

УДК 512.77, 517.912

© С. В. Соколов

ДВИЖЕНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С ВИХРЕВОЙ ПАРОЙ, В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В работе рассмотрена задача о движении в поле силы тяжести твердого тела, обладающего формой кругового цилиндра, взаимодействующего с N точечными вихрями, в идеальной жидкости. В общем случае циркуляция жидкости вокруг цилиндра предполагается отличной от нуля. Уравнения движения системы представлены в гамильтоновой форме. Указаны первые интегралы системы — горизонтальная и вертикальная компоненты импульса, — последний из которых, очевидно, неавтономный. Основное внимание сконцентрировано на исследовании конфигурации, аналогичной задаче Фёшля: цилиндр движется в поле тяжести в сопровождении вихревой пары ($N = 2$). В этом случае циркуляция вокруг цилиндра равна нулю, а уравнения движения рассматриваются на некотором инвариантном многообразии. Показано, что, в отличие от конфигурации Фёшля, в поле силы тяжести относительное равновесие вихрей невозможно. Рассмотрена ограниченная задача: цилиндр предполагается достаточно тяжелым, вследствие чего вихри не оказывают влияния на его падение. Как полная, так и ограниченная задача исследована численно, в результате отмечено качественное сходство поведения решений: в большинстве случаев взаимодействие вихревой пары и цилиндра носит характер рассеяния.

Ключевые слова: точечные вихри, вихревая пара, гамильтоновы системы, редукция.

§ 1. Введение

Движение твердого тела в идеальной жидкости в присутствии вихревых структур является одной из фундаментальных проблем современной гидродинамики.

Обзор классических и современных работ по динамике точечных вихрей внутри и вне круговой области можно найти в одноименной главе книги [3]. Одним из первых исследований уравнений движения точечных вихрей на плоскости были выполнены Кирхгофом в работе [15]. Уже Гельмгольцем [12] было рассмотрено движение вихревых нитей, взаимодействующих с плоскостью. Общая форма уравнений движения точечных вихрей внутри и вне произвольной области была получена Раусом [17].

В работе Фёшля [11] исследовано движение вихревой пары вокруг кругового цилиндра в набегающем потоке. Устойчивость и хаотизация движения в задаче Фёшля были рассмотрены в [2], а также в ряде статей, указанных в списке литературы [2].

В работе рассматривается падение твердого тела в идеальной жидкости, взаимодействующего с симметричной парой точечных вихрей. Физически такая ситуация возникает, если предполагать, что жидкость является не слишком вязкой, основные эффекты вязкости сосредоточены в пограничном слое, а в процессе движения вихри могут срывать с тела, а затем уже взаимодействие тела и вихрей происходит по законам идеальной жидкости. Аналогичным образом возникает циркуляция вокруг тела [16], но это, как правило, требует наличия острых кромок и дополнительно также приводит к образованию и срыву вихрей (вследствие постулата Кутта–Жуковского).

Влияние вязкости на падение тела состоит в наличии сопротивления движению, а сопротивление — это не только внутреннее трение жидкости, но и затраты энергии на генерацию вихрей. Поэтому представляется целесообразным и более простым с аналитической точки зрения рассмотрение вместо схода вихрей в вязкой жидкости движения тела в идеальной жидкости, в которой существует завихренность. Простейший эффект завихренности — это наличие

циркуляции при обтекании тела. Падение тела с циркуляцией рассмотрено, например, в работах [1, 4, 6]. В [1] показано, что при наличии циркуляции возникающая подъемная сила приводит к тому, что тело движется в некоторой горизонтальной полосе. Дальнейшим развитием представлений о влиянии завихренности на тела является задача о движении тела при наличии точечных вихрей. Гамильтонов формализм для точечных вихрей первоначально был развит Кирхгофом [15]. В работах [8, 10, 19] этот формализм был распространен на случай движения цилиндрического твердого тела и точечных вихрей в отсутствие тяжести. В работе [19] были получены *точные* уравнения движения, в статье [8] доказана интегрируемость задачи о движении цилиндра и вихря. В работе [10] указаны некоторые частные решения и исследована качественная картина движения цилиндра и вихря.

Следующим этапом в развитии послужила возникшая в 60-х годах XX века модель Брауна–Майкла (Brown–Michael), где сход вихрей с острой кромки тела постулируется (поскольку, как известно, возникать в идеальной жидкости вихри не могут), а их интенсивность меняется со временем. Движение твердого тела и вихрей исследуется с помощью модели Брауна–Майкла, например, в работе [16].

В отличие от точечных вихрей падение тела в присутствии распределенной завихренности («вихревая пелена») изучено в работе [13]. Но, хотя в работах [13, 16] получены точные уравнения, система из-за своей сложности исследуется авторами численно.

Отметим также работу [14], где исследовано движение вихря в предположении поступательного движения цилиндра. Таким образом, рассмотрение в [14] посвящено вопросам рассеяния, что не позволяет учесть влияние вихря на движение цилиндра. Основное внимание в работе [14] сконцентрировано на исследовании возможности хаотических режимов движения вихря и хаотического рассеяния при возмущении движения цилиндра.

Исторически проявление стохастичности в задаче рассеяния вихревых диполей одними из первых рассмотрели авторы работы [5]. Современные результаты в задаче рассеяния вихревых пар можно найти в работе [22].

В дальнейшем в работе [18] была рассмотрена задача взаимодействия симметричной вихревой пары с круговым цилиндром.

В предыдущих работах [21] исследовалась задача о движении тяжелого цилиндра и одного вихря в поле тяжести при наличии отличной от нуля циркуляции. В [20] эти результаты обобщены на случай N вихрей, а также приведены сечения Пуанкаре, свидетельствующие о неинтегрируемости задачи о движении цилиндра и одного вихря в поле тяжести.

В данной статье исследовано движение массивного кругового цилиндра и вихревой пары в поле тяжести. Циркуляция жидкости вокруг цилиндра здесь предполагается равной нулю. Случай ненулевой циркуляции предполагается рассмотреть в дальнейших работах.

§ 2. Постановка задачи

Рассмотрим твердое тело, имеющее форму кругового цилиндра, которое движется в безграничном объеме идеальной жидкости в поле силы тяжести. Предполагается что жидкость совершает плоскопараллельное движение и покоится на бесконечности. Образующие цилиндра ортогональны плоскости потока. В жидкости движутся две прямолинейные вихревые нити, каждая из которых параллельна образующим цилиндра и имеет интенсивность Γ_1 и Γ_2 .

Хорошо известны решения Фёпшля [2, 11]: цилиндр обтекается стационарным набегающим потоком жидкости; симметрично относительно прямой, проходящей через центр цилиндра и параллельной направлению потока, неподвижно относительно цилиндра расположены два вихря с противоположными по знаку и равными по абсолютной величине интенсивностями.

В этой работе рассматривается обобщение задачи Фёпшля на случай движения в поле силы тяжести. Как и в классической постановке Фёпшля, на интенсивности вихрей накладывается ограничение $\Gamma_1 = -\Gamma_2$. Выделенным направлением в нашей задаче является направление действия силы тяжести. В силу этого вихри расположены симметрично относительно вертикальной прямой, проходящей через центр цилиндра. Для того чтобы не нарушать симметрию задачи, цилиндр предполагается движущимся вдоль вертикали, жидкость при этом обтекает

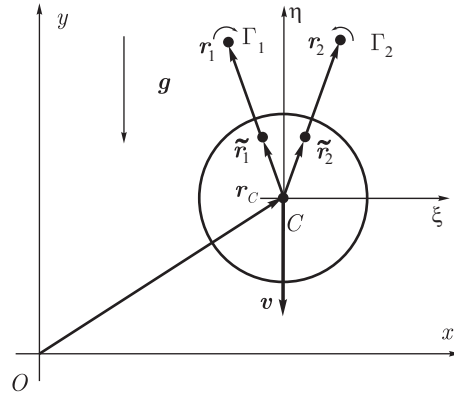


Рис. 1. Круговой цилиндр и пара точечных вихрей в поле силы тяжести

цилиндр с циркуляцией $\Gamma = 0$ (рис. 1). Из постановки ясно, что задача является двумерной. Требуется качественно исследовать движение системы.

§ 3. Уравнения движения

В работах [20] получены уравнения движения цилиндра и N точечных вихрей в поле силы тяжести. Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_i &= -\mathbf{v} + \text{grad } \tilde{\varphi}_i(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}, \\ \dot{\mathbf{r}}_c &= \mathbf{v}, \\ a\dot{v}_1 &= \lambda v_2 - \sum_{i=1}^N \lambda_i (\tilde{y}_i - y_i), \\ a\dot{v}_2 &= -\lambda v_1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\tilde{x}_i - x_i) - ag, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\mathbf{r}_c = (x_c, y_c)$ — радиус-вектор центра цилиндра относительно неподвижной системы координат Oxy ; $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ — скорость цилиндра; $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ — вектор, соединяющий центр цилиндра с i -м вихрем; $\tilde{\mathbf{r}}_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) = \frac{R^2 \mathbf{r}_i}{r_i^2}$ — вектор, соединяющий центр цилиндра с инверсным образом i -го вихря (рис. 2); R — радиус цилиндра; a — константа, включающая массу и присоединенную массу цилиндра; ag — величина силы тяжести, действующей на цилиндр; λ и λ_i — постоянные, связанные с циркуляцией жидкости вокруг цилиндра и интенсивностью i -го вихря соотношениями $\lambda = \frac{\Gamma}{2\pi}$, $\lambda_i = \frac{\Gamma_i}{2\pi}$. Плотность жидкости полагается равной 2π . Функция $\tilde{\varphi}_i(\mathbf{r})$ является потенциалом течения $\varphi(\mathbf{r})$ идеальной жидкости вне цилиндра с исключенной особенностью в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{R^2}{r^2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \lambda \arctg \frac{y}{x} + \sum_{i=1}^N \lambda_i \left(\arctg \left(\frac{y - \tilde{y}_i}{x - \tilde{x}_i} \right) - \arctg \left(\frac{y - y_i}{x - x_i} \right) \right). \quad (3.2)$$

Уравнения (3.1), описывающие движение цилиндра и вихря, отличаются от приведенных в [8] дополнительным слагаемым в уравнении для цилиндра, учитывающим действие силы тяжести.

Как и в работе [8], можно заметить, что конечномерная система (3.1), описывающая движение цилиндра и вихрей в поле силы тяжести, сохраняет инвариантную меру и может быть представлена в гамильтоновой форме.

Предложение 1. Уравнения движения (3.1) можно представить в виде

$$\dot{\zeta}_i = \{\zeta_i, H\} = \sum_k \{\zeta_i, \zeta_k\} \frac{\partial H}{\partial \zeta_k}, \quad (3.3)$$

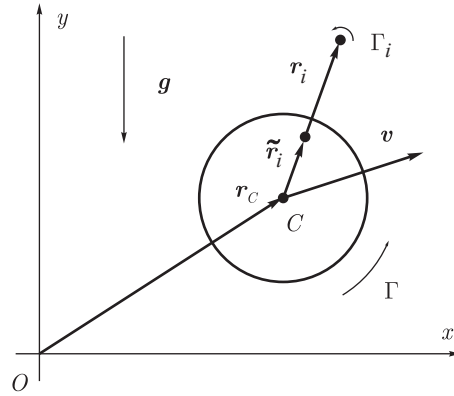


Рис. 2. Круговой цилиндр и точечные вихри в поле силы тяжести

где ζ_i — координаты фазового вектора системы (3.1)

$$\zeta = \{x_1, y_1, \dots, x_N, y_N, v_1, v_2, x_c, y_c\},$$

H — гамильтониан, а компоненты кососимметрического структурного тензора пуассоновой структуры $J_{ij}(\zeta) = \{\zeta_i, \zeta_j\}$ удовлетворяют тождеству Якоби

$$\sum_l \left(J_{il} \frac{\partial J_{jk}}{\partial \zeta_l} + J_{kl} \frac{\partial J_{ij}}{\partial \zeta_l} + J_{jl} \frac{\partial J_{ki}}{\partial \zeta_l} \right) = 0 \quad \forall i, j, k.$$

Доказательство. Несложно непосредственной проверкой показать, что система (3.1) обладает первым интегралом, имеющим смысл интеграла энергии

$$H = \frac{1}{2}av^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\lambda_i^2 \ln(r_i^2 - R^2) - \lambda_i \lambda \ln r_i^2) + \frac{1}{2} \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j \ln \frac{R^4 - 2R^2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) + r_i^2 r_j^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2} + agy_c. \quad (3.4)$$

Считая H гамильтонианом системы, подберем компоненты J_{ij} , чтобы уравнения движения (3.3) совпали с системой (3.1). Отличные от нуля компоненты аналогично [8] имеют вид

$$\begin{aligned} \{v_1, x_i\} &= \frac{1}{a} \frac{r_i^4 - R^2(x_i^2 - y_i^2)}{r_i^4}, & \{v_1, y_i\} &= -\frac{1}{a} \frac{2R^2 x_i y_i}{r_i^4}, \\ \{v_2, x_i\} &= -\frac{1}{a} \frac{2R^2 x_i y_i}{r_i^4}, & \{v_2, y_i\} &= \frac{1}{a} \frac{r_i^4 + R^2(x_i^2 - y_i^2)}{r_i^4}, \\ \{v_1, v_2\} &= \frac{\lambda}{a^2} - \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{a^2} \frac{r_i^4 - R^4}{r_i^4}, & \{x_i, y_i\} &= -\frac{1}{\lambda_i}, \\ \{x_c, v_1\} &= \{y_c, v_2\} = \frac{1}{a}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Непосредственным вычислением проверяется, что компоненты структурного тензора (3.5) удовлетворяют тождеству Якоби. \square

Как известно, гамильтонова форма уравнений (3.1) позволяет применить хорошо развитый формализм для качественного анализа, исследования устойчивости и пр.

§ 4. Первые интегралы

Наличие выделенного направления, задаваемого силой тяжести, нарушает симметрию относительно поворотов системы, что, в свою очередь, влечет несохранение интеграла, существовавшего для аналогичной системы в отсутствие силы тяжести [8]. Тем не менее у рассматриваемой системы существует два первых интеграла, отвечающих трансляциям, — автономный интеграл P , соответствующий горизонтальному импульсу системы, и неавтономный интеграл Q ,

соответствующий вертикальному импульсу:

$$\begin{aligned} Q &= a(v_2 + gt) + \lambda x_c - \sum_{i=1}^N \lambda_i (\tilde{x}_i - x_i), \\ P &= av_1 - \lambda y_c + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\tilde{y}_i - y_i). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Других первых интегралов у системы нет, что подтверждается хаотическим поведением решений на сечении Пуанкаре, вид которых приведен в работах [20]. Неинтегрируемость задачи падения цилиндрического тела произвольной формы с циркуляцией показана в работе [9].

§ 5. Задача Фёппля в поле тяжести

Рассмотрим подробно движение цилиндра и двух вихрей. Геометрия задачи изображена на рисунке 1. Уравнения (3.1) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -v_1 + \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}=\bar{\mathbf{r}}_1}, \\ \dot{y}_1 &= -v_2 + \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial y} \right|_{\mathbf{r}=\bar{\mathbf{r}}_1}, \\ \dot{x}_2 &= -v_1 + \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}=\bar{\mathbf{r}}_2}, \\ \dot{y}_2 &= -v_2 + \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial y} \right|_{\mathbf{r}=\bar{\mathbf{r}}_2}, \\ a\dot{v}_1 &= \lambda v_2 - \lambda_1 (\dot{\tilde{y}}_1 - \dot{y}_1) - \lambda_2 (\dot{\tilde{y}}_2 - \dot{y}_2), \\ a\dot{v}_2 &= -\lambda v_1 + \lambda_1 (\dot{\tilde{x}}_1 - \dot{x}_1) + \lambda_2 (\dot{\tilde{x}}_2 - \dot{x}_2) - ag, \\ \dot{x}_c &= v_1, \\ \dot{y}_c &= v_2, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где, следуя (3.2), потенциалы с исключенной особенностью

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(\mathbf{r}) &= -\frac{R^2}{r^2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \lambda \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \\ &+ \lambda_1 \operatorname{arctg} \left(\frac{y - \tilde{y}_1}{x - \tilde{x}_1} \right) + \lambda_2 \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{y - \tilde{y}_2}{x - \tilde{x}_2} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_2}{x - x_2} \right) \right), \\ \tilde{\varphi}_2(\mathbf{r}) &= -\frac{R^2}{r^2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \lambda \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \\ &+ \lambda_1 \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{y - \tilde{y}_1}{x - \tilde{x}_1} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_1}{x - x_1} \right) \right) + \lambda_2 \operatorname{arctg} \left(\frac{y - \tilde{y}_2}{x - \tilde{x}_2} \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Гамильтониан (3.4) и интегралы движения (4.1) принимают вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}av^2 + \frac{1}{2}(\lambda_1^2 \ln(r_1^2 - R^2) + \lambda_2^2 \ln(r_2^2 - R^2) - \lambda_1 \lambda \ln r_1^2 - \lambda_2 \lambda \ln r_2^2) + \\ &+ \frac{1}{2}\lambda_1 \lambda_2 \ln \frac{R^4 - 2R^2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + r_1^2 r_2^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} + agy_c, \\ Q &= a(v_2 + gt) + \lambda x_c - (\lambda_1(\tilde{x}_1 - x_1) + \lambda_2(\tilde{x}_2 - x_2)), \\ P &= av_1 - \lambda y_c + (\lambda_1(\tilde{y}_1 - y_1) + \lambda_2(\tilde{y}_2 - y_2)). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Рассмотрим движения системы на инвариантном многообразии, определяемом соотношениями

$$\lambda = 0, \quad x_2 = -x_1, \quad y_2 = y_1, \quad \lambda_2 = -\lambda_1, \quad v_1 = 0, \quad (5.4)$$

следующими из требований симметрии задачи. Устойчивость этого многообразия пока нами не рассматривается. Отметим здесь исследования системы четырех вихрей [7].

Система (5.1) в этом случае приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x} \right|_{r=\bar{r}_1}, \\ \dot{y}_1 &= -v_2 + \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial y} \right|_{r=\bar{r}_1}, \\ a\dot{v}_2 &= 2\lambda_1(\dot{\tilde{x}}_1 - \dot{x}_1) - ag, \\ \dot{x}_c &= 0, \\ \dot{y}_c &= v_2, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где потенциал (5.2) имеет вид

$$\tilde{\varphi}_1(\mathbf{r}) = -\frac{R^2}{r^2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \lambda_1 \operatorname{arctg} \left(\frac{y - \tilde{y}_1}{x - \tilde{x}_1} \right) - \lambda_1 \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{y - \tilde{y}_1}{x + \tilde{x}_1} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_1}{x + x_1} \right) \right), \quad (5.6)$$

а гамильтониан и интегралы (5.3) имеют вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}av^2 + \lambda_1^2 \ln(x_1^2 + y_1^2 - R^2) - \frac{1}{2}\lambda_1^2 \ln \frac{R^4 - 2R^2(y_1^2 - x_1^2) + (x_1^2 + y_1^2)^2}{4x_1^2} + agy_c, \\ Q &= a(v_2 + gt) - 2\lambda_1(\tilde{x}_1 - x_1), \\ P &= 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Заметим, что пятое уравнение системы (5.1) превращается в тождество и интеграл P обращается в ноль на инвариантном многообразии.

Будем, следуя Фёпплю, искать решения системы (5.5), соответствующие конфигурациям вихрей, неподвижным относительно цилиндра, то есть неподвижные точки отображения, задаваемого соответствующим фазовым потоком, тогда

$$x_1 = \operatorname{const}, \quad y_1 = \operatorname{const}. \quad (5.8)$$

Используя (5.8) в (5.5), получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x} \right|_{r=\bar{r}_1} &= 0, \\ \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial y} \right|_{r=\bar{r}_1} &= v_2, \\ \dot{v}_2 &= -g, \\ \dot{x}_c &= 0, \\ \dot{y}_c &= v_2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Воспользовавшись (5.6) в (5.9), получаем для нахождения неподвижных точек систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{R^2 x_1 y_1 v_2}{(x_1^2 + y_1^2)^2} - \frac{2\lambda_1 (y_1 - \tilde{y}_1) x_1 \tilde{x}_1}{((x_1 - \tilde{x}_1)^2 + (y_1 - \tilde{y}_1)^2)((x_1 + \tilde{x}_1)^2 + (y_1 - \tilde{y}_1)^2)} &= 0, \\ v_2 &= v_2(0) - gt, \\ x_c &= x_c(0), \\ y_c &= y_c(0) + v_2(0)t - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned} \quad (5.10)$$

где $v_2(0)$, $x_c(0)$, $y_c(0)$ обозначают вертикальную скорость и положение цилиндра в начальный момент времени. Очевидно, что одновременно удовлетворить требованиям (5.8) и первому уравнению (5.10) невозможно, так как вертикальная скорость явно зависит от времени. Таким образом, вышеприведенные рассуждения содержат доказательство следующего факта:

Предложение 2. *В поле силы тяжести невозможно существование движений цилиндра и вихревой пары, при котором симметрично расположенные вихри остаются неподвижными относительно цилиндра.*

Замечание 1. С физической точки зрения легко понять причину нереализуемости вышеописанной конфигурации. Как известно [2, 11], координаты равновесного положения вихрей в решении Фёпpla зависят от скорости набегающего потока. В нашем случае скорость цилиндра меняется, что приводит к изменению координат положений равновесия.

В связи с тем, что непосредственное нахождение аналитических решений системы (5.5) представляется на данный момент невозможным, исследуем ее численно.

Результат интегрирования системы представлен на рисунках 3, 4 и 5. На рисунке 3 сплошными линиями показаны траектории вихрей, а пунктиром — траектория центра цилиндра. На рисунке 4 отображены те же движения вихрей, что и на рисунке 3, но в системе отсчета, связанной с цилиндром. На рисунке 5 изображены движение цилиндра и многократное рассеяние вихревой пары, расстояние между вихрями и расстояние от вихрей до цилиндра как функции времени. На рисунках 3, *a* и 4, *a* изображен «пролетный» случай, когда цилиндр проходит между вихрями пары и движется далее отдельно. На рисунках 3, *b* и 4, *b* представлен второй типичный сценарий рассеяния — вихревая пара движется перед цилиндром. На рисунке 5 представлен процесс многократного рассеяния по второму сценарию.

Рассмотрим подробнее особенности движения системы. Взаимодействие цилиндра с вихрями при падении в поле тяжести приводит к тому, что ускорение цилиндра при приближении к вихрям становится меньше, чем g . Движение вихрей, в свою очередь, отклоняется от прямолинейного. Тем не менее действие, оказываемое вихрями на цилиндр, оказывается сосредоточенным в окрестности того участка траектории вихря, который лежит в непосредственной близости от вихрей. Дальнейшее движение цилиндра продолжается практически только под действием окружающей жидкости и силы тяжести. Более наглядно поведение вихрей можно представить, если рассмотреть картину их движения в системе отсчета, связанной с цилиндром, как показано на рисунке 4. На рисунке 4, *a* видно, как вихри начинают удаляться от цилиндра, затем на траекториях видны точки поворота, пройдя их вихри приближаются к цилиндру. Наконец, вихри притягиваются к цилиндру, находясь при движении в непосредственной близости от него, а затем удаляются практически прямолинейно. Параметры изображенной на рисунках 3, *a*, 4, *a* системы: $R = 0.5$, $a = 10$, $\lambda_1 = 23$, $g = 10$. Движение на рисунке 3 цилиндр начинает из начала координат из состояния покоя. Вихри находятся в точках с координатами $(-1, -1)$ и $(1, -1)$. Движение анализируется в течение времени $t_0 = 3.725$.

Другим сценарием движения цилиндра и вихревой пары, который демонстрирует характерные особенности системы, является падение цилиндра и движение вихревой пары перед цилиндром в виде объекта, размер которого мал по сравнению с размером цилиндра. Этот случай изображен ниже на рисунках 3, *b* и 4, *b*. Интересно, что вихревая пара в результате взаимодействия замедляет падение цилиндра, в то время как сама получает дополнительный импульс

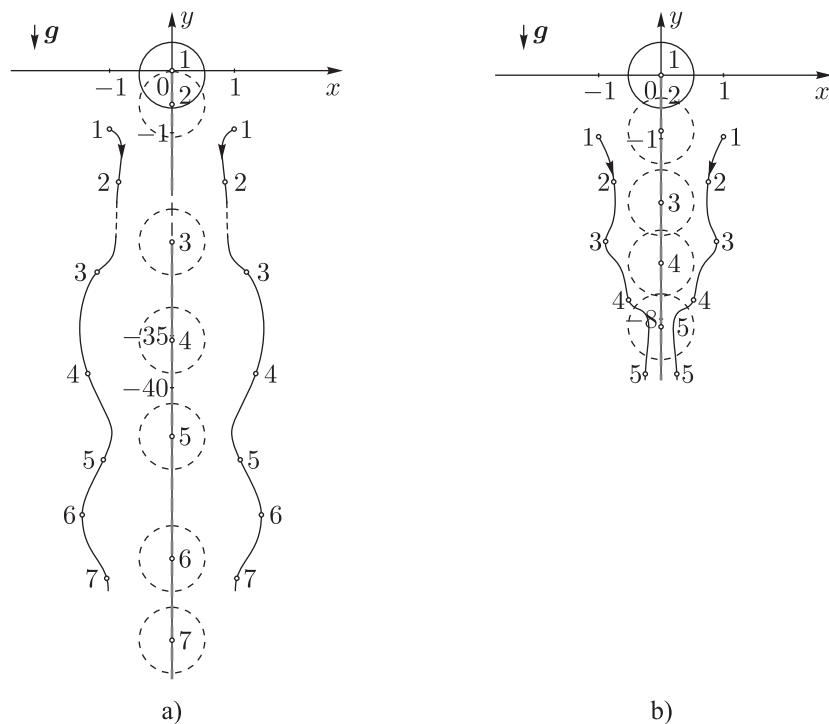


Рис. 3. Круговой цилиндр и пара точечных вихрей в поле силы тяжести: а) вихревая пара рассеивается цилиндром, который продолжает движение отдельно; б) пара движется перед цилиндром

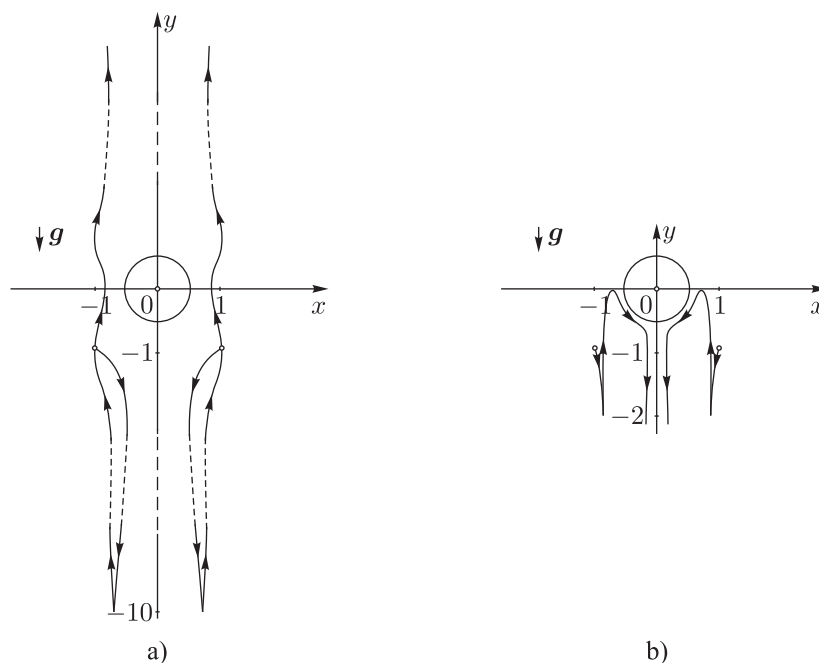


Рис. 4. Рассеяние вихревой пары круговым цилиндром в поле силы тяжести: а) вихревая пара удаляется от цилиндра на бесконечность в результате рассеяния; б) пара рассеивается «назад»

и удаляется от цилиндра в направлении его движения. На рисунке 4, *b* видно, аналогично начальной стадии движения, изображенной на рисунке 4, *a*, как вихри начинают удаляться от цилиндра, затем, пройдя точки поворота, приближаются к цилиндру. Далее вихри притягиваются, образуя малый объект в виде пары, и, обгоняя цилиндр, движутся вниз. Параметры

изображенной на рисунках 3, *b* и 4, *b* системы: $R = 0.5$, $a = 10$, $\lambda_1 = 7$, $g = 10$. Начальные данные выбраны аналогично предыдущему случаю. Движение анализируется в течение времени $t_0 = 1.25$.

Интересно исследовать поведение системы на больших временах. Общая картина движения изображена на рисунке 5, *a*. Чтобы сделать процесс относительного перемещения более наглядным, на рисунках 5, *b* и 5, *c* изображены зависимости от времени расстояния между вихрями в паре $|x_1 - x_2|$ и расстояние от вихря до центра цилиндра $(x_1^2 + y_1^2)^{(1/2)}$.

Из сопоставления зависимостей, представленных на рисунках 5, *a*, 5, *b* и 5, *c*, очевидно, что траектории вихрей представляют собой последовательность из резких, кратковременных отклонений от траектории цилиндра, которые вызваны взаимодействием вихрей и цилиндра на близких расстояниях, и практически прямолинейных участков движения, которые наблюдаются при удалении вихревой пары от цилиндра. При численном исследовании наблюдается, как и описано выше, постепенное сближение вихрей, которые уменьшают ускорение цилиндра, а сама пара, отталкиваясь от цилиндра, движется перед цилиндром как малый объект. В дальнейшем пара движется без влияния цилиндра с постоянной скоростью, а цилиндр, ускоримый силой тяжести, нагоняет пару и рассеивает вихри, отклоняя их от линии своего движения в противоположные стороны. Далее вихри снова, сближаясь, замедляют движение цилиндра, в свою очередь, приближаются друг к другу ближе, чем на предыдущем участке прямолинейного движения, и, отталкиваясь, удаляются от цилиндра, после чего движутся равномерно. Затем цилиндр вновь нагоняет пару, и весь процесс повторяется подобным себе образом. На рисунке 5, *a* показаны три первых сближения. Анализируемая система имеет параметры $R = 0.5$, $a = 10$, $\lambda_1 = 7$, $g = 10$. Время движения $t_0 = 16.05$.

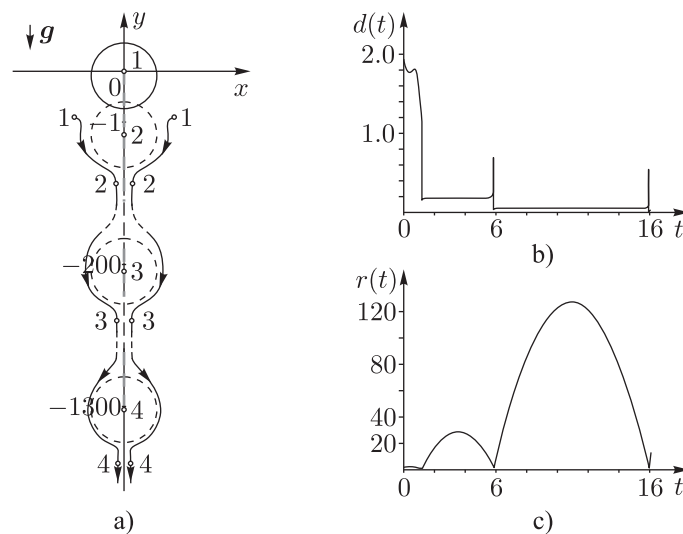


Рис. 5. Круговой цилиндр и пара точечных вихрей в поле силы тяжести: а) вихревая пара движется перед цилиндром; первые три рассеяния; б) расстояние между вихрями; в) расстояние от вихрей до цилиндра

Итак, мы видим движения системы, при которых процесс рассеяния цилиндром вихревой пары является многократным, причем каждое рассеяние выглядит подобным образом с единственным отличием: размер вихревой пары с каждым рассеянием становится все меньше.

Сложность системы (5.5) для непосредственного изучения приводит нас к необходимости дополнительных упрощений в постановке.

§ 6. Ограниченная задача Фёппля в поле тяжести

Предположим, что цилиндр очень массивный. Это означает, что движение цилиндра определяется действием силы тяжести и не зависит от движения вихрей. Таким образом, мы получаем постановку ограниченной задачи Фёппля в поле тяжести. Решение этой задачи, как мы

увидим ниже, содержит в себе черты поведения решений исходной задачи, но с аналитической точки зрения существенно проще. Это соответствует рассмотрению движения системы (5.1) на инвариантном многообразии (подмногообразии инвариантного многообразия, рассмотренного в предыдущем пункте), определяемом соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda &= 0, \quad x_2 = -x_1, \quad y_2 = y_1, \quad \lambda_2 = -\lambda_1, \quad v_1 = 0, \\ v_2 &= v_2(0) - gt, \quad x_c = x_c(0), \quad y_c = y_c(0) + v_2(0)t - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Ограничение позволяет нам рассматривать только движение вихря, для которого из (5.1) получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{2R^2 x_1 y_1 v_2}{(x_1^2 + y_1^2)^2} - \frac{4\lambda_1 (y_1 - \tilde{y}_1) x_1 \tilde{x}_1}{((x_1 - \tilde{x}_1)^2 + (y_1 - \tilde{y}_1)^2)((x_1 + \tilde{x}_1)^2 + (y_1 - \tilde{y}_1)^2)}, \\ \dot{y}_1 &= -v_2 - \frac{R^2(x_1^2 - y_1^2)v_2}{(x_1^2 + y_1^2)^2} + \\ &+ \lambda_1 \left(\frac{1}{2x_1} + \frac{2\tilde{x}_1(x_1^2 - \tilde{x}_1^2 - (y_1 - \tilde{y}_1)^2)}{((x_1 - \tilde{x}_1)^2 + (y_1 - \tilde{y}_1)^2)((x_1 + \tilde{x}_1)^2 + (y_1 - \tilde{y}_1)^2)} \right). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Результаты численного интегрирования системы (6.2) представлены на рисунках 6, 7 и 8. Как и выше, при отображении результатов исследования полной задачи, на рисунке 6 сплошными линиями показаны траектории вихрей, а пунктиром — траектория центра цилиндра. На рисунке 7 отображены те же движения вихрей, что и на рисунке 6, но в системе отсчета, связанной с цилиндром. На рисунке 8 аналогично рисунку 5 изображены движение цилиндра и многократное рассеяние вихревой пары, расстояние между вихрями и расстояние от вихрей до цилиндра как функции времени.

На рисунках 6, *a* и 7, *a* представлено движение цилиндра и вихревой пары при значениях параметров $R = 0.5$, $a = 10$, $\lambda_1 = 2$, $g = 10$. Время движения $t_0 = 1.25$. Из рисунка 6, *a* виден процесс рассеяния вихревой пары в данном случае: цилиндр, взаимодействуя с вихревой парой, притягивает каждый из вихрей при своем приближении, при дальнейшем движении цилиндр удаляется от вихрей и движется отдельно. Пара остается практически неподвижной. В этом случае интенсивность вихрей мала для того, чтобы вихри объединились в объект малого размера, который двигался в предыдущем случае перед цилиндром. Процесс удаления неизменяющейся вихревой пары от цилиндра, как и в предыдущем случае, наглядно иллюстрирует рисунок 7, *a*.

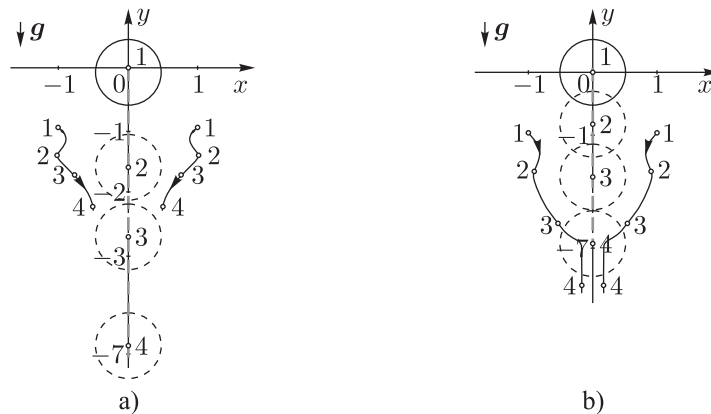


Рис. 6. Круговой цилиндр и пара точечных вихрей в поле силы тяжести; ограниченная задача Фёшля: а) цилиндр движется отдельно от вихрей; б) вихревая пара движется перед цилиндром

Вторым сценарием, как и в полной задаче, рассмотрим процесс движения пары перед цилиндром. На рисунке 6, *b* наглядно виден процесс рассеяния вихревой пары цилиндром: на

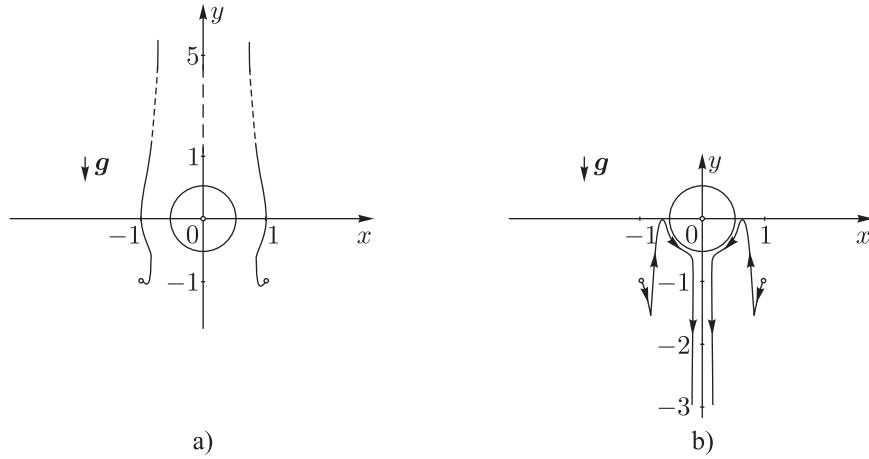


Рис. 7. Пара точечных вихрей, рассеивающаяся на цилиндре; ограниченная задача Фёппля: а) цилиндр движется отдельно от вихрей; б) пара рассеивается «назад»

начальной стадии вихри медленно приближаются к цилиндру с разных сторон, а затем, притягиваясь друг к другу, образуют малую, по сравнению с размерами цилиндра, вихревую пару, которая движется перед цилиндром, не изменяя своих размеров. Аналогичную картину в системе отсчета, связанной с цилиндром, демонстрирует рисунок 7, б. Параметры изображенной на рисунках 6, б, 7, б системы: $R = 0.5$, $a = 10$, $\lambda_1 = 7$, $g = 10$. Время анализа $t_0 = 1.45$.

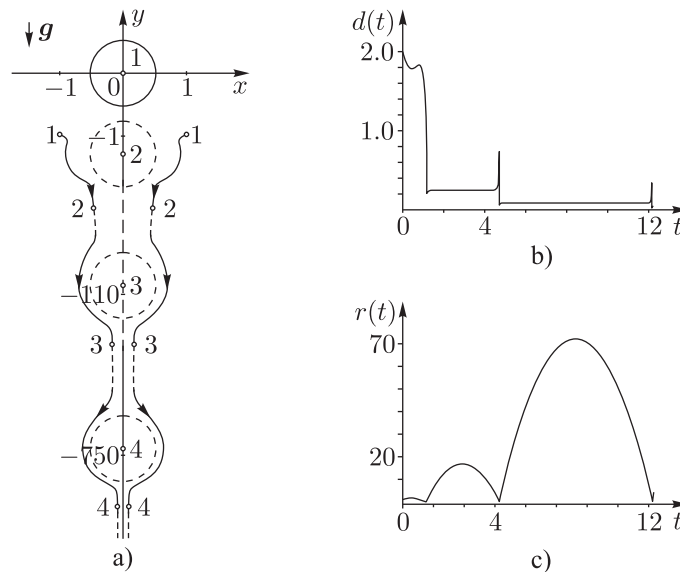


Рис. 8. Круговой цилиндр и пара точечных вихрей в поле силы тяжести; ограниченная задача Фёппля: а) вихревая пара движется перед цилиндром; первые три рассеяния; б) расстояние между вихрями; в) расстояние от вихрей до цилиндра

Как и в случае полной системы, интересно проследить за эволюцией системы на больших временах в ограниченной задаче. Движение цилиндра и вихрей изображено на рисунке 8, а. Чтобы проиллюстрировать процесс относительного перемещения на рисунках 8, б и 8, в, изображены зависимости от времени расстояния между вихрями в паре $|x_1 - x_2|$ и расстояние от вихря до центра цилиндра $(x_1^2 + y_1^2)^{1/2}$. Снова видно два повторяющихся фрагмента движения вихрей: резкие отклонения от траектории цилиндра, которые вызваны взаимодействием вихрей и цилиндра на близких расстояниях, и практически прямолинейные участки, которые

наблюдаются при удалении вихревой пары от цилиндра. Как и описано выше, наблюдается постепенное сближение вихрей, которые, отталкиваясь от цилиндра движутся перед цилиндром как малый объект. В дальнейшем пара движется без влияния цилиндра с постоянной скоростью, а цилиндр, ускоримый силой тяжести, нагоняет пару и рассеивает вихри, отклоняя их от линии своего движения в противоположные стороны. Далее вихри приближаются друг к другу ближе, чем на предыдущем участке прямолинейного движения, и, отталкиваясь, удаляются от цилиндра, после чего движутся равномерно. Затем цилиндр вновь нагоняет пару и весь процесс повторяется подобным себе образом. То есть ограниченная система демонстрирует поведение, подобное исходной системе, за исключением движения цилиндра, на движение которого наложено ограничение. На рисунке 8 показаны три первых сближения. Анализируемая система имеет параметры $R = 0.5$, $a = 10$, $\lambda_1 = 7$, $g = 10$. Время движения $t_0 = 12.25$.

Интересно заметить, что по-прежнему процесс рассеяния цилиндром вихревой пары выглядит каждый раз подобным образом.

§ 7. Заключение

В данной работе рассмотрена задача о движении в поле силы тяжести кругового цилиндра, взаимодействующего с вихревой парой. Приведены полученные численно частные решения, соответствующие наиболее характерным сценариям динамики цилиндра и вихрей. Доказана невозможность существования в поле силы тяжести стационарной конфигурации цилиндра и вихревой пары, аналогичной решению Фёпля. Рассмотрена ограниченная задача.

Численные исследования полной и ограниченной задач позволяют сформулировать ряд гипотез.

1. Как в случае полной системы, так и в случае ограниченной задачи в зависимости от интенсивности вихрей могут реализовываться два типа движений:

а) цилиндр «покидает» вихревую пару после однократного рассеяния и движется отдельно в направлении силы тяжести;

б) цилиндр многократно рассеивает вихревую пару, которая движется перед цилиндром со всё возрастающей скоростью и уменьшающимся размером; каждый из актов рассеяния выглядит подобным образом.

2. В случае полной системы движение цилиндра в среднем происходит с ускорением, меньшим ускорения силы тяжести из-за взаимодействия с вихревой парой.

Стоит отметить, что высказанные выше гипотезы ставят вопросы, ответы на которые еще нужно получить.

Автор выражает благодарность за плодотворные обсуждения А. В. Борисову и И. С. Мамаеву.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.
2. Борисов А.В., Мамаев И.С. Математические методы динамики вихревых структур. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 368 с.
3. Борисов А.В., Мамаев И.С., Соколовский М.А. (ред.) Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 704 с.
4. Козлов В.В. О падении тяжелого цилиндрического твердого тела в жидкости // Известия РАН. Механика твердого тела. 1993. № 4. С. 113–117.
5. Манаков С.В., Щур Л.Н. Стохастичность в двухчастичном рассеянии // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 37. № 1. С. 45–48.
6. Чаплыгин С.А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. С. 133–150.
7. Aref H., Stremmer M.A. Four-vortex motion with zero total circulation and impulse // Physics of Fluids. 1999. Vol. 11. Issue 12. P. 3704–3715.
8. Borisov A.V., Mamaev I.S. An integrability of the problem on motion of cylinder and vortex in the ideal fluid // Regular and Chaotic Dynamics. 2003. Vol. 8. № 2. P. 163–166.

9. Borisov A.V., Mamaev I.S. On the motion of a heavy rigid body in an ideal fluid with circulation // Chaos. 2006. Vol. 16. Issue 1. 013118.
10. Borisov A.V., Mamaev I.S., Ramodanov S.M. Dynamics of a circular cylinder interacting with point vortices // Discrete and Contin. Dyn. Syst. B. 2005. Vol. 5. № 1. P. 35–50.
11. Föppl L. Wirbelbewegung hinter einem Kreiszyylinder // Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. 1913.
12. Гельмгольц Г. Основы вихревой теории. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
13. Jones M.A., Shelly M.J. Falling cards // J. Fluid Mech. 2005. Vol. 540. P. 393–425.
14. Kadtko J.B., Novikov E.A. Chaotic capture of vortices by a moving body. I. The single point vortex case // Chaos. 1993. Vol. 3. № 4. P. 543–553.
15. Kirchhoff G.R. Vorlesungen über mathematische Physik. Vol. I. Teubner, Leipzig. 1876.
16. Michelin S., Smith S.G.L. Falling cards and flapping flags: understanding fluid-solid interaction using an unsteady point vortex model // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2010. Vol. 24. P. 195–200.
17. Routh E.J. Some application of conjugate function // Proc. Lond. Math. Soc. 1881. Vol. 12. № 170/171. P. 73–89.
18. Shashikanth B.N. Symmetric pairs of point vortices interacting with a neutrally buoyant two-dimensional circular cylinder // Phys. of Fluids. 2006. Vol. 18. 127103.
19. Shashikanth B.N., Marsden J.E., Burdick J.W., Kelly S.D. The Hamiltonian structure of a 2D rigid circular cylinder interacting dynamically with N point vortices // Phys. of Fluids. 2002. Vol. 14. P. 1214–1227.
20. Соколов С.В. Движение кругового цилиндрического твердого тела, взаимодействующего с N точечными вихрями, в поле силы тяжести // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 1. С. 1–14.
21. Sokolov S.V., Ramodanov S.M. Falling motion of a circular cylinder interacting dynamically with a point vortex // Regular and Chaotic Dynamics. 2013. Vol. 18. № 1–2. P. 184–193.
22. Tophøj L., Aref H. Chaotic scattering of two identical point vortex pairs revisited // Phys. of Fluids. 2008. Vol. 20. 093605.

Поступила в редакцию 19.05.2014

Соколов Сергей Викторович, к. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Институт компьютерных исследований, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. E-mail: sokolovsv72@mail.ru

S. V. Sokolov

Falling motion of a circular cylinder interacting dynamically with a vortex pair in a perfect fluid

Keywords: point vortices, vortex pair, Hamiltonian systems, reduction.

MSC: 70Hxx, 70G65

We consider a system which consists of a circular cylinder subject to gravity interacting with N vortices in a perfect fluid. Generically, the circulation about the cylinder is different from zero. The governing equations are Hamiltonian and admit evident integrals of motion: the horizontal and vertical components of the momentum; the latter is obviously non-autonomous. We then focus on the study of a configuration of the Föppl type: a falling cylinder is accompanied with a vortex pair ($N = 2$). Now the circulation about the cylinder is assumed to be zero and the governing equations are considered on a certain invariant manifold. It is shown that, unlike the Föppl configuration, the vortices cannot be in a relative equilibrium. A restricted problem is considered: the cylinder is assumed to be sufficiently massive and thus its falling motion is not affected by the vortices. Both restricted and general problems are studied numerically and remarkable qualitative similarity between the problems is outlined: in most cases, the vortex pair and the cylinder are shown to exhibit scattering.

REFERENCES

1. Borisov A.V., Mamaev I.S. *Dinamika tverdogo tela. Gamil'tonovy metody, integriruemost', khaos* (Dynamics of the Solids. Hamiltonian methods, integrability, chaos), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2005, 576 p.
2. Borisov A.V., Mamaev I.S. *Matematicheskie metody dinamiki vikhrevykh struktur* (Mathematical methods in the dynamics of vortex structures), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2005, 368 p.
3. Borisov A.V., Mamaev I.S., Sokolovskii M.A. (Ed.) *Fundamental'nye i prikladnye problemy teorii vikhrei* (Fundamental and applying problems in the vortex theory), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2003, 704 p.
4. Kozlov V.V. On a heavy cylindrical body falling in a fluid, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela*, 1993, no. 4, pp. 113–117 (in Russian).
5. Manakov S.V., Shchur L.N. Stochastic aspect of two-particle scattering, *JETP Lett.*, 1983, vol. 37, no. 1, pp. 54–57.
6. Chaplygin S.A. On the motion of heavy bodies in an incompressible fluid, *Complete Works: Vol. 1*, Leningrad: Izd. Akad. Nauk SSSR, 1933, pp. 133–150 (in Russian).
7. Aref H., Stremler M.A. Four-vortex motion with zero total circulation and impulse, *Phys. of Fluids*, 1999, vol. 11, issue 12, pp. 3704–3715.
8. Borisov A.V., Mamaev I.S. An integrability of the problem on motion of cylinder and vortex in the ideal fluid, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2003, vol. 8, no. 2, pp. 163–166.
9. Borisov A.V., Mamaev I.S. On the motion of a heavy rigid body in an ideal fluid with circulation, *Chaos*, 2006, vol. 16, no. 1, 013118.
10. Borisov A.V., Mamaev I.S., Ramodanov S.M. Dynamics of a circular cylinder interacting with point vortices, *Discrete and Contin. Dyn. Syst. B*, 2005, vol. 5, no. 1, pp. 35–50.
11. Föppl L. Wirbelbewegung hinter einem Kreiszyylinder, *Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, 1913.
12. Helmholtz H. Über integrale hydrodynamischen gleichungen welche den wirbelbewegungen entsprechen, *J. reine angew. Math.*, 1858, vol. 55, s. 25–55. Russian translation is in the book *Osnovy vikhrevoi teorii* (Fundamentals of the Vortex Theory), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2002.
13. Jones M.A., Shelly M.J. Falling cards, *J. Fluid Mech.*, 2005, vol. 540, pp. 393–425.
14. Kadtko J.B., Novikov E.A. Chaotic capture of vortices by a moving body. I. The single point vortex case, *Chaos*, 1993, vol. 3, no. 4, pp. 543–553.
15. Kirchhoff G.R. *Vorlesungen über Mathematische Physik*, Teubner, Leipzig, 1876, vol. I.
16. Michelin S., Smith S.G.L. Falling cards and flapping flags: understanding fluid-solid interaction using an unsteady point vortex model, *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 2010, vol. 24, pp. 195–200.
17. Routh E.J. Some application of conjugate function, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1881, vol. 12, no. 170/171, pp. 73–89.
18. Shashikanth B.N., Symmetric pairs of point vortices interacting with a neutrally buoyant two-dimensional circular cylinder, *Phys. of Fluids*, 2006, vol. 18, 127103.
19. Shashikanth B.N., Marsden J.E., Burdick J.W., Kelly S.D. The Hamiltonian structure of a 2D rigid circular cylinder interacting dynamically with N point vortices, *Phys. of Fluids*, 2002, vol. 14, pp. 1214–1227.
20. Sokolov S.V. Falling motion of a circular cylinder interacting dynamically with N point vortices, *Nonlinear Dynamics and Mobile Robotics*, 2014, vol. 2, no. 1, pp. 99–113.
21. Sokolov S.V., Ramodanov S.M. Falling motion of a circular cylinder interacting dynamically with a point vortex, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2013, vol. 18, no. 1–2, pp. 184–193.
22. Tophøj L., Aref H. Chaotic scattering of two identical point vortex pairs revisited, *Phys. of Fluids*, 2008, vol. 20, 093605.

Received 19.05.2014

Sokolov Sergei Viktorovich, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Institute of Computer Science, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: sokolovsv72@mail.ru