

3. Численное решение задачи о вращении абсолютно твердой Земли строится заново с новыми начальными условиями, которые вычисляются из RERS2012Xi.

4. Шаги 2 и 3 повторяются до получения наилучших результатов невязок сравнения между новым численным решением и новыми рядами RERS2012Xi.

§ 3. Результаты

Предыдущее исследование [4] вращения абсолютно твердой Земли проводилось на Parsytec CSe20 компьютере с использованием эфемериды DE404/LE404 на 2000-летнем интервале времени. В результате исследований невязок сравнения между численным и полуаналитическим SMART97 решениями задачи о вращении абсолютно твердой Земли были получены новые высокоточные ряды S9000. На рисунке 1 изображено поведение невязок сравнения между численным и полуаналитическим SMART97 (слева) и S9000 (справа) решениями задачи о вращении абсолютно твердой Земли после устранения систематического хода в углах Эйлера.

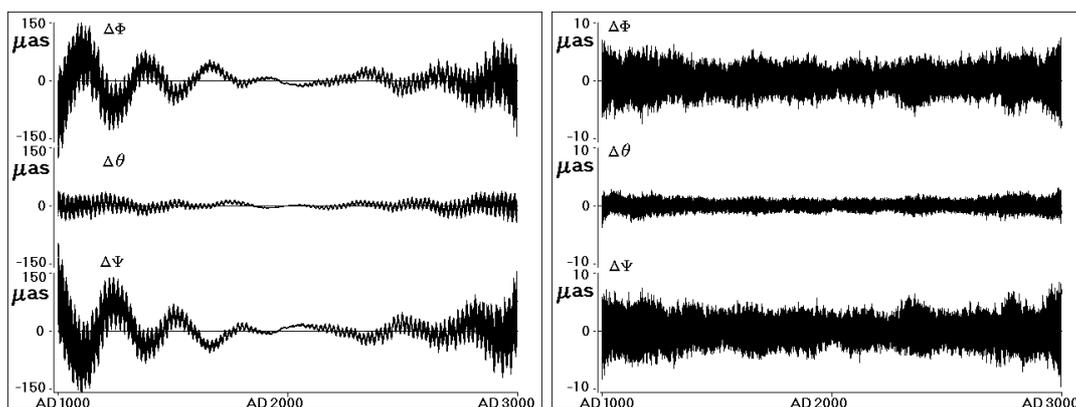


Рис. 1. Поведение невязок сравнения между численным и полуаналитическим SMART97 (слева) и S9000 (справа) решениями с использованием эфемериды DE404/LE404 после устранения систематического хода на 2000-летнем интервале времени

Данное исследование проводилось с использованием DE406/LE406 эфемериды на 4-х ядерном компьютере. В начале было проведено исследование на 2000-летнем интервале времени. На рисунке 2 изображено поведение невязок сравнения между численным и полуаналитическим SMART97 (слева) и S9000 (справа) решениями задачи о вращении абсолютно твердой Земли с использованием эфемериды DE406/LE406 после устранения систематического хода в углах Эйлера. Невязки сравнения на рисунке 1 (слева) и рисунке 2 (слева) похожи друг на друга и не превосходят 150 микросекунд дуги (μas). Следует заметить, что остаточные невязки сравнения между численным и полуаналитическим S9000 (см. рис. 2 (справа)) решениями задачи (не превосходящие в углах Эйлера $40 \mu\text{as}$ на 2000-летнем интервале времени) меньше, чем аналогичные невязки сравнения между численным и полуаналитическим SMART97 (см. рис. 2 (слева)) решениями задачи.

На рисунке 3 изображено поведение невязок сравнения между численным и полуаналитическим RERS2012A-1 (слева) и RERS2012B-1 (справа) решениями данной задачи после устранения систематического хода в угле собственного вращения. Остаточные невязки сравнения после первой итерации итерационного алгоритма данного исследования в углах Эйлера на рисунке 3 (слева) и рисунке 3 (справа) не превосходят $12 \mu\text{as}$ и $10 \mu\text{as}$ соответственно. Полученные

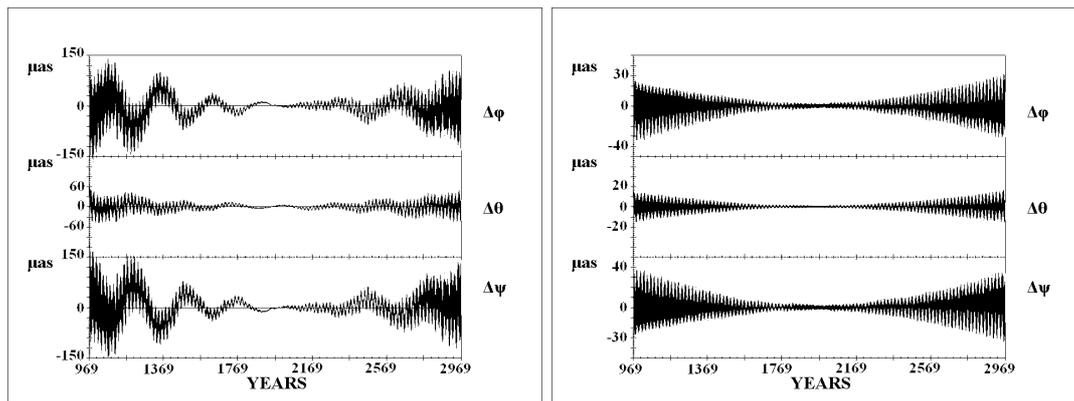


Рис. 2. Поведение невязок сравнения между численным и полуаналитическим SMART97 (слева) и S9000 (справа) решениями с использованием эфемериды DE406/LE406 после устранения систематического хода на 2000-летнем интервале времени

результаты сравнения являются похожими с аналогичными, полученными после единственной итерации, результатами сравнения предыдущего исследования (см. рис. 1 (справа)), где невязки сравнения в углах Эйлера не превосходят 10 μas .

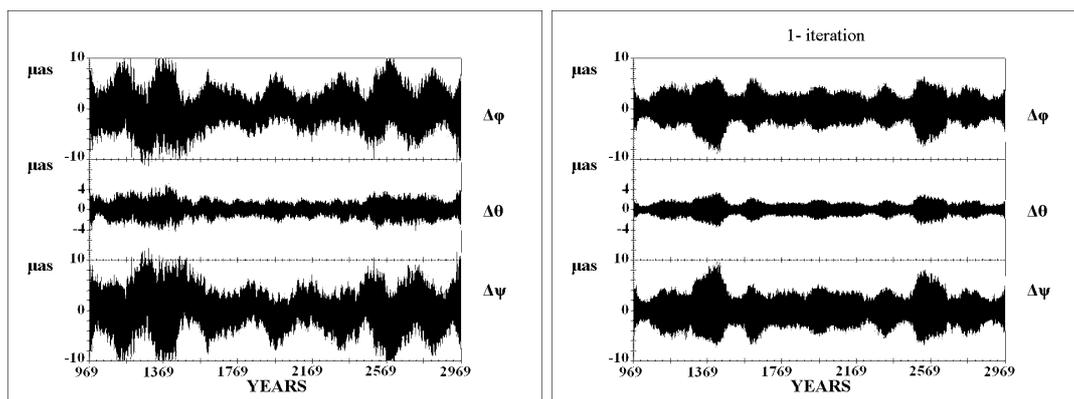


Рис. 3. Поведение невязок сравнения между численным и полуаналитическим RERS2012A-1 (слева) и RERS2012B-1 (справа) решениями данной задачи после устранения систематического хода в угле собственного вращения на 2000-летнем интервале времени

На рисунке 4 изображено поведение невязок сравнения между численным и полуаналитическим RERS2012B-2 решениями данной задачи после устранения систематического хода в угле собственного вращения.

Остаточные невязки сравнения в углах Эйлера на рисунке 4 не превосходят 4 μas . Выполнение итерационного алгоритма было завершено после 1-й итерации для ряда RERS2012A-1 и после 2-й итерации для ряда RERS2012B-2. Выполненных итераций оказалось достаточно для выполнения условия прекращения итерационного алгоритма, в результате были построены новые высокоточные ряды, описывающие вращение абсолютно твердой Земли RERS2012A/B, динамически адекватные эфемериде DE406/LE406, на временном интервале 2000 лет.

Данное исследование было продолжено и завершено на 6000-летнем интервале времени. На рисунке 5 изображено поведение невязок сравнения между численным и полуаналитическим SMART97 (слева) и S9000 (справа) решениями задачи о вращении абсолютно твердой Земли с использованием эфемериды DE406/LE406 систематического хода. В невязках сравнения на рисунке 5 (слева) для всех углов Эйлера был обнаружен систематический ход, не превосходящий

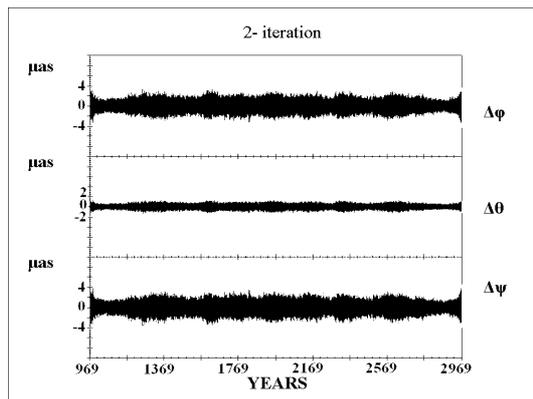


Рис. 4. Поведение невязок сравнения между численным и полуаналитическим RERS2012B-2 решениями данной задачи после устранения систематического хода в угле собственного вращения на 2000-летнем интервале времени

64 секунды дуги на 6000-летнем интервале времени. Систематический ход в невязках сравнения на рисунке 5 (справа) был обнаружен только в угле собственного вращения. Его величина не превосходит 800 миллисекунд дуги (mas).

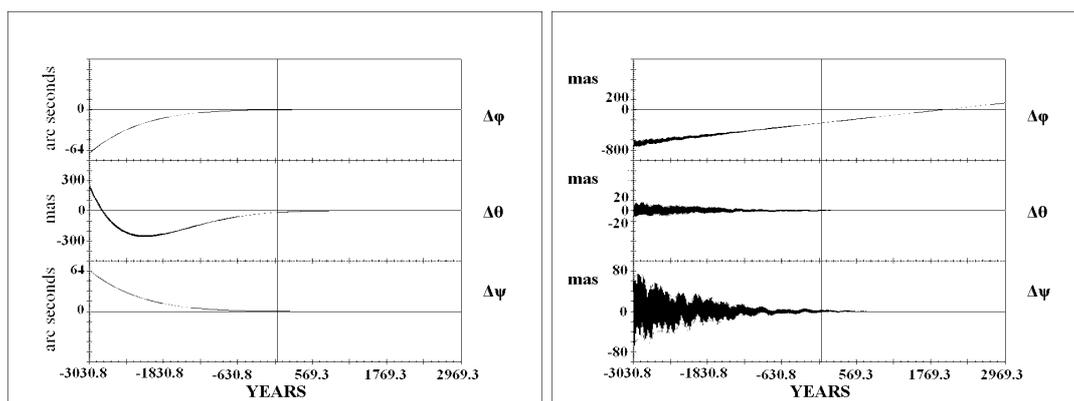


Рис. 5. Поведение невязок сравнения между численным и полуаналитическим SMART97 (слева) и S9000 (справа) решениями данной задачи на 6000-летнем интервале времени

Наличие систематического хода в невязках может быть объяснено несогласованностью системы астрономических постоянных, используемой при построении полуаналитического решения SMART97. А именно, система стоксовых коэффициентов геопотенциала и система планетных масс, используемые при построении теории SMART97, получены независимо друг от друга, то есть система постоянных теории SMART97 динамически несогласованна. А также из-за использования различных эфемерид при построении полуаналитических и численных решений. Ряды S9000 изначально были построены динамически согласованными с эфемеридой DE404/LE404. Численные решения данного исследования строятся с использованием эфемериды DE406/LE406.

На рисунке 6 изображено поведение невязок сравнения между численным и полуаналитическим SMART97 (слева) и S9000 (справа) решениями задачи о вращении абсолютно твердой Земли с использованием эфемериды DE406/LE406 после устранения в углах Эйлера систематического хода. Невязки сравнения на рисунке 6 (слева) и рисунке 6 (справа) похожи друг на друга и не превосходят 80 mas.

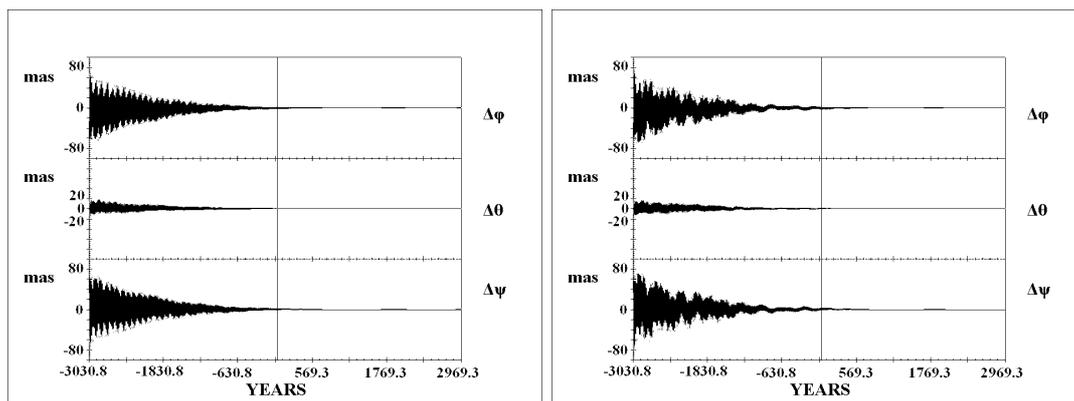


Рис. 6. Поведение невязок сравнения между численным и полуаналитическим SMART97 (слева) и S9000 (справа) решениями данной задачи после устранения систематического хода на 6000-летнем интервале времени

На рисунке 7 изображено поведение невязок сравнения между численным и полуаналитическим RERS2012C-1 (слева) и RERS2012D-1 (справа) решениями данной задачи после устранения систематического хода в угле собственного вращения. Остаточные невязки сравнения после первой итерации итерационного алгоритма данного исследования в углах Эйлера не превосходят 2 mas.

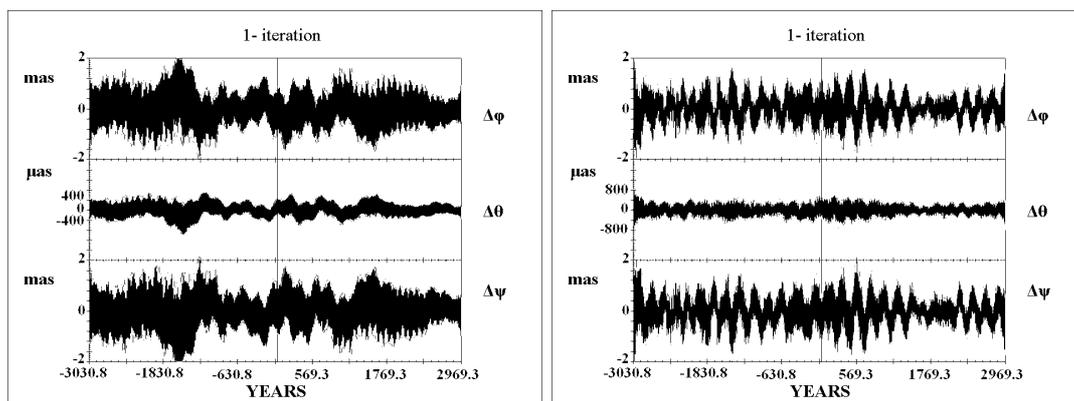


Рис. 7. Поведение невязок сравнения между численным и полуаналитическим RERS2012C-1 (слева) и RERS2012D-1 (справа) решениями данной задачи после устранения систематического хода в угле собственного вращения на 6000-летнем интервале времени

На рисунке 8 изображено поведение невязок сравнения между численным и полуаналитическим RERS2012C-2 (слева) и RERS2012D-2 (справа) решениями данной задачи после устранения систематического хода в угле собственного вращения. Результаты невязок сравнения в углах Эйлера после 2-й итерации на рисунке 8 (слева) и рисунке 8 (справа) не превосходят 1.2 миллисекунды дуги (mas) и 2 mas соответственно. Остаточные невязки после 2-й и 3-й итерации итерационного алгоритма оказались достаточно близкими друг другу. Таким образом, выполнение итерационного алгоритма было завершено на данном шаге. В результате были построены новые высокоточные ряды, описывающие вращение абсолютно твердой Земли RERS2012C/D, динамически адекватные эфемериде DE406/LE406, на временном интервале 6000 лет.

§ 4. Заключение

В результате данного исследования построены новые высокоточные ряды, описывающие

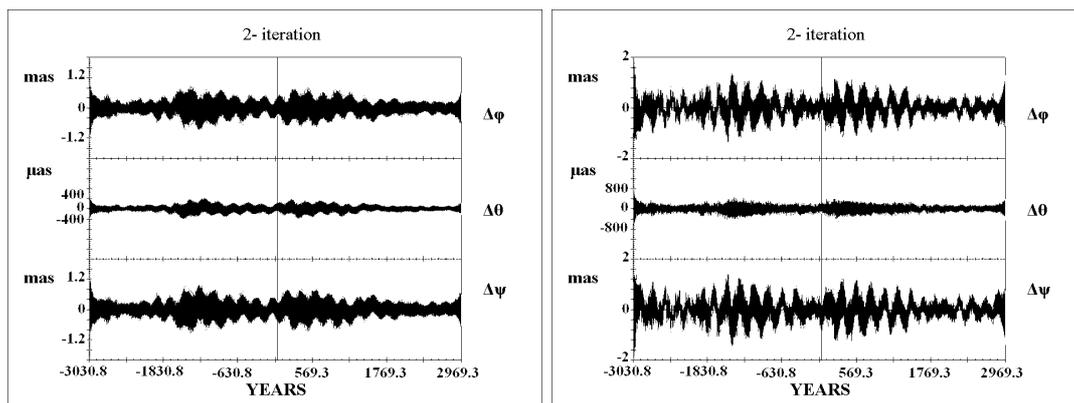


Рис. 8. Поведение невязок сравнения между численным и полуаналитическим RERS2012C-2 (слева) и RERS2012D-2 (справа) решениями данной задачи после устранения систематического хода в угле собственного вращения на 6000-летнем интервале времени

вращение абсолютно твердой Земли RERS2012A/B и RERS2012C/D, динамически адекватные эфемериде DE406/LE406, на временном интервале 2000 и 6000 лет соответственно. Ряды RERS2012 содержат 4113 периодических и пуассоновых членов (без включения новых субсуточных и суточных членов). Исследование субсуточных и суточных периодических и пуассоновых членов в данной работе не производилось. Таким образом, в новые ряды RERS2012A/C и RERS2012B/D эти члены вошли без изменений из рядов SMART97 и S9000 соответственно. Невязки сравнения между численным решением и RERS2012A/B/C/D не превосходят:

12 микросекунд дуги и 4 микросекунды дуги на 2000-летнем интервале времени;

1.2 миллисекунды дуги и 2 миллисекунды дуги на 6000-летнем интервале времени, соответственно, что является хорошей согласованностью рядов RERS2012 с эфемеридой DE406/LE406.

Исследования проводились в Главной (Пулковской) астрономической обсерватории Российской академии наук (РАН) и в Центре космических исследований Польской академии наук (ПАН) при финансовой поддержке в рамках сотрудничества между Польской и Российской академиями наук: тема № 34.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ерошкин Г.И. Высокоточный метод численного интегрирования, основанный на чебышевской полиномиальной интерполяции // Астрометрия, геодинамика и небесная механика на пороге XXI века: материалы конференции. ИПА РАН. Санкт-Петербург, 2000. С. 229–230.
2. Bretagnon P., Francou G., Rocher P., Simon J.L. SMART 97: a new solution for the rotation of the rigid Earth // *Astron. Astrophys.* 1998. Vol. 329. P. 329–338.
3. Eroshkin G.I., Pashkevich V.V., Brzeziński A. Extension of the high-precision numerical theory of the rigid Earth rotation to the case of a long time interval // *Artificial Satellites.* 2002. Vol. 37. № 4. P. 169–183.
4. Pashkevich V.V., Eroshkin G.I. Application of the spectral analysis for the mathematical modelling of the rigid Earth rotation // *Artificial Satellites.* 2005. Vol. 40. № 4. P. 251–259.
5. Standish E.M. JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405 // JPL Interoffice Memorandum 1998. № 312. F–98–048.

Пашкевич Владимир Витальевич, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, лаборатория аналитических и численных методов небесной механики, Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, 196140, Россия, С.-Петербург, Пулковское шоссе, 65/1.

E-mail: apeks@gao.spb.ru

V. V. Pashkevich

Construction of the solutions of the rigid Earth rotation problem at a long time interval

Keywords: numerical integration, ephemeris, the rigid Earth rotation.

Mathematical Subject Classifications: 70F15, 85-06

The main purpose of this research is the construction of the new high-precision rigid Earth rotation series, dynamically adequate to the JPL DE406/LE406 ephemeris. The dynamics of the rotational motion of the rigid Earth is studied numerically by using Rodrigues–Hamilton parameters over 2000 and 6000 years. The numerical solution of the rigid Earth rotation is implemented with the quadruple precision of the calculations. The orbital motions of the disturbing celestial bodies are defined by the DE406/LE406 ephemeris. The results of the numerical solutions of the problem are compared with the semi-analytical solutions of the rigid Earth rotation SMART97 and S9000, respectively, with respect to the fixed ecliptic of epoch J2000. The initial conditions of the numerical integration are taken from the corresponding semi-analytical solutions of the rigid Earth rotation. The investigation of the discrepancies between high-precision numerical solutions and semi-analytical solutions of the rigid Earth rotation problem is carried out by the least squares and spectral analysis methods. The problem was solved taking into account most significant of the relativistic perturbation in the rotational motion of the Earth — geodetic perturbations. As a result, the Rigid Earth Rotation Series (RERS2012) is constructed, which is dynamically adequate to the DE406/LE406 ephemeris over 2000 and 6000 years.

REFERENCES

1. Eroshkin G.I. High-precision method of the numerical solution of the celestial mechanic problems based on Chebyshev polynomial interpolation, *Astrometriya, Geodinamika i Nebesnaya Mekhanika na poroge XXI veka: materialy konferentsii* (Astrometry, Geodynamics and Celestial Mechanics at the turn of XXIth century: Book of abstracts of the conference), Institute of Applied Astronomy of RAS, St. Petersburg, 2000, pp. 229–230.
2. Bretagnon P., Francou G., Rocher P., Simon J.L. SMART97: a new solution for the rotation of the rigid Earth, *Astron. Astrophys.*, 1998, vol. 329, pp. 329–338.
3. Eroshkin G.I., Pashkevich V.V., Brzeziński A. Extension of the high-precision numerical theory of the rigid Earth rotation to the case of a long time interval, *Artificial Satellites*, 2002, vol. 37, no. 4, pp. 169–183.
4. Pashkevich V.V., Eroshkin G.I. Application of the spectral analysis for the mathematical modelling of the rigid Earth rotation, *Artificial Satellites*, 2005, vol. 40, no. 4, pp. 251–259.
5. Standish E.M. JPL planetary and Lunar ephemerides, DE405/LE405, *JPL Interoffice Memorandum*, 1998, no. 312, F-98-048.

Received 12.12.2012

Pashkevich Vladimir Vital'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Laboratory of the Analytical and Numerical Methods of Celestial Mechanics, Pulkovo Observatory of the Russian Academy of Sciences, Pulkovskoe shosse, 65/1, St. Petersburg, 196140, Russia.

E-mail: apeks@gao.spb.ru