УДК 510.63

© *Ю. М. Сметанин*

ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ НА ОСНОВЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ВКЛЮЧАЮЩАЯ ТРАДИЦИОННУЮ СИЛЛОГИСТИКУ

В статье рассматривается возможность и актуальность замены в классической логике и традиционной силлогистике многосмыслового базиса Аристотеля на односмысловой ортогональный базис, изоморфный отношениям «равносильно», «влечет», «независимы» между терминами рассуждений и случайными событиями в теории вероятностей. Обсуждаются теоретические результаты и приложения. Выявляются недостатки математической модели, лежащей в основе классической логики, и предлагается ее улучшенный вариант — логика $\mathbf{S}_{L_1}$, в основе которой уточненная математическая модель — невырожденная булева алгебра и сопряженная с ней алгебраическая система на основе множеств. В работе описываются неклассическая интерпретация умозаключений в ортогональном базисе и возможности эффективной компьютерной проверки логического следования в семантическом смысле, также обоснован новый метод решений логических уравнений. Приводятся примеры решения задач.

Ключевые слова: моделирование, силлогистика, ортогональный базис силлогистики, булева алгебра, исчисление конституент, изоморфизм и гомоморфизм алгебраических систем, логическое следование в семантическом смысле, вероятность, логические уравнения.

Введение

В формализованных логических теориях (исчислениях) выражение $G \vDash B$ обозначает, что формула B этого исчисления в рамках принятой семантики является истинной всегда, когда являются истинными все формулы из G. Отношение «причина–следствие» в объективной реальности пытаются отразить в языке математической логики посредством словоформ «если p, то q» и «p тогда и только тогда, когда q» между терминами p и q, обозначающими явления и их причинно-следственные отношения, отражаемые в модели. При этом в качестве формального аналога условного высказывания в этой логике выступает материальная импликация, известная еще с античности и уже тогда вызывавшая споры. Материальная импликация парадоксальна. Из лжи вопреки шекспировскому «из ничего и выйдет ничего» вдруг следует все что угодно. *Но без логического следования нет логики.* В этой ситуации понятен интерес к истории логики и к аристотелевскому ее этапу, ведь традиционная силлогистика не парадоксальна. Важным тестом на «профпригодность» любой новой логики является возможность встраивания в нее силлогистики Аристотеля или традиционной силлогистики [1].

По необходимости ученые вынуждены выражать суждения и умозаключения высказываниями естественного или формального языка. Средствами языка логическое следование фиксируется путем сопоставления списку языковых конструкций, называемых посылками, некоторой конструкции, которая называется их следствием. Поэтому отношение логического следования должно не парадоксально выражаться в естественном языке или формальном языке. Если в языке существует такой конструкт, то, видимо, его и стоит *называть импликацией*. Ясно, что это не есть функция материальной импликации. *На роль этого конструкта претендует отношение строгого включения между двумя множествами.* Действительно, если для непустых и неуниверсальных множеств X и Y имеет место включение $X \subset Y$, то его естественно, на наш взгляд, трактовать как истину, выраженную высказыванием вида «Если $e \in X$, то обязательно будет иметь место $e \in Y$», где e — произвольный элемент универсума. Однако образ строгого включения в классической логике извращен в булеву функцию. В данной работе мы попробуем выразить импликацию в форме алгоритма вычисления следствий из данных посылок.

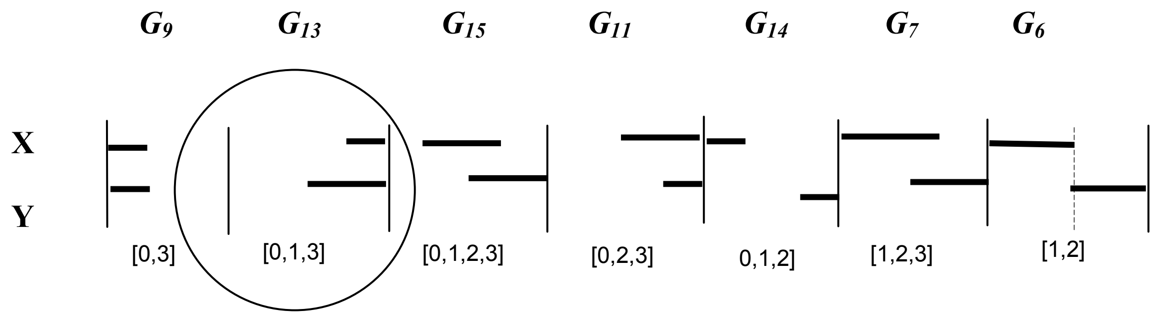

Рис. 1. Простые односмысловые суждения с непустыми и неуниверсальными терминами

Как известно, простые суждения, являющиеся базисом силлогистики Аристотеля, имеют многосмысловое содержание. Любое логическое утверждение в традиционной силлогистике можно интерпретировать в виде соотношения между множествами (см. рис. 1).

Рассмотрим расширенные жергонновы отношения, изображенные на рисунке 1, которыми выражена эта многосмысловость. В работе [1] они названы модельными схемами с универсумом. Силлогистика над этими схемами построена В. И. Маркиным и является обобщением силлогистики Венна на случай расширенных жергонновых отношений. В этой силлогистике семь констант, по одной на каждое отношение. Они отражают простые односмысловые суждения между двумя непустыми терминами (понятиями). В работах [2–5] и в данной работе указанные семь отношений выражаются тремя логическими (совпадение, строгое включение и независимость), представленными тремя односмысловыми суждениями ортогонального базиса (ОБ) силлогистики, предложенного Сметаниным Ю.М. Ортогональный базис состоит из трех простых суждений (функторов) — вводится не семь констант, а три константы:

$$OB_S = \{A(X,Y), Eq(X,Y), IO(X,Y)\}. \tag{1}$$

Остальные четыре из расширенных жергонновых отношений выражаются в ортогональном базисе следующим образом (см. пункты 4–7).

1. $G_{13} = A(X,Y)$ имеет смысл строгого включения.

2. $G_9 = Eq(X,Y)$ в смысле X совпадает с Y.

3. $G_{15} = IO(X,Y)$ в смысле того, что (некоторые X есть Y) и (некоторые X не есть Y) и (некоторые Y не есть X) и (некоторые не X не есть Y).

4. $G_{11} = A(X',Y')$ — множество Y есть собственное подмножество X, или событие Y влечет наступление события X, или $XY + X'Y + X'Y' = U$.

5. $G_{14} = A(X,Y')$ — все X не есть $Y \equiv (U = X \cdot Y' + X' \cdot Y + X' \cdot Y')$ и $X \cdot Y = \varnothing$.

6. $G_7 = A(X',Y) \equiv U = X \cdot Y' + X \cdot Y + X' \cdot Y)$, то есть множество $X' \cdot Y'$ пустое.

7. $G_6 = Eq(X,Y') \equiv (U = X \cdot Y' + X' \cdot Y)$ и множества $X \cdot Y$ и $X' \cdot Y'$ пустые.

Многосмысловой базис Аристотеля выражается через функторы ОБ следующим образом:

$$\begin{gathered} AXY = \{Eq(X,Y), A(X,Y)\}; \quad EXY = \{Eq(X,Y'), A(X,Y')\}; \\ IXY = \{A(X',Y), Eq(X,Y), A(X',Y'), A(X,Y), IO(X,Y)\}; \\ OXY = \{Eq(X',Y), A(X',Y\}, A(X',Y'), A(X,Y'), IO(X,Y)\}. \end{gathered} \tag{2}$$

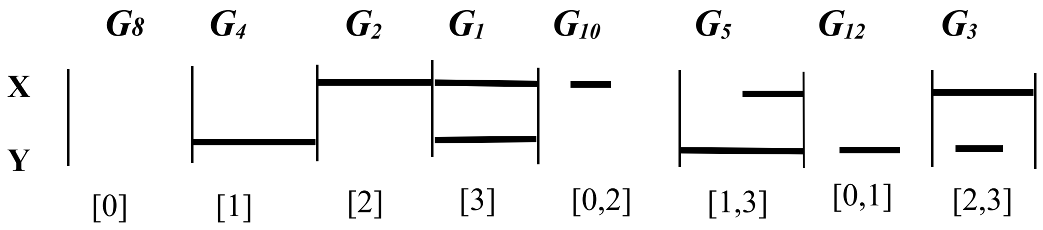

Рис. 2. Дополнение расширенных жергонновых отношений

Замечание 1. Ортогональный базис можно сократить до двух функторов

$$Eq(X,Y), \quad IO(X,Y)$$

в силу того, что отношение $X \subset Y$ выражается через равносильность $(X \subset Y) \equiv (X = X \cdot Y) \cdot (X = Y)'$; следовательно, $A(X,Y) \equiv E(X, X \cdot Y) \cdot E(X,Y)'$. Последняя равносильность читается так: «(Все X есть Y) равносильно тому, что X равно пересечению множеств X, Y и множество X не совпадает с множеством Y». Здесь и далее в работе операции над множествами и логические операции над высказываниями обозначаются одинаковыми символами; различие их смысла вытекает из контекста. К множествам применяются операции над множествами (пересечение, объединение, дополнение до универсума, симметрическая разность); к высказываниям — логические связки «и», «или», «не», «либо».

Можно представить базис всего одним функтором $Eq(X,Y)$ с учетом того, что

$$IO(X,Y) \equiv (X' + Y' \subset U) \cdot (X' + Y \subset U) \cdot (X + Y' \subset U) \cdot (X + Y \subset U).$$

Однако для удобства и по традиции, сложившейся в теории вероятностей, будем использовать в качестве базиса все три функтора ОБ.

Имеются еще соотношения для пустых и совпадающих с универсумом множеств X и Y, они показаны на рисунке 2 и названы дополнением расширенных жергонновых отношений, или вырожденными жергонновыми отношениями, так как подразумевают, что хотя бы одно из множеств X или Y совпадает с пустым множеством либо с универсумом. Для сравнения приведем базис Васильева — $B = (AXY, EXY, IO_B XY)$. Первые два элемента совпадают с общеутвердительным и общеотрицательным аристотелевым, а третье задается высказыванием «Только некоторые X есть Y» либо равносильным ему по содержанию «Только некоторые X есть не Y». Базис Васильева тоже многосмысловой, его последний функтор принимает один из трех смыслов:
$IO_B XY \equiv \big(G_7, \text{ либо } G_{11}, \text{ либо } G_{15}\big) \equiv \big(A(X',Y), \text{ либо } A(X',Y'), \text{ либо } IO(X,Y)\big)$.

Кроме того, имеют место интересные соотношения между функтором $IO_B XY$ и функторами аристотелева базиса $A = AXY, EXY, IXY, OXY$. А именно, $IXY \equiv AXY \oplus IO_B XY$, $OXY \equiv EXY \oplus IO_B XY$, то есть базис Васильева упраздняет функторы IXY, OXY и в силу понижения многосмысловости выгодно отличается от базиса Аристотеля. Кроме того, его суждения контрарны (несовместны). Знак $\oplus$ означает операцию исключающей дизъюнкции. Ортогональный базис в множестве расширенных и дополненных жергонновых отношений также является многосмысловым [2, 3].

В работе рассмотрены некоторые теоретические результаты в области анализа умозаключений, выраженные в языке с использованием ортогонального базиса, описываются неклассическая интерпретация умозаключений в ортогональном базисе и возможности эффективной компьютерной проверки логического следования в семантическом смысле. Предлагается вариант логики высказываний на основе ОБ, включающий традиционную силлогистику. Приводятся примеры решения задач, в частности обсуждаются результаты проверки всех правильных модусов Аристотеля.

§ 1. Основные обозначения и определения

При исследовании вопроса о том, какие множества можно построить посредством операций (объединения, пересечения и дополнения до универсума $\{+,\ \cdot,\ '\}$, где $X' = U \backslash X$) из порождающих n множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$, являющихся собственными непустыми подмножествами универсума, введено понятие конституенты [12] как множества вида $X_1^{\sigma_1} \cdot X_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot X_n^{\sigma_n}$, где $\sigma_i \in \{0,1\}$ и $X_i^{\sigma_i} = \begin{cases} X_i, & \sigma_i = 1, \\ X_i{}', & \sigma_i = 0. \end{cases}$ Общее число непустых конституент не превосходит 2^n. Каждой конституенте можно сопоставить двоичный набор $\tilde{\sigma}_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \rangle$ длины n.

Между конституентами и наборами имеется одно-однозначное соответствие. Каждому набору и соответствующей конституенте присвоим номер, равный десятичному значению двоичного числа, изображенного набором $\tilde{\sigma}$, читаемого слева направо. *Двоичный набор, выраженный десятичным числом, будем называть индикатором конституенты.* Например, конституенте $X_1^1 \cdot X_2^0 \cdot X_3^1 = X_1 \cdot X_2{}' \cdot X_3$ соответствует индикатор, равный 5, — двоичное число 101, выраженное десятичным 5. Далее конституенту будем отождествлять с ее индикатором, если порядок образующих множеств фиксирован. Для конституент произвольных непустых подмножеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ универсума существуют важные соотношения [12].

Утверждение 1. *Конституенты обладают свойствами* 1–5.
1. *Пересечение двух различных конституент пусто.*
2. *Множество X_i равно сумме* (*объединению*) *всех непустых конституент, которые в качестве i–го множителя содержат X_i.*
3. *Сумма* (*объединение*) *всех непустых конституент равна универсуму.*
4. *Каждое непустое множество, образованное из множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с помощью операций $\{+,\ \cdot,\ '\}$ алгебры множеств, является объединением некоторого числа непустых конституент.*
5. *Если универсум, образованный конституентами множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$, содержит 2^n элементов, то каждая из конституент-слагаемых в силу того, что они не пересекаются, является одноэлементным множеством.*

Рассмотрим двойственную структуру к конституенте — дизституенту.

Определение 1. *Дизституентой* $\mathbf{D}(i')$, соответствующей конституенте $\mathbf{K}(i)$ с индикатором $i_{(10)}$, называется дополнение $\mathbf{K}(i)$ до универсума. Причем имеет место равенство $(X_1^{\sigma_1} \cdot X_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot X_n^{\sigma_n})' = (X_1^{1-\sigma_1} + X_2^{1-\sigma_2} + \ldots + X_n^{1-\sigma_n})$ и $i' = (2^n - 1) - i$, то есть двоичное представление i' есть инверсный код двоичного представления i.

Например, конституенте $\mathbf{K}(5) = X_1 \cdot X_2{}' \cdot X_3$ соответствует индикатор, равный $i = 5$, и дизституента $\mathbf{D}(5') = \mathbf{D}(7-5) = \mathbf{D}(2) = (X_1^{1-\sigma_1} + X_2^{1-\sigma_2} + \ldots + X_3^{1-\sigma_3}) = (X_1' + X_2 + X_3')$, $\tilde{\sigma} {=} \langle \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \rangle = (101)$, $(X_1 \cdot X_2{}' \cdot X_3)' = \mathbf{K}(5)' = \mathbf{D}(5') = \mathbf{D}(2^3 - 1 - 5) = \mathbf{D}(2) = (X_1' + X_2 + X_3')$.

Утверждение 2. *Для конституент и двойственных им структур дизституент имеют место следующие равносильности.*
1. $\boldsymbol{K}(i) \neq \emptyset \equiv \boldsymbol{D}(i') \subset U$.
2. $\bigcup_{i \in X} \boldsymbol{K}(i) \neq \emptyset \equiv \bigcap_{i \in X} \boldsymbol{D}(i') \subset U$.
3. $X \cdot Y \neq \emptyset \equiv (\bigcup_{i \in X} \boldsymbol{K}(i)) \cdot (\bigcup_{j \in Y} \boldsymbol{K}(j)) \neq \emptyset \equiv (\bigcup_{i \in X} \boldsymbol{K}(i))' + (\bigcup_{j \in Y} \boldsymbol{K}(j))' \subset U \equiv$
$\equiv \bigcap_{i \in X} \boldsymbol{D}(i') + \bigcap_{j \in Y} \boldsymbol{D}(j') \subset U$.

§ 2. Булевы алгебры как основа логики

Как отмечается в работах Б. А. Кулика [8, 9], когда в математике речь идет о «чистой» алгебре, то есть об алгебре без соотношений, то это не совсем верно; нужно рассматривать алгебраическую систему потому, что любая алгебра прямо или косвенно начинается с определения основы — основного множества S и с определения (или хотя бы разъяснения) таких свойств объектов, для которых справедливо соотношение принадлежности к S и включения в S.

Замечание 2. Далее будем рассматривать частично упорядоченную отношением строгого порядка систему подмножеств множества U, называемого универсумом. При этом отдельные элементы U в случае надобности будем трактовать как его одноэлементные подмножества.

Частично упорядоченное отношением строгого порядка множество U будем называть строгой структурой (антирефлексивной структурой), если в нем при любых его подмножествах $X \subset U, Y \subset U$ система множеств $\{X, Y\}$ имеет точную верхнюю и нижнюю границы. Антирефлексивная структура U обладает свойством дистрибутивности, для ее элементов выполняется соотношение $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$.

Обозначим через $\mathrm{B}(\Sigma_i)$ систему из всех подмножеств универсума, которые могут быть построены из конечной системы $\Sigma_i = \{X_1, X_2, \ldots, X_i\}$, $i = 0, \ldots, n$, образующих множеств, являющихся собственными, непустыми подмножествами универсума, посредством операций объединения, пересечения и дополнения до универсума. Множество $\mathrm{B}(\Sigma_i)$ включает также универсум и его «изнанку» — пустое множество. Всего можно составить не более чем 2^i непустых конституент, являющихся элементарными «кирпичиками», из которых можно конструировать указанные выше подмножества универсума, порождаемые системой образующих. Из этих «кирпичиков» можно сочетать не более чем $(2)^{2^i}$ различных собственных подмножеств универсума, включая пустое множество и сам универсум.

Рассмотрим алгебраическую систему

$$\langle \mathrm{B}(\Sigma_i), W_F, \mathrm{W}_R \rangle, \tag{3}$$

где $W_F = \{+, \cdot, '\}$, $W_R = \{=, \subset\}$, $i = \overline{0, n}$, $\Sigma_i = \{X_1, X_2, \ldots, X_i\}$, в которой множество W_F — три операции (объединение, пересечение, дополнение до универсума), а W_R — отношения равенства и строгого включения множеств. На множестве $\mathrm{B}(\Sigma_i)$ — основе — посредством операции $\subset$ определен строгий частичный порядок, имеются минимальный и максимальный элементы $\emptyset$ и U, которые можно считать нулем и единицей. Таким образом, над множеством $\mathrm{B}(\Sigma_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ определена булева алгебра. Для случая $U = \{1\}$ множество $\mathrm{B}(\Sigma_i) = \{\emptyset, 1\}$. Булева алгебра над таким множеством называется вырожденной [10]. Поэтому алгебра логики, в которой ноль и единица отождествлены с абстрактной ложью и соответственно абстрактной истиной, основана на вырожденной булевой алгебре. В этой алгебре конституенты ${x_1}^{\sigma_1} \cdot {x_2}^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot {x_n}^{\sigma_n}$, где $x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} 1, & \sigma_i = 1, \\ 0, & \sigma_i = 0, \end{cases}$ принято называть полными конъюнкциями.

Определение 2. Зафиксируем порядок образующих множеств алгебраической системы (1), например $\pi = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, так, что порядок есть $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n}$. *Такую алгебраическую систему будем называть системой с заданным порядком образующих, или просто заданной,* и будем ее обозначать как

$$\langle \mathrm{B}(\Sigma_n, \pi), W_F, W_R \rangle. \tag{4}$$

Определение 3. *Базисом заданной алгебраической системы* (4)*, или её характеристическим множеством* (см. [11, с. 6]), будем называть семейство непустых конституент данной системы.

Определение 4. *Базовой системой номеров* (BSN) *универсума или любого множества из* $\mathrm{B}(\Sigma_i, \pi)$ будем называть множество номеров (индикаторов) непустых конституент, объединение которых совпадает с данным множеством.

Характеристическое множество полностью определяется базовой системой номеров BSN заданной алгебраической системы, поэтому для алгебраических систем с упорядоченной системой образующих можно отождествлять BSN и характеристическое множество.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Образующие	
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	X_1	$[8\dots 15]$
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	X_2	$[4\dots 7, 12\dots 15]$
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	X_3	$[2,3,6,7,10,11,14,15]$
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	X_4	$[1,3,5,7,9,11,13,15]$

Рис. 3. Иллюстрация способа формирования образующих канонической системы

Определение 5. *Метаиндикатором множества A, принадлежащего системе множеств $\mathrm{B}(\Sigma_i, \pi)$, называется функция* $\chi_A(i) = \begin{cases} 1, & i \in BSN(A), \\ 0, & i \notin BSN(A), \end{cases}$ где $i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$.

Определение 6. Назовем n-арное отношение между образующими алгебраической системы *отношением независимости множеств* X_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ или будем говорить, что множества (и соответствующие им термины либо события) *независимы в совокупности* (см. рис. 3), тогда и только тогда, когда все конституенты, составленные из множеств X_i $(i = 1, 2, \dots, n)$, являются непустыми. Соответствующую этому отношению заданную алгебраическую систему будем называть *канонической.*

Замечание 3. Далее будем считать, что в заданной системе (4) все множества и универсум даны в виде BSN.

Определение 7. В случае если порядок образующих задан и известно BSN или индуцированный образующими универсум U, можно представить алгебраическую систему кортежем множеств

$$I = \langle U, X_1, X_2, \dots, X_n \rangle, \tag{5}$$

который мы будем называть теоретико-множественной интерпретацией алгебраической системы, или интерпретацией n-мерного отношения между её образующими. Далее, если это не будет вызывать недоразумений, будем отождествлять заданную алгебраическую систему типа (3) с ее теоретико-множественной интерпретацией (5), в которой все множества выражены через их BSN. Будем также называть кортеж (5) моделью мира, или онтологией, а множества $X_1, X_2, \dots, X_n$ — модельными множествами.

Основным препятствием для эффективного использования модели мира (5) *является трудность задания модельных множеств и универсума. В компьютерных приложениях, например, очень важно иметь возможность оперировать конечными множествами. Мы используем конечное семейство множеств* $\mathrm{B}(\Sigma_i, \pi)$*, каждое из которых представлено конечным множеством индикаторов.*

Нагляднее всего проиллюстрировать теоретико-множественную интерпретацию можно графически, в виде линейной диаграммы (см. рис. 4, 5). Рассмотрим свойства универсумов (BSN), в которых между парами множеств выполняются отношения, выражаемые функторами ортогонального базиса. Эти свойства можно выразить в виде пустоты, непустоты, универсальности, неуниверсальности множеств, порождаемых объединением конституент и пересечением дизституент в системе (4).

Утверждение 3. *Имеют место следующие свойства конституент и дизституент. Пусть X_i, X_j — произвольные неуниверсальные и непустые множества семейства* $\mathrm{B}(\Sigma_i, \pi)$.
1. *Существует связь множества пустых (непустых) конституент с n-арным отношением между образующими множествами $X_1, X_2, \dots, X_n$. Эта связь заключается в том, что множество пустых (непустых) конституент одно-однозначно определяет многоместное (n-арное) отношение между порождающими множествами и их дополнениями $X_1, X_2, \dots, X_n$,*

$X_1', X_2', \ldots, X_n'$. Это же отношение задает пересечение дизституент, сопоставленных каждой непустой конституенте, что следует из законов Де Моргана.
2. *Универсум заданной АС, выражаемый характеристическим множеством, отождествленным с BNS, можно представить в виде формулы — объединения непустых конституент — это так называемая нормальная форма Кантора (НФК)* [12]. *Кроме того, универсум можно выразить любой другой правильно построенной из образующих формулой алгебры множеств, равносильной его НФК.*
3. *Множество BSN в заданной алгебраической системе можно сопоставить любому отдельно взятому множеству из* $\mathrm{B}(\Sigma_n, \pi)$. *Поэтому можно сопоставить любому подмножеству его НФК либо равносильную ей формулу. Устанавливается одно-однозначное соответствие между базисом заданной алгебраической системы и ее BSN. Например, BSN универсума расширенных жергонновых отношений при двух образующих показаны в квадратных скобках на рисунках* 1, 2.

В работе [3] приведен алгоритм построения BSN онтологии (модели возможного мира), которая получается, если в исходной канонической системе (4) ввести последовательно (в произвольном порядке) несколько бинарных отношений между множествами из $\mathrm{B}(\Sigma_n, \pi)$ (см. задачу Порецкого о птицах в зоосаде).

Рассмотрим систему (6), которая определяет вырожденную булеву алгебру. Такую систему также будем называть вырожденной.

$$\langle \mathrm{B}(\Sigma_n, \pi), W_F^0, W_R^0 \rangle, \quad W_F^0 = \{+, \cdot, '\}, \quad W_R^0 = \{\leqslant\}, \quad \tilde{\sigma}_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}. \tag{6}$$

Сопоставим вырожденную АС (6) невырожденной АС (4) по следующей схеме. Система образующих множеств $\Sigma_n = \{X_1, X_2, \ldots, X_i\}$ одно-однозначно отображается в систему их индикаторов $\tilde{\sigma}_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, принимающих значения 0 и 1. Множеству операций алгебры множеств $W_F = \{+, \ \cdot\ , \ '\}$ (объединению, пересечению, дополнению до универсума) взаимно однозначно сопоставляются булевы функции $W_F^0 = \{+, \ \cdot\ , \ '\}$ (конъюнкция, дизъюнкция и отрицание). Отношениям $W_R = \{=, \ \subset\}$ (равенства и строгого включения) сопоставляется одно отношение «меньше или равно» на множестве $[0, 1]$, которое, в свою очередь, является значениями индикаторов. При этом пустому множеству сопоставляется 0, а универсуму в системе (4) сопоставляется единица. Поскольку событие имеет интерпретацию в форме множества, а высказывание интерпретируется как пропозициональная переменная с двумя возможными значениями «истина» и «ложь» — {0,1}, то *изоморфизм* между алгеброй событий (суждений, высказываний) из (4) и алгеброй их индикаторов из (6) возможен только в случае, если множества — события в универсуме (достоверном событии) — упорядочены отношением нестрогого частичного порядка $(\subseteq, \leqslant)$.

С точки зрения частичного порядка безразлично, что рассматривать — алгебраическую систему множеств или изоморфную ей алгебраическую систему характеристических функций этих множеств. Это отражено в теореме Стоуна [12, с. 35].

В случае рассмотрения строгого частичного порядка строгого изоморфизма между этими системами нет, а есть гомоморфное отображение первой во вторую, при котором во второй теряется разделение отношений строгого включения и равенства между множествами. Проекционная модель на основе индикаторов настолько грубая, что любое непустое подмножество универсума алгебраической системы множеств отражается в ней как ноль либо единица.

Теорема 1. *Невырожденная алгебраическая система* (4) *с заданным строгим частичным порядком гомоморфна вырожденной алгебраической системе* (6) *на основе индикаторов системы образующих АС* (4).

Отношению строгого порядка, имеющему место в G_3, G_5, G_{10}, G_{12}, G_{11}, G_{13}, G_{14} между X, X' и Y, Y', может быть сопоставлено только отношение «меньше или равно» между их индикаторами. Таким образом, переход к высказываниям, выражающим функторы ОБ в форме утверждений о равенстве (неравенстве) пустому множеству либо универсуму конституент множеств, позволяет рассмотреть гомоморфизм невырожденной и вырожденной булевой алгебры под углом зрения адекватности этих моделей для интерпретации понятий, суждений и умозаключений. При этом изоморфизм по нестрогому включению (теорема М. Стоуна) невырожденной булевой алгебры в алгебраической системе и вырожденной булевой алгебры в алгебраической системе на основе индикаторов переходит в гомоморфизм по строгому включению (теорема 1). Любое жергонново отношение между множествами одно-однозначно соответствует бинарному отношению на парах множеств $\{\langle X,Y\rangle,\langle X',Y\rangle,\langle X,Y'\rangle,\langle X',Y'\rangle\}$, выражающему факт пустоты некоторых из конституент. Например, для отношения G_6 — отношение пустоты конституент $X\rho^6_\emptyset Y=\{\langle X',Y'\rangle,\langle X,Y\rangle\}$, для отношения G_{13} — отношение $\rho^{13}_\emptyset=\{\langle X,Y'\rangle\}$. Аналогичное распознающее бинарное отношение выявляется на индикаторах x,y множеств X,Y. Однако если равенство множеств переходит в равенство индикаторов, то отношение строгого включения всегда отражается как нестрогое неравенство между индикаторами «меньше либо равно». Это и есть гомоморфизм.

§ 3. Условия выполнимости функторов ОБ в онтологии

В алгебраической системе (4) *логические отношения между двумя множествами из* $\mathrm{B}(\sigma_i,\pi)$, *выраженные через функторы ортогонального базиса, можно также выразить в форме утверждений о равенстве* (*неравенстве*) *пустому множеству либо универсуму конституент либо дизституент этих множеств.*

$$\begin{aligned} Eq(X,Y)&\equiv(X=Y)\equiv(X\cdot Y'=\emptyset)\cdot(X'\cdot Y=\emptyset)\equiv(XY+X'Y'=U),\\ A(X,Y)&\equiv(X\subset Y)\equiv(XY'=\emptyset)\cdot(X'Y\neq\emptyset)\equiv(X'\cdot Y'+X\cdot Y'+X\cdot Y=U),\\ IO(X,Y)&\equiv(X'+Y'\neq\emptyset)\cdot(X'+Y\neq\emptyset)\cdot(X+Y'\neq\emptyset)\cdot(X+Y\neq\emptyset).\end{aligned}\tag{7}$$

Можно выразить ортогональный базис в альтернативной форме:

$$\begin{aligned} Eq(X,Y)&\equiv(X=Y)\equiv(X'+Y=U)\cdot(X+Y'=U),\\ A(X,Y)&\equiv(X\subset Y)\equiv(X'+Y=U)\cdot(X+Y'\subset U),\\ IO(X,Y)&\equiv(X'+Y'\subset U)\cdot(X'+Y\subset U)\cdot(X+Y'\subset U)\cdot(X+Y\subset U).\end{aligned}\tag{8}$$

В общем случае, если допускать универсальные и пустые термины, $Eq(X,Y)$ выражает три жергонновых отношения G_1, G_8, G_9, два из которых вырожденные, $A(X,Y)$ выражает четыре жергонновых отношения G_4, G_5, G_{12}, G_{13}, три из которых вырожденные. Пусть U — универсум, заданный как BSN. Пусть X_i,X_j — элементы из U. Указанные выше свойства конституент и дизституент позволяют разработать алгоритм вычисления BSN для любого множества, возможного в данной онтологии (см. работу [3]). Пусть U представлен BSN, тогда для любого множества из $\mathrm{B}(\Sigma_n,\pi)$ (см. работу [3]) справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. *В онтологии* (5) *отношение* $A(X,\,Y)$ *двух множеств выполняется тогда и только тогда, когда все конституенты* $\boldsymbol{K}_{X\cdot Y'}(i)$, *содержащие произведения* $X\cdot Y'$, *являются пустыми и все конституенты* $\boldsymbol{K}_{X'\cdot Y}(j)$, *содержащие произведение* $X'\cdot X$, *не являются пустыми. Это равносильно истинности суждения* $(X'+Y=U)\cdot(X'\cdot Y\neq\emptyset)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство осуществляется непосредственной проверкой выполнения условий теоремы на жергонновых отношениях G_4, G_5, G_{12} G_{13} и невыполнения хотя бы одного из них на остальных отношениях.

Теорема 3. *В онтологии* (5) *отношение* $Eq(X,\,Y)$ *выполняется тогда и только тогда, когда все конституенты* $\boldsymbol{K}_{X'\cdot Y}(i)$, *содержащие произведения* $X'\cdot Y$, *и все конституенты* $\boldsymbol{K}_{X\cdot Y'}(j)$, *содержащие произведения* $X\cdot Y'$, *являются пустыми. Другими словами, истинно высказывание* $(X+Y')\cdot(X'+Y)=U$.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Теорема 4. *В онтологии* (5) *отношение независимости* $IO(X, Y)$ *выполняется тогда и только тогда, когда все конституенты, содержащие пересечения* $X \cdot Y$, $X' \cdot Y$, $X \cdot Y'$, $X' \cdot Y'$, *являются непустыми.*

Доказательство аналогично предыдущим.

Замечание 4. Утверждение последней теоремы можно сформулировать по-другому: *отношение независимости выполняется тогда и только тогда, когда конъюнкция всех дизституент* $\boldsymbol{D}_{X'+Y'}(i_1)$, $\boldsymbol{D}_{X+Y'}(i_2)$, $\boldsymbol{D}_{X'+Y}(i_3)$, $\boldsymbol{D}_{X+Y}(i_4)$, *содержащих множества* $X+Y$, $X'+Y$, $X+Y'$, $X'+Y'$, $X+Y$, *является непустым и собственным подмножеством универсума.*

Теоремы 2 и 3 показывают, что введение отношений $A(X,Y)$ и $Eq(X,Y)$ в данную онтологию приводит к сужению ее универсума: из него убираются номера конституент, которые должны быть пустыми при выполнении вводимого отношения. Теорема 4 утверждает, что для построения алгебраической системы на базе заданной, с введением в неё отношения независимости между X и Y, необходимо, в случае отсутствия в ней такового, дополнить универсум исходной онтологии номерами конституент, в которые входят пересечения $X \cdot Y$, $X' \cdot Y$, $X \cdot Y'$, $X' \cdot Y'$. Эти действия не сужают, а могут только расширить исходный универсум.

§ 4. Логика и вероятность

Сопряженная с невырожденной алгебраической системой (1) булева алгебра может быть интерпретирована как алгебра случайных событий с конечным универсумом вследствие того, что σ-алгебра для конечного числа элементарных событий порождается алгебраической системой, изоморфной (1).

Для этого достаточно рассматривать универсум системы (1) как пространство конечного числа элементарных исходов некоторого случайного эксперимента, системе образующих сопоставить случайные события, которые могут иметь место в результате испытания. Элементарными исходами являются случайные события, сопоставленные конституентам. Логические отношения между высказываниями ($A(X,Y)$; $Eq(X,Y)$; $IO(X,Y)$) изоморфны отношениям между событиями X и Y — (X влечет Y; X равносильно Y; X,Y независимы). Здесь X, Y — случайные события, в качестве которых могут выступать любые правильно построенные формулы из образующих множеств. Итак, событиями мы будем называть не любые подмножества U, а лишь те, которые можно получить объединением конституент. При этом необходимо позаботиться, чтобы этот набор подмножеств был замкнут относительно известных операций над событиями, то есть чтобы объединение, пересечение, дополнение событий снова давали событие. Это легко сделать, задав систему конституент — элементарных событий, которые, в свою очередь, получаются заданием системы образующих алгебраической системы (1). Исторически сложились три точки зрения на совместное использование понятий логика и вероятность:

(1) классическая [13];

(2) инженерная (логико-вероятностное исчисление — ЛВИ) [14, 15];

(3) исследователей искусственного интеллекта (вероятностная логика) [16].

Под термином «вероятностная логика» здесь понимается классическая алгебра случайных событий с исключенным двусмысловым отношением $X \subseteq Y$ между случайными событиями X и Y. В работах [5, 6] показано, что различие во взглядах и «трудности» совмещения понятий «логика» и «вероятность» происходят от того, что колмогоровский подход к исчислению вероятностей случайных событий использует невырожденную булеву алгебру на основе множеств [13], а инженерный подход и подход искусственного интеллекта используют вырожденную булеву алгебру на основе множеств индикаторов случайных событий, по сути своей — неадекватную модель объективной реальности. Независимые суждения и независимые случайные события можно сопоставить с помощью теоремы 4.

Теорема 5. *Система образующих $\Sigma_n = \{X_1, X_2, \ldots, X_i\}$ невырожденной заданной алгебраической системы (4) одно-однозначно сопоставляется системе независимых в совокупности случайных событий, тогда и только тогда, когда $BSN(\Sigma_n) = \{0, 1 \ldots, 2^n - 1\}$. Другими словами, все конституенты системы образующих являются непустыми множествами.*

Теорема доказывается по индукции. Подход к автоматизированному решению практических задач на основе алгоритма вычисления BSN рассматривается в работах [4–6]. В его основе лежит установленный изоморфизм конечного пространства элементарных событий с, в общем случае, неравными вероятностями элементарных случайных событий и заданной алгебраической системой (4), в которой элементарным случайным событиям сопоставлены конституенты, а системе образующих $\Sigma_n = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ — случайные события, являющиеся суммой элементарных событий, сопоставленных непустым конституентам. Отношениям строгого включения, равенства и независимости пар образующих соответствуют отношения «влечет», «равносильно» и «независимы» между парами случайных событий, сопоставленных этим образующим. В случае независимости в совокупности r образующих ($r \geqslant 3$) им сопоставляется r независимых в совокупности случайных событий (смотри определение 6). Поэтому, в силу наличествующего изоморфизма, можно отождествлять образующие и случайные события. Таким образом, в силу вероятностной меры, вводимой в вероятностном пространстве, должны выполняться следующие соотношения.

1. Если заданы вероятности случайных событий из $\Sigma_n = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ (обозначим их как $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$), то, используя теоремы теории вероятностей, можно вычислить вероятности элементарных случайных событий, соответствующих конституентам (используя при этом расчеты мер из таблиц данных в работах [2, 5–7]). Затем, зная вероятности элементарных событий, можно легко рассчитывать вероятности любых событий (множеств) из $\mathrm{B}(\Sigma_i, \pi)$. Это проверено при решении достаточно сложных задач в работах [5, 6].

2. Если заданы вероятности элементарных событий (конституент), то можно вычислить вероятность любого случайного события (множества) из $\mathrm{B}(\Sigma_n, \pi)$.

§ 5. Логика $\mathbf{S}_{L_1}$ высказываний на основе ОБ

Пусть A_s — заданная алгебраическая система и $I(A_s)$ соответствующая ей онтология (смотри (5)). Свяжем с этой онтологией логику высказываний $\mathbf{S}_{L_1}$. Эта связь будет выражаться в том, что об истинности или ложности высказываний мы будем судить по отношениям между терминами в мире, который задает данная онтология. *Систему $I(A_s)$ будем называть сопряженной с логикой $\boldsymbol{S}_{L_1}$.* Множество образующих Σ_n онтологии системы будем называть терминами, при этом примем, что они не пусты и не универсальны. Вводя последовательно формулы, которые должны быть истинными, мы одновременно будем строить их интерпретацию в онтологии, сопряженной с логикой. Мир будет меняться таким образом, чтобы очередная вводимая формула была в нем истинна. При этом может получиться, что некоторые формулы либо их комплексы не могут быть интерпретированы в сопряженной АС как истинные.

Хотя термины не пусты и не универсальны, множества X и Y могут быть пустыми и универсальными. Поэтому в качестве базовых суждений примем следующие пять.

Определение 8. Конъюнктивными базовыми высказываниями (базовыми конъюнктами) и правильно построенными формулами (ППФ) в логике $\mathbf{S}_{L_1}$ являются следующие высказывания:

(1) $Eq(X', U)$ — «X — пустое множество»;

(2) $Eq(X, U)$ — «X — универсальное множество»;

(3) $A(X, U)$ — «X — неуниверсальное множество»;

(4) $A(X', U)$ — «X — непустое множество»;

(5) $A(X, Y)$, $Eq(X, Y)$, $IO(X, Y)$ — функторы ортогонального базиса силлогистики, выражающие невырожденные жергонновы отношения;

(6) конъюнктами и ППФ логики $\mathbf{S}_{L_1}$ также называются конъюнкции базовых конъюнктов и конъюнкции конъюнктов.

Имеют место равносильности $Eq(X', U)' \equiv A(X', U)$, $Eq(X, U)' \equiv A(X, U)$, $A(X', U)' \equiv Eq(X, U)$, $A(X', U)' \equiv Eq(X', U)$.

Кроме конъюнктивных базовых высказываний в логике $\mathbf{S}_{L_1}$, определим еще *неконъюнктивные высказывания.*

Определение 9. Высказывание P', где P есть базовый конъюнкт типа 5 или конъюнкт из определения 8, *есть неконъюнктивное высказывание*;
высказывание $P \cdot Q$, где хотя бы одно P или Q есть неконъюнктивное высказывание, является *неконъюнктивным высказыванием в логике* $\mathbf{S}_{L_1}$;
высказывания $P + Q$ и $P \oplus Q$, где P и Q — высказывания логики $\mathbf{S}_{L_1}$, есть *неконъюнктивные высказывания.* Здесь операции $W_F^0 = \{\ \cdot,\ ',\ +\ ,\ \oplus\ \}$ есть логические связки «и», «не», «или» и «либо».

Замечание 5. Различение между теоретико-множественными операциями дополнения до универсума, пересечения, объединения и симметрической разности и логическими связками «не», «и», «или» и «либо», которые обозначены одинаковыми символами, легко достигается с помощью контекста суждения. К высказываниям применяются логические связки, а к множествам — операции над множествами. В высказывании можно использовать скобки для упорядочения логических связок (операций). Определение правильно построенной формулы можно ввести так, как это обычно делается в классической логике высказываний. Заметим также, что вместо функторов ОБ можно писать равносильные им комплексы утверждений о равенстве (неравенстве) пустому или универсальному множеству одноэлементных или многоэлементных систем конституент канонической алгебраической системы. Будем считать, что
(1) конъюнктивные высказывания из определения 8 являются ППФ в $\mathbf{S}_{L_1}$;
(2) если Q есть ППФ, то $(Q)'$ (читается как «неверно, что Q») тоже ППФ;
(3) если Q_1 и Q_2 — ППФ, то $(Q_1 \cdot Q_2)$ и $(Q_1 + Q_2)$ тоже ППФ.

Совокупность этих трех правил из замечания 5 задает порождающий синтаксис формул, позволяющий конструировать формулы путем последовательного связывания их частей логическими связками. Из множества ППФ вполне сознательно исключены двусмысленные формулы с логической связкой «либо», но оставлены формулы с трехсмысловой связкой «или». Чтобы избежать загромождения формул скобками, целесообразно ввести приоритеты связок. Определим их традиционно: первый приоритет имеет связка «отрицание», второй приоритет имеет связка «логическое и», третий приоритет имеет связка «или». Пользуясь приоритетами, можно оставить в формуле скобки только для определения порядка выполнения операций одного приоритета либо установить порядок выполнения в порядке их следования. В качестве аксиом логики $\mathbf{S}_{L_1}$ возьмем аксиомы алгебры множеств из книги [17], выраженные простыми суждениями:

$$\begin{aligned} &Eq((X+Y),(Y+X)),\\ &Eq((X+Y)+Z),(X+(Y+Z)),\\ &Eq((X'+Y')'+(X'+Y)',X). \end{aligned} \tag{9}$$

Определение 10. Формулу логики $\mathbf{S}_{L_1}$ вида $Q_1 \oplus Q_2 \oplus \ldots \oplus Q_n$, где $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ — высказывания-конъюнкты в $\mathbf{S}_{L_1}$, будем называть исключающим дизъюнктом, или исключающей дизъюнктивной нормальной формой, сокращенно — ИДНФ. Отдельный конъюнкт можно считать ИДНФ с одним операндом.

В классической логике исключающий дизъюнкт из определения 10 принимает значение «истина» только тогда, когда истинно в точности нечетное число составляющих его конъюнктов (см. [11, с. 67]):
(1) $A(X,Y)' \equiv (X \subset Y)' \equiv G'_{13} \equiv G_6 \oplus G_7 \oplus G_9 \oplus G_{11} \oplus G_{14} \oplus G_{15} \equiv$
$\equiv (Eq(X,Y') \oplus A(X',Y) \oplus Eq(X,Y)) \oplus A(X',Y') \oplus A(X,Y') \oplus IO(X,Y)$;

(2) $Eq(X,Y)' \equiv (X=Y)' \equiv G_9' \equiv G_6 \oplus G_7 \oplus G_{11} \oplus G_{13} \oplus G_{14} \oplus G_{15} \equiv$
$\equiv Eq(X,Y') \oplus A(X',Y) \oplus A(X',Y') \oplus A(X,Y) \oplus A(X,Y') \oplus IO(X,Y)$;
(3) $(IO(X,Y))' \equiv G_{15}' \equiv G_6 \oplus G_7 \oplus G_9 \oplus G_{11} \oplus G_{13} \oplus G_{14}$.

В то же время при использовании в соотношениях 1, 2, 3 при непустых и неуниверсальных X и Y связка «либо» имеет смысл, отличный от связки «либо» в классической логике. Дело в том, что истинным, то есть имеющим место в заданной онтологии, может быть всегда в точности одно из расширенных жергонновых отношений, поэтому имеет место закон, аналогичный закону исключенного третьего. Исключая выполнение одного из семи жергонновых отношений, мы утверждаем наличие (выполнение) в точности только одного из шести оставшихся. Поэтому, чтобы отличать эту особенность использования связки «либо», далее будем писать эти равносильности с использованием знака $\bigoplus_1$ так, как это записано в равносильностях 3–5 утверждения 4, и называть изображаемый с ее помощью дизъюнкт и формулу *сингулярным дизъюнктом* (*СД*).

Определение 11. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — конъюнкты логики S_{L_1}. Тогда сингулярным дизъюнктом, составленным из этих формул (обозначение $\bigoplus_1(A_1, A_2, \ldots, A_n)$), называется совершенная дизъюнктивная нормальная форма $\bigoplus_1(A_1, A_2, \ldots, A_n) = A_1 \cdot A_2' \cdot \ldots \cdot A_n' + A_1' \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n' + \ldots + A_1' \cdot A_2' \cdot \ldots \cdot A_n$. Она выражает суждение о том, что одно и только одно из суждений $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеет значение «истина».

Утверждение 4. *Для заданной АС и непустых множеств X и Y из основы имеют место равносильности* 1–16, *при этом равносильности* 3–5 *справедливы при непустых и неуниверсальных X и Y.*
1. $A(X,U)' \equiv Eq(X,U)$.
2. $Eq(X,U)' \equiv A(X,U)$.
3. $[(X \subset U) \cdot (X' \subset U) \cdot (Y \subset U) \cdot (Y' \subset U) \cdot A(X,Y)]' \equiv$
$G_{13}' \equiv \bigoplus_1(G_6, G_7, G_9, G_{11}, G_{14}, G_{15}) \equiv$
$\equiv \bigoplus_1((Eq(X,Y'), A(X',Y), Eq(X,Y)), A(X',Y'), A(X,Y'), IO(X,Y))$.
4. $[(X \subset U) \cdot (X' \subset U) \cdot (Y \subset U) \cdot (Y' \subset U) \cdot Eq(X,Y)]' \equiv$
$\equiv G_9(X,Y)' \equiv \bigoplus_1(G_6, G_7, G_{11}, G_{13}, G_{14}, G_{15}) \equiv$
$\equiv \bigoplus_1(Eq(X,Y'), A(X',Y), A(X',Y'), A(X,Y), A(X,Y'), IO(X,Y))$.
5. $IO(X,Y)' \equiv G_{15}' \equiv \bigoplus_1(G_6, G_7, G_9, G_{11}, G_{13}, G_{14}) \equiv$
$\equiv \bigoplus_1(Eq(X,Y'), A(X',Y), Eq(X,Y), A(X',Y'), A(X,Y), A(X,Y'))$.
6. $BSN(Eq(X,Y)) \equiv BSN(X \subset Y) \cdot BSN(Y \subset X)$.
7. $IO(X,Y) \equiv (\emptyset \subset X \cdot Y) \cdot (\emptyset \subset X' \cdot Y) \cdot (\emptyset \subset X \cdot Y') \cdot (\emptyset \subset X' \cdot Y')$.
8. $IO(X,Y) \equiv (X+Y \subset U) \cdot (X+Y' \subset U) \cdot (X'+Y \subset U) \cdot (X'+Y' \subset U)$.
9. $IO(X,Y) \equiv IO(X,Y') \equiv IO(X',Y) \equiv IO(X',Y') \equiv IO(Y,X)$.
10. $IO(\emptyset,Y) \equiv IO(X,U) \equiv 0$ (*ложь*).
Если G_{k_1}, G_{k_2}, G_{k_3}, G_{k_4}, G_{k_5}, G_{k_6}, G_{k_7} — расширенные жергонновы отношения между непустыми и неуниверсальными X и Y, выраженные высказываниями логики $\boldsymbol{S}_{L_3}$, то имеют место соотношения 11–16.
11. $(G_{k_i} \cdot G_{k_j})' \equiv 1$ (*истина*), $i \neq j$.
12. $\bigoplus_1(G_{k_1}, G_{k_2})' \equiv \bigoplus_1(G_{k_3}, G_{k_4}, G_{k_5}, G_{k_6}, G_{k_7})$.
13. $\bigoplus_1(G_{k_1}, G_{k_2}, G_{k_3})' \equiv \bigoplus_1(G_{k_4}, G_{k_5}, G_{k_6}, G_{k_7})$.
14. $\bigoplus_1(G_{k_1}, G_{k_2}, G_{k_3}, G_{k_4})' \equiv \bigoplus_1(G_{k_5}, G_{k_6}, G_{k_7})$.
15. $\bigoplus_1(G_{k_1}, G_{k_2}, G_{k_3}, G_{k_4}, G_{k_5})' \equiv \bigoplus_1(G_{k_6}, G_{k_7})$.
16. $\bigoplus_1(G_{k_1}, G_{k_2}, G_{k_3}, G_{k_4}, G_{k_5}, G_{k_6})' \equiv G_{k_7}$.
Здесь k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7 — несовпадающие номера расширенных жергонновых отношений.

Пусть Q_1 и Q_2 — конъюнкты логики $\boldsymbol{S}_{L_3}$. Тогда имеют место равносильности 17–26.
17. $(Q_1 \cdot Q_2)' \equiv \bigoplus_1({Q_1}' \cdot {Q_2}', Q_1 \cdot {Q_2}', {Q_1}' \cdot Q_2)$.
18. $(Q_1 + Q_2) \equiv \bigoplus_1(Q_1 \cdot Q_2, Q_1' \cdot Q_2, Q_1 \cdot Q_2')$.
19. $(Q_1 + Q_2)' \equiv (Q_1' \cdot Q_2')$.
20. $(Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n) \equiv \bigoplus_1(\underbrace{Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_n} +$

$+\underbrace{Q_1' \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_n + Q_1 \cdot Q_2' \cdot \ldots \cdot Q_n + \ldots + Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_n'}+$

$+\underbrace{Q_1' \cdot Q_2' \cdot \ldots \cdot Q_n + Q_1 \cdot Q_2' \cdot Q_3' \cdot \ldots \cdot Q_n + \ldots Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_{n-1}' \cdot Q_n'}+$

$\ldots$

$+\underbrace{Q_1' \cdot Q_2' \cdot \ldots \cdot Q_{n-1}' \cdot Q_n + \ldots + Q_1 \cdot Q_2' \cdot \ldots \cdot Q_{n-1}' \cdot Q_n'}.$

21. $\bigoplus_1(\bigoplus_1(Q_1, Q_2), Q_3) \equiv \bigoplus_1(Q_1, Q_2, Q_3)$.
22. $\bigoplus_1\left(\bigoplus_1(Q_1, Q_2), \bigoplus_1(Q_3, Q_4)\right) \equiv \bigoplus_1(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$.
23. $\bigoplus_1(Q_1, Q_2) \cdot \bigoplus_1(Q_3, Q_4) \equiv \bigoplus_1(Q_1 \cdot Q_3, Q_2 \cdot Q_3, Q_1 \cdot Q_4, Q_2 \cdot Q_4)$.
24. $\bigoplus_1(Q_1, Q_2) \cdot Q_3 \equiv \bigoplus_1(Q_1 \cdot Q_3, Q_2 \cdot Q_3)$.
25. $\bigoplus_1(Q_1, \bigoplus_1(Q_2, Q_3)) \cdot Q_4 \equiv \bigoplus_1(Q_1 \cdot Q_4, \bigoplus_1(Q_2, Q_3) \cdot Q_4) \equiv \bigoplus_1(Q_1 \cdot Q_4, Q_2 \cdot Q_4, Q_3 \cdot Q_4)$.
26. $\bigoplus_1(Q_1 \cdot Q_2, {Q_1}' \cdot Q_2, Q_1 \cdot {Q_2}')' \equiv (Q_1 + Q_2)' \equiv ({Q_1}' \cdot {Q_2}')$.
27. $(Q')' \equiv Q$.

Опишем процедуру интерпретации формулы логики $\mathbf{S}_{L_1}$ в сопряженной с ней онтологии $I(A_s)$. С помощью интерпретации мы будем сопоставлять формуле значение 1 — «истина», либо 0 — «ложь». Сначала определим, как производить интерпретацию конъюнктивных формул. Интерпретацией конъюнктивной формулы в данной онтологии $I(A)$ называется результат операции проверки выполнения всех отношений, задаваемых базовыми конъюнктами этой формулы. *Если все отношения в онтологии выполняются, то конъюнкт имеет значение «истина». Если хотя бы одно из задаваемых формулой бинарных отношений не выполняется, то формуле присваивается значение «ложь» в данной онтологии. Если построенная формула не является конъюнктом, то сначала вычисляются истинностные значения всех составляющих ее конъюнктов, затем с помощью функций булевой алгебры вычисляется ее истинностное значение в данной онтологии.*

Изменения знаний о мире могут потребовать изменения его модели (онтологии). Эти изменения можно произвести, добавляя или удаляя в универсум онтологии некоторое множество индикаторов конституент или модифицируя семейство Σ_n. Например, для введения знания о том, что термины X и Y находятся в отношении $A(X, Y)$, необходимо и достаточно удалить из универсума те индикаторы конституент, которые входят в пересечение $X \cdot Y'$ (см. теорему 2).

Пусть U — универсум онтологии $I(A_s)$, и нам требуется ввести в множество истинных в данной в логике $I(A_s)$ конъюнктов еще один конъюнкт Q. При этом может оказаться так, что в рамках данной онтологии конъюнкт не может интерпретироваться как истинный. Таким образом, возможны два случая: конъюнкт можно интерпретировать в данной онтологии или в ее модификации как истинный либо это невозможно сделать. Согласно определению конъюнкта, он состоит из формул типа 1–5, которые описаны в определении 8. При этом так же, как в традиционной силлогистике, не будем допускать пустоты образующих терминов. Поэтому формулы 1–4 из определения 8 будем лишь проверять на истинность–ложность, так же как и базовый конъюнкт $IO(X, Y)$, который, согласно теореме 4, при введении может лишь расширить исходный универсум (смотри теорему 4). Способ модификации онтологии путем введения в неё базовых конъюнктов типа $A(X, Y)$ и $Eq(X, Y)$ основан на теоремах 2 и 3. Формулы типа 1–5, составляющие конъюнкт, могут применяться в любом порядке.

Процедура интерпретации заключается в том, что каждому выбираемому в произвольном порядке базовому конъюнкту конъюнкта Q логики $\mathbf{S}_{L_1}$ однозначно сопоставляется его BSN, истинностное значение («истина» либо «ложь») и, возможно, модифицированный универсум. Если все базовые конъюнкты имеют значение «истина» и $U \neq \emptyset$, то конъюнкт Q, составленный из них, имеет значение «истина», иначе — «ложь». Ниже указано, как сопоставить базовым конъюнктам формулы Q их BSN и истинностные значения.

Правила вычисления BSN и истинностных значений для базовых конъюнктов в данной онтологии.

1. Если выполняется условие $X' = U$, то формула $Eq\,(X', U)$ принимает значение «истина» и $BSN(Eq\,(X', U)) := U$; в противном случае — значение «ложь» и $BSN(Eq\,(X', U)) := \emptyset$.

2. Если выполняется условие $X = U$, то формула $Eq(X, U)$ принимает значение «истина» и $BSN(Eq(X, U)) := U$; в противном случае — значение «ложь» и $BSN(Eq(X, U)) := \emptyset$.

3. Если выполняется условие $X \subset U$, то формуле $A(X,U)$ сопоставляется значение «истина» и $BSN(A(X,U)) := U$; в противном случае — значение «ложь» и $BSN(A(X,U)) := \emptyset$.

4. Если выполняется условие $X' \subset U$, то формуле $A(X',U)$ сопоставляется значение «истина» и $BSN(A(X',U)) := U$; в противном случае — значение «ложь» и $BSN(A(X',U)) := \emptyset$.

5. Если выполняется условие $U = (X'+Y)\cdot(X+Y' \subset U)$, то формуле $A(X,Y)$ сопоставляется значение истина и $BSN(A(X,Y)) := U$; в противном случае $U := X'+Y$; при этом если $U \neq \emptyset$, то формуле $A(X,Y)$ сопоставляется значение «истина», в противном случае — значение «ложь» и $BSN(A(X,Y)) := \emptyset$.

6. Если выполняется условие $U = (X+Y)\cdot(X'+Y')$, то формуле $Eq(X,Y)$ сопоставляется значение истина и $BSN(Eq(X,Y)) := U$; в противном случае $U := (X+Y)\cdot(X'+Y')$; при этом если $U \neq \emptyset$, то формуле $Eq(X,Y)$ сопоставляется значение «истина», в противном случае — значение «ложь» и $BSN(Eq(X,Y)) := \emptyset$.

7. Если выполняется условие $(X+Y \subset U)\cdot(X'+Y \subset U)\cdot(X+Y' \subset U)\cdot(X'+Y' \subset U)$, то формуле $IO(X,Y)$ сопоставляется значение «истина» и $BSN(IO(X,Y)) := U$; в противном случае — значение «ложь» и $BSN(IO(X,Y)) := \emptyset$.

Определение 12. Правило введения в онтологию $I = \langle U, X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle$ отношения, задаваемого конъюнктивной формулой Q, заключается в преобразовании универсума и образующих в соответствии с входящими в конъюнкт базовыми формулами. С помощью последовательного применения правил 1–7 ко всем базовым формулам вычисляется измененный универсум $U(Q)$ как пересечение BSN всех входящих в него базовых конъюнктов. Преобразование $I = \langle U, X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle$ производится так: $U := U \cdot BSN(Q)$, $U(Q) := U$ и $I(Q) = \langle U(Q), X_1(Q), X_2(Q), \ldots, X_n(Q)\rangle$, где $X_i(Q) = X_i \cdot U(Q)$ и $BSN(Q) = U(Q)$.

Определение 13. Правила вычисления истинностного значения ППФ Q логики $\mathbf{S}_{L_1}$.

1. Если Q имеет значение «истина», то Q' имеет значение «ложь», и наоборот.

2. Если Q_1, Q_2 имеют значение «истина», то $Q_1 \cdot Q_2$ имеет значение «истина»; иначе $Q_1 \cdot Q_2$ имеет значение «ложь».

3. $Q_1 + Q_2$ имеет значение «истина», если истинна формула $\bigoplus_1(Q_1\cdot Q_2, Q_1'\cdot Q_2, Q_1\cdot Q_2')$.

Рассмотрим задачу Порецкого о птицах в зоосаде. Для этого построим BSN четырехмерного отношения между терминами. Пусть X — множество птиц качества X, Y — множество птиц качества Y, S — множество певчих птиц, G — множество крупных птиц, то есть имеем четыре термина X, Y, G, S. При этом

(1) птицы певчие (S) — крупные или обладающие качеством Y;

(2) птицы без качества Y — или не крупные, или не имеют качества X;

(3) птицы певчие, вместе с крупными, объединяют всех птиц с качеством X;

(4) каждая не крупная птица является певчей или обладает качеством X;

(5) среди птиц с качеством X совсем нет таких птиц с качеством Y, которые, не будучи певчими, были бы крупными.

Требуется: (a) определить, были ли птицы качества X певчими или нет — $A(X,S) \oplus Eq(X,S)$; (b) узнать, содержится ли множество птиц качества X в множестве птиц качества Y, и наоборот — $A(X',Y) \oplus IO(X,Y) \oplus A(X,Y) \oplus A(Y,X) \oplus Eq(X,Y)$.

Посылки задачи можно выразить в ортогональном базисе следующим образом:

$$\begin{array}{ll} P1)\ A(S, Y+G) \oplus Eq(S, Y+G); & P2)\ A(Y', X'+G') \oplus Eq(Y', X'+G'); \\ P3)\ A(X, S+G) \oplus Eq(X, S+G); & P4)\ A(G', S+X) \oplus Eq(G', S+X); \\ P5)\ A(X, (Y\cdot S'\cdot G)') \oplus Eq(X, (Y\cdot S'\cdot G)'). & \end{array} \tag{10}$$

Для ответа на поставленные вопросы нужно рассмотреть 32 варианта возможных односмысловых сочетаний этих посылок и построить их BSN; после этого проверить, выполняются ли отношения, о которых говорится в требованиях задачи. Решим задачу для одного из таких сочетаний, полученного при замене двусмысленного аристотелева AXY на $A(X,Y)$. Имеем:

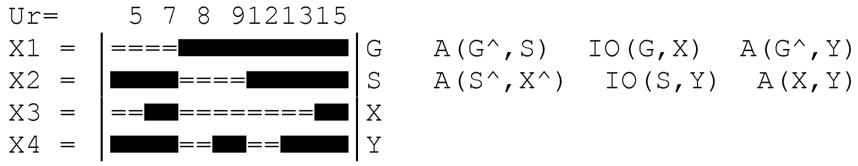

Рис. 4. Четырехмерное отношение терминов задачи Порецкого

$P1)$ $A(S, Y+G)$; $P2)$ $A(Y', X'+G')$; $P3)$ $A(X, S+G)$; $P4)$ $A(G', S+X)$; $P5)$ $A(X, (Y \cdot S' \cdot G)')$. Конъюнкция посылок есть конъюнктивная ППФ в логике $\mathbf{S}_{L_1}$. Введем отношение, задаваемое этой формулой в исходный универсум, отражающий независимость в совокупности всех исходных терминов. Как и в традиционной силлогистике, предполагаем отсутствие пустых терминов в посылках. Согласно алгоритму из работы [3], BSN, индуцированное посылками, получается сужением BSN для независимой системы терминов. Поскольку терминов 4, то количество непустых конституент, в случае когда все различные термины независимы в совокупности, то есть заданная алгебраическая система является канонической, будет равно $2^4 = 16$; однако каждое из 5 условий задачи сужает редуцированный универсум. Для решения нужно выразить каждый функтор, выражающий посылку, системой базовых равенств и построить соответствующий этим равенствам редуцированный универсум $U_r^i = BSN(P_i)$, $i = 1, \ldots, 5$; затем в качестве универсума — носителя четырехмерного отношения терминов задачи — взять пересечение полученных универсумов $U_r = U_r^1 \cdot U_r^2 \cdot U_r^3 \cdot U_r^4 \cdot U_r^5$; после этого в полученном универсуме получить ответы на поставленные вопросы, то есть вычислить отношения между терминами, о которых идет речь в вопросах задачи. Изначально для независимых в совокупности множеств $\Sigma = \{G, S, X, Y\}$, упорядоченных в заданной алгебраической системе как $\pi = \langle G, S, X, Y \rangle$, универсум выражается через индикаторы конституент как $U_r = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]$ (см. рис. 3).

Алгоритм построения BSN многомерного отношения, задаваемого конъюнктивной формулой, основан на теоремах 2 и 3 и изложен в работе [3]. Индуцированный посылками универсум, построенный компьютерной программой, равен $[1, 7, 8, 9, 12, 13, 15]$ (см. рис. 4).

Рассмотрим подмножество формул, которые имеют вид сингулярных дизъюнктов, операндами которых являются конъюнктивные ППФ логики $\mathbf{S}_{L_1}$. Посылки задачи Порецкого и посылки силлогизмов Аристотеля можно представить в виде сингулярного дизъюнкта. Для задачи Порецкого сингулярный дизъюнкт содержит 32 конъюнктивные ППФ. Рассмотрим процедуру проверки логического следования в семантическом смысле из посылок в виде сингулярного дизъюнкта. Попытаемся выделить конструкт, который мы предлагаем на роль *импликации*, в смысле, обозначенном во введении.

Определение 14. Логическое следование в семантическом смысле в логике $\mathbf{S}_{L_1}$ — это связь (отношение) между ППФ $\mathbf{G}$ в виде сингулярного дизъюнкта (СД) логики $\mathbf{S}_{L_1}$, называемой посылкой, и ППФ $\mathbf{B}$ в виде СД логики $\mathbf{S}_{L_1}$, называемой заключением, отражающая тот факт, что, в силу только логической структуры посылки и, значит, независимо от ее содержания, нельзя приписать формуле $\mathbf{G}$ значение «истина» в данном мире, не будучи при этом вынужденным приписать это значение и формуле $\mathbf{B}$ — заключению. В этом случае говорят о логическом следовании $\mathbf{B}$ из $\mathbf{G}$ в семантическом смысле и записывают этот факт как утверждение $\mathbf{G} \models_{S_{L_1}} \mathbf{B}$, читаемое так: из $\mathbf{G}$ в логике $\mathbf{S}_{L_1}$ семантически следует $\mathbf{B}$.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий возможность компьютерной проверки силлогизмов Аристотеля на логическое следование в семантическом смысле в логике $\mathbf{S}_{L_1}$. *Адекватное выражение категорических суждений Аристотеля в ОБ представлено в этой и предыдущих публикациях автора; вследствие этого можно утверждать, что силлогистика Аристотеля погружена в логику $\mathbf{S}_{L_1}$*. Для иллюстрации возможности компьютерной проверки посмотрим

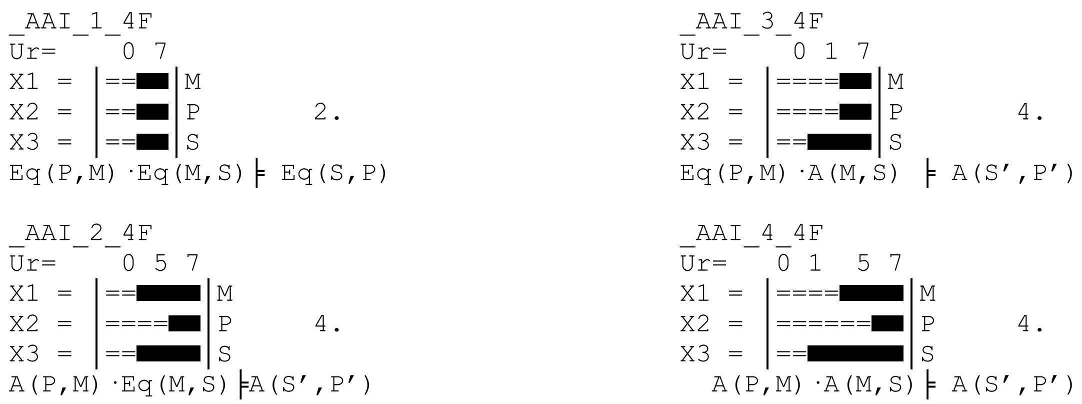

Рис. 5. Иллюстрация проверки правильности модуса AAI четвертой фигуры

как можно выразить в логике $\mathbf{S}_{L_1}$ процесс проверки модуса AAI четвертой фигуры:

$$(AMS) \cdot (APM) \models_{S_{L_1}} (ISP).$$

В ортогональном односмысловом базисе модус имеет вид

$$[Eq(P,M)+A(P,M)]\cdot[Eq(M,S)+A(M,S)] \models_{S_{L_1}} [A(S',P), Eq(S,P), A(S,P), A(S',P), IO(S,P)].$$

После редукции модуса к форме сингулярного дизъюнкта он принимает следующий вид (см. равносильность 22 из утверждения 4):

$$\bigoplus\nolimits_1[\underbrace{Eq(P,M)\cdot Eq(M,S)}_{1}, \underbrace{A(P,M)\cdot Eq(M,S)}_{2}, \underbrace{Eq(P,M)\cdot A(M,S)}_{3}, \underbrace{A(P,M)\cdot A(M,S)}_{4}] \models_{S_{L_1}}$$
$$\bigoplus\nolimits_1[\underbrace{A(S',P)}_{1}, \underbrace{Eq(S,P)}_{2}, \underbrace{A(S,P)}_{3}, \underbrace{A(S',P')}_{4}, \underbrace{IO(S,P)}_{5}].$$

Поскольку посылки имеют четыре смысла, а заключение по модусу должно быть пятисмысловым, то очевидно, что модус требует уточнения. На рисунке 5 в виде линейных диаграмм, построенных компьютером, показаны четыре следствия из четырех смыслов посылок. При этом в исходную модель мира, в которой $BSN(U) = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$ и все термины независимы в совокупности, вводятся отношения, соответствующие конъюнктам сингулярного дизъюнкта посылок. Полученные следствия, то есть факт наличия в измененной онтологии определенного отношения между крайними терминами силлогизма, видны на рисунке 5. На роль конструкта, посредством которого выявляется отношение логического следования, в логике вполне подходит алгоритм (обозначим его $\mathbf{A}_{S_{L_1}}$) вычисления BSN для конъюнкта логики $\mathbf{S}_{L_1}$, описанный в работе [3]. Для установления правильности силлогизма достаточно показать наличие семантического следования из вышеуказанного четырехсмыслового СД посылок в пятисмысловой СД следствия. Из рисунка 5 видно, что отсутствуют случаи 1, 3, 5 заключения. Уточнение имеет вид:

$$(Eq(P,M) + A(P,M)) \cdot (Eq(M,S) + A(M,S)) \models_{S_{L_1}} (Eq(S',P') + A(S',P')),$$

или, в базисе Аристотеля,

$$(APM) \cdot (AMS) \models (AS'P'),$$

здесь $(AS'P' \equiv APS)$.

Из проверенных таким образом 24 правильных модусов уточнения требуют 9. После удаления дублирующих остается не 19, как принято считать, а 13. Результат проверки будет изложен в другой статье.

Предлагаемая методика позволяет поставить в соответствие (в виде таблиц решений) каждому из различаемых смыслов посылок единственный смысл заключения. Это важно при практическом использовании силлогизмов и более сложных умозаключений, выражаемых как семантическое следование в приложениях логики $\mathbf{S}_{L_1}$.

Отн.	Бул. функ.	Прообраз	Отн.	Бул. функ.	Прообраз
G_1	$x \cdot y$	$X \cdot Y$	G_9	$x' \cdot y' + x \cdot y$	$X' \cdot Y' + X \cdot Y$
G_2	$x \cdot y'$	$X \cdot Y'$	G_{10}	y'	Y'
G_3	x	X	G_{11}	$x + y'$	$X + Y'$
G_4	$x' \cdot y$	$X \cdot Y$	G_{12}	x'	X'
G_5	y	Y	G_{13}	$x' + y$	$X' + Y$
G_6	$x' \cdot y + x \cdot y'$	$X'Y + XY'$	G_{14}	$x' + y'$	$X' + Y'$
G_7	$x + y$	$X + Y$	G_{15}	1	U
G_8	$x' \cdot y'$	$X' \cdot Y'$	G_0	0	$\emptyset$

Рис. 6. Иллюстрация соответствия между булевыми функциями и формулами алгебры множеств

В заключение рассмотрим проблематику логических уравнений, интерпретируя логические уравнения в вырожденной булевой алгебре в уравнениях невырожденной алгебры.

Пусть $F(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$ — правильно построенная формула в булевой алгебре на основе канонической алгебраической системы A_s с упорядоченными образующими, заданной в виде онтологии $I^0(A_s) = \langle U^0, X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0 \rangle$. Множества $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ являются множествами из основы $\mathrm{B}(\Sigma_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда конъюнктивное высказывание $Eq(F(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k), U)$ логики $\mathbf{S}_{L_1}$ будем называть логическим уравнением в невырожденной булевой алгебре. Этому уравнению можно поставить в соответствие уравнение $Eq(F(f_1(\tilde{X}_n), f_2(\tilde{X}_n), \ldots, f_k(\tilde{X}_n)), U)$, в котором множества $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ выражены через образующие АС. Таким образом, всегда можно привести исходное уравнение относительно небазовых терминов $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ к уравнению $Eq(\Theta(X_1, X_2, \ldots, X_n), U)$ относительно образующих АС (базовых терминов). Последнему уравнению $Eq(\Theta(X_1, X_2, \ldots, X_n), U)$ соответствует характеристическое множество, определяемое $BSN(\Theta(X_1, X_2, \ldots, X_n))$. Это множество будем называть решением данного логического уравнения. Теперь произведем одно-однозначное отображение формулы $\Theta(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ в формулу $\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в вырожденной алгебраической системе с образующими $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, являющимися индикаторами образующих $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Логическому уравнению

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$$

одно-однозначно соответствует логическое уравнение $Eq(\Theta(X_1, X_2, \ldots, X_n), U)$, решению которого одно-однозначно соответствует характеристическое множество номеров полных конъюнкций. Каждый номер из этого множества, представленный двоичным кодом, дает одно из решений вырожденного логического уравнения $\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$.

Рассмотрим пример $F(a, b, c) = (a' + c \Rightarrow b' \cdot c \oplus a) \cdot (a \Leftrightarrow b') = 1$. Сопоставляем ему уравнение $Eq(F(A, B, C), U) \equiv Eq((A' + C \Rightarrow B' \cdot C \oplus A) \cdot (A \Leftrightarrow B'), U)$ в канонической заданной АС $I^0 = \langle U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},\ A = \{4, 5, 6, 7\},\ B = \{2, 3, 6, 7\},\ C = \{1, 3, 5, 7\} \rangle$. При этом заменим операции $X \oplus Y$ на $X \cdot Y' + X' \cdot Y$, $X \Rightarrow Y$ на $X' + Y$, $X \Leftrightarrow Y$ на $X \cdot Y + X' \cdot Y'$, согласно таблице на рисунке 6. Тогда уравнение преобразуется в равносильное

$$Eq((A \cdot C' + B' \cdot C \cdot A' + (B + C') \cdot A) \cdot (A \cdot B' + A' \cdot B), U).$$

Далее находим характеристическое множество уравнения по формуле

$$U := (A \cdot C' + B' \cdot C \cdot A' + (B + C') \cdot A) \cdot (A \cdot B' + A' \cdot B).$$

В результате вычислений получаем $U = \{4\}$. Это означает, что решение для вырожденного уравнения есть $\{\langle 100 \rangle\}$. Полученное решение соответствует решению из [11, с. 17–18], полученному традиционным способом.

Заключение

В статье обоснована возможность и актуальность использования логики $\mathbf{S}_{L_1}$ взамен классической логики высказываний, которую в формальной логике не смогли органично объединить с силлогистикой Аристотеля. В рамках неклассических логик до сих пор удовлетворительно не решена проблема непарадоксального выражения на формальном языке отношения логического следования (что считать импликацией?). Предлагаемая в статье логика высказываний $\mathbf{S}_{L_1}$ лишена этих недостатков. В качестве языкового конструкта, выражающего смысл логического следования, предлагается алгоритм построения модели многоместного логического отношения между терминами в форме характеристического множества (BSN) из работы [3]. Этот алгоритм можно выразить языковым конструктом (алгоритм — это последовательность инструкций, «понятная» исполнителю). Таким образом, данная импликация является еще и конструктивной. Она (он: алгоритм) сопоставляет каждому односмысловому варианту посылок односмысловой вариант следствия. При наличии следования односмысловой конъюнкт следствия имеет значение «истина» в онтологии (алгебраической системе), которая получилась после введения в исходную систему отношений, задаваемых конъюнктом из СД посылок. В этом случае имеет место логическое следование в семантическом смысле между этими двумя конъюнктами. Если хотя бы одному смыслу посылок соответствует ложное значение всех односмысловых следствий, то это означает, что логического следования нет. Для традиционной силлогистики в логике $\mathbf{S}_{L_1}$ исходной онтологией является каноническая онтология с образующими терминами из рассматриваемого силлогизма. Таким образом, можно алгоритмически установить соответствие каждого из смыслов посылок и каждого из смыслов, вычисляемых по характеристическим множествам заключений.

Импликация — это алгоритм $\boldsymbol{A}_{S_{L_1}}$ сопоставления каждому смыслу посылки его характеристического множества.

В работе также обоснована интерпретация сопряженной с заданной алгебраической системой невырожденной булевой алгебры как конечной σ-алгебры со всеми вытекающими из этого следствиями для автоматизации решения прикладных вероятностных задач. Таким образом, всего лишь замена в традиционной силлогистике многосмыслового базиса Аристотеля на односмысловой ортогональный базис, изоморфный отношениям «равносильно», «влечет», «независимы» между терминами рассуждений и случайными событиями в теории вероятностей, позволяет прямо трактовать суждения в логике $\mathbf{S}_{L_1}$ как постановку прикладных вероятностных задач и задач диагностики [4–7]. Рассмотрены примеры и указаны ссылки на примеры решения задач. Предлагается логика $\mathbf{S}_{L_1}$ на базе ортогонального базиса, в основе которой уточненная математическая модель — невырожденная булева алгебра и сопряженная с ней алгебраическая система на основе множеств. В работе описываются неклассическая интерпретация умозаключений в ортогональном базисе и возможности эффективной компьютерной проверки логического следования в семантическом смысле, а также обоснован новый метод решений логических уравнений. В заключение автор выражает признательность профессорам Н. Н. Непейводе и А. П. Бельтюкову за замечания и доброжелательное обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бочаров В.А., Маркин В.И. Силлогистические теории. М.: Прогресс-Традиция, 2010. 336 с.
2. Сметанин Ю.М. Анализ парадоксов материальной импликации в ортогональном базисе силлогистики // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 4. С. 144–162.
3. Сметанин Ю.М. Алгоритм решения полисиллогизмов в ортогональном базисе посредством исчисления конституентных множеств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 4. С. 172–185.
4. Сметанин Ю.М., Сметанин М.Ю. Медицинская диагностика и ортогональный базис силлогистики // Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем (OSTIS–2012): материалы второй международной конференции. Минск, 2012. С. 289–296.

5. Сметанин Ю.М. Вероятностная логика и ортогональный базис силлогистики // Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем (OSTIS–2012): Материалы Второй Международной конференции. Минск, 2012. С. 479–488.
6. Сметанин Ю.М. Логико-вероятностная модель для расчета риска неуспеха менеджмента на основе ортогонального базиса силлогистики // Вестник Удмуртского университета. Экономика и право. 2012. Вып. 3. С. 66–73.
7. Сметанин Ю.М. Формальная логика на основе ортогонального базиса силлогистики // Логика, язык и формальные модели: сб. статей. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2012. С. 264.
8. Кулик Б.А., Зуенко А.А., Фридман А.Я. Алгебраический подход к интеллектуальной обработке данных и знаний. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. 235 с.
9. Кулик Б.А. Логические основы здравого смысла. СПб.: Политехника, 1997. 131 с.
10. Владимиров Д.А. Булевы алгебры. М.: Наука, 1969. 320 с.
11. Закревский А.Д. Логические уравнения. М.: Едиториал УРСС, 2003. 96 с.
12. Горбатов В.А. Теория частично упорядоченных систем. М.: Советское радио, 1976. 336 с.
13. Колмогоров А.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: сб. статей. М.: Наука, 1986. 535 с.
14. Рябинин И.А. Логико-вероятностное исчисление как аппарат исследования надежности и безопасности структурно-сложных систем // Автоматика и телемеханика. 2003. № 7. С. 178–186.
15. Соложенцев Е.Д. Управление риском и эффективностью в экономике: логико-вероятностный подход. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 250 с.
16. Рассел С., Норвиг П. Искусственный интеллект: современный подход. М.: Издательский дом Вильямс, 2006. 1408 с.
17. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? М.–Л.: ОГИЗ, 1947. 664 с.

Поступила в редакцию 11.12.2012

Сметанин Юрий Михайлович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра высшей математики и информатики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: gms1234gms@rambler.ru

Yu. M. Smetanin
Propositional logic on the basis of algebraic system containing traditional syllogistics

Keywords: syllogistics, orthogonal basis of syllogistics, Boolean algebra, calculations of constituent, homomorphism of algebraic systems, logical sequence in semantic sense, probability, logical equations.

Mathematical Subject Classifications: 03A10, 03G05, 06E30

The article explains the reasons to replace the multi-semantic basis of Aristotle in classical logic and traditional syllogistic with a mono-semantic basis, isomorphic to relationships “equivalent”, “entailing”, “independent”, which happen between terms of reasoning and random events in probability theory. Theoretical results and applications are discussed. The author identifies the drawbacks of the mathematical model which is the basis of classical logics. An advanced version of the mathematical model which is logic $\mathbf{S}_{L_1}$, based on non-degenerative Boolean algebra and an adjoint algebraic set-based system, is proposed. The article considers a non-classical interpretation of judgments in the orthogonal basis of syllogistics; it also describes the opportunities of effective computer validation of logical implication in semantics. A new method of solving logic equations is presented. The samples of solutions are presented.

REFERENCES

1. Bocharov V.A., Markin V.I. *Sillogisticheskie teorii* (Syllogistic theories), Moscow: Progress–Traditsiya, 2010.

2. Smetanin, Yu.M. Analysis of paradoxes of tangible implication in the orthogonal basis of syllogistics, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 4, pp. 144–162.

3. Smetanin Yu.M. Algorithm for solving polysyllogizm in the orthogonal basis by calculating the constituent sets, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 4, pp. 172–185.

4. Smetanin Yu.M., Smetanin M.Yu. Medical diagnostics and orthogonal basis of syllogistics, *Proceedings of 2nd International Conference (OSTIS–2012)*, Minsk, 2012, pp. 289–296.

5. Smetanin Yu.M. Probabilistic logics and orthogonal basis of syllogistics, *Proceedings of 2nd International Conference (OSTIS–2012)*, Minsk, 2012, pp. 479–488.

6. Smetanin Yu.M. Orthogonal logic-probable model for risk estimation in management, *Vestn. Udmurt. Univ. Econ. Law*, 2012, no. 3, pp. 66–73.

7. Smetanin Yu.M. Formal logics on the orthogonal basis of syllogistics, *Logics, Language and Formal Models: Transactions*, St. Petersburg: St. Petersburg State University, 2012, pp. 131–144.

8. Kulik B.A., Zuenko A.A., Fridman A.Ya. *Algebraicheskii podkhod k intellektual'noi obrabotke dannykh i znanii* (Algebraic approach to intellectual data and knowledge processing), *Saint-Petersburg State Polytechnical University*, 2010.

9. Kulik B.A. *Logicheskie osnovy zdravogo smysla* (Logic basis of the common sense), St. Petersburg: Politekhnika, 1997.

10. Vladimirov D.A. *Bulevy algebry* (Boolean algebras), Moscow: Nauka, 1969.

11. Zakrevskii A.D. *Logicheskie uravneniya* (Logical equations), Moscow: Editorial URSS, 2003.

12. Gorbatov V.A. *Teoriya chastichno uporyadochennykh sistem* (The theory of partially-ordered systems), Moscow: Soviet radio, 1976.

13. Kolmogorov A.N. *Teoriya veroyatnostei i matematicheskaya statistika* (Probability theory and mathematical statistics), Moscow: Nauka, 1986.

14. Ryabinin I.A. Logical probabilistic calculus as the tool of research reliability and safety of structurally-complicated systems, *Avtomatika i Telemekhanika*, 2003, no. 7, pp. 178–186.

15. Solozhentsev E.D. *Upravlenie riskom i effektivnost'yu v ekonomike: logiko-veroyatnostnyi podkhod* (Risk and efficiency management in economics: logical probabilistic approach), St. Petersburg: St. Petersburg State University, 2009, 250 p.

16. Russell S., Norvig P. *Artificial intellect: modern approach. Second edition*, Williams Publishing House, 2006.

17. Courant R., Robbins H. *What is mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, London: Oxford University Press, 1996.

Received 11.12.2012

Smetanin Yurii Mikhailovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: gms1234gms@rambler.ru