УДК 517.977.1, 517.926

© *В. А. Зайцев*

КРИТЕРИИ РАВНОМЕРНОЙ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ [1]

Понятие равномерной полной управляемости линейной системы, введенное Р. Калманом, играет ключевую роль в задачах управления асимптотическими характеристиками линейных систем управления, замкнутых по принципу линейной обратной связи. Е. Л. Тонков установил необходимое и достаточное условие равномерной полной управляемости для систем с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами. Критерий Тонкова можно положить в основу определения равномерной полной управляемости. Если условия на коэффициенты системы ослабить, то определения Калмана и Тонкова перестают совпадать. Здесь установлены необходимые условия и достаточные условия равномерной полной управляемости по Калману и по Тонкову для систем с измеримыми, локально суммируемыми коэффициентами. Введено определение равномерной полной управляемости, которое обобщает определение Тонкова и совпадает с определением Калмана, если матрица $B(\cdot)$ ограничена. Доказаны некоторые известные результаты об управляемости линейных систем, в которых можно ослабить требования на коэффициенты. Доказано, что если линейная управляемая система $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, с измеримой ограниченной матрицей $B(\cdot)$ равномерно вполне управляема в смысле Калмана, то для любой измеримой и интегрально ограниченной $m \times n$-матричной функции $Q(\cdot)$ система $\dot{x} = (A(t) + B(t)Q(t))x + B(t)u$ равномерно вполне управляема по Калману.

Ключевые слова: линейная управляемая система, равномерная полная управляемость.

§ 1. Определения и критерии равномерной полной управляемости

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n с нормой $|x| = \sqrt{x^T x}$ (T — операция транспонирования вектора или матрицы); $e_1, \ldots, e_n$ — канонический ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$; $M_{n,m}$ — пространство вещественных $n \times m$-матриц (если $m = n$, то пишем M_n) со спектральной нормой $|A| = \max\limits_{|x|=1} |Ax|$; $I = [e_1, \ldots, e_n] \in M_n$ — единичная матрица; $\operatorname{Sp} A$ — след квадратной матрицы A; $L_p(\Delta) = L_p(\Delta, X)$ — пространство Лебега измеримых функций $G : \Delta \to X$, где $p = 1, 2$, $\Delta = [\alpha, \beta]$, $X = M_{n,m}$ или $X = \mathbb{R}^n$, таких, что $\displaystyle\int_\alpha^\beta |G(t)|^p \, dt < \infty$ (множество X в записи опускаем, если из контекста понятно, какое оно); $L_p^{\mathrm{loc}}(\Omega, X) := \{G : \Omega \to X : G\big|_\Delta \in L_p(\Delta, X) \ \forall\, \Delta = [\alpha, \beta] \subset \Omega\}$ — пространство локально суммируемых функций на $\Omega \subset \mathbb{R}$ со степенью p ($p = 1, 2$); $\|G\|_{L_p(\Delta)} := \left(\displaystyle\int_\alpha^\beta |G(t)|^p \, dt\right)^{1/p}$ — норма функции $G \in L_p(\Delta, X)$ ($p = 1, 2$) (множество Δ в записи опускаем, если из контекста понятно, какое оно); $\|F\|_{C(\Omega)} := \sup\{|F(t)| : t \in \Omega\}$ — sup-норма функции F, заданной на $\Omega \subset \mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ или в $M_{n,m}(\mathbb{R})$. Квадратичную форму $V(x) = x^T Q x$, $x \in \mathbb{R}^n$, отождествляем с симметрической матрицей $Q = Q^T \in M_n$, ее задающей. Неравенства $Q > (\geqslant, <, \leqslant) P$ для симметрических матриц Q, P понимаются в смысле квадратичных форм. Записи $b := a$ и $a =: b$ означают, что элементу b присваивается значение a (то есть b по определению равно a).

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

Предполагаем, что $A \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, M_n)$, $\quad B \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, M_{n,m})$. В качестве управлений в системе (1) будем рассматривать измеримые по Лебегу функции $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ ($\Omega \subset \mathbb{R}$ — промежуток) такие,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках базовой части (проект № 2003).

что $Bu \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. При таких условиях решение задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t), \tag{2}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{3}$$

существует для любого $(t_0, x_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$, единственно, определено при всех $t \in \Omega$, и это решение является абсолютно непрерывной функцией [1, с. 7–9].

Обозначим через $X(t,s)$ матрицу Коши свободной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{4}$$

то есть решение матричной задачи Коши $\dot{X} = A(t)X$, $X(s) = I$, $I \in M_n$. Эта функция является абсолютно непрерывной по каждой переменной. Все соотношения между измеримыми функциями будем предполагать выполняющимися почти всюду (п. в.).

Определение 1 (Р. Калман [2]; Н. Н. Красовский [3, с. 138]). Система (1) называется: *вполне управляемой на отрезке* $[t_0, t_0+\vartheta]$, если для каждого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется управление $u : [t_0, t_0+\vartheta] \to \mathbb{R}^m$ такое, что решение $x(\cdot)$ задачи Коши (2), (3) удовлетворяет равенству

$$x(t_0+\vartheta) = 0; \tag{5}$$

вполне управляемой, если для каждого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется $\vartheta > 0$ такое, что система (1) вполне управляема на $[t_0, t_0+\vartheta]$.

Решение задачи Коши (2), (3) имеет вид

$$x(t) = X(t, t_0)\Big(x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t_0, s)B(s)u(s)\,ds\Big). \tag{6}$$

Поэтому условие (5) влечет равенство

$$x_0 = -\int_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0, s)B(s)u(s)\,ds. \tag{7}$$

Это означает, что система (1) вполне управляема на $[t_0, t_0+\vartheta]$ тогда и только тогда, когда для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется управление $u(\cdot)$, которое обеспечивает равенство (7).

Замечание 1. В асимптотической теории линейных систем традиционно рассматриваются системы вида (1) с (кусочно) непрерывными коэффициентами, при этом в литературе указывается, что эти условия на коэффициенты можно ослабить. Здесь мы, в частности, осуществляем это ослабление: мы показываем, что для некоторых известных результатов можно ослабить эти условия и насколько.

Предположим, что $B \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, M_{n,m})$. Тогда корректно определена симметрическая $n \times n$-матрица

$$W(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} X(t_0, s)B(s)B^T(s)X^T(t_0, s)\,ds.$$

Ее называют *матрицей управляемости* (*матрицей Калмана*) системы (1) на отрезке $[t_0, t_1]$. Для всякого вектора $h \in \mathbb{R}^n$ справедливо соотношение

$$h^T W(t_0, t_0+\vartheta)h = \int_{t_0}^{t_0+\vartheta} h^T X(t_0, s)B(s)B^T(s)X^T(t_0, s)h\,ds = \int_{t_0}^{t_0+\vartheta} |h^T X(t_0, s)B(s)|^2\,ds. \tag{8}$$

Следовательно, матрица $W(t_0, t_0+\vartheta)$ является неотрицательно определенной. Следующее предложение хорошо известно.

Предложение 1. *Следующие утверждения эквивалентны.*
1. *Система* (1) *вполне управляема на* $\Delta = [t_0, t_0 + \vartheta]$.
2. *Строки матрицы* $X(t_0, t)B(t)$ *линейно независимы на* Δ.
3. *Матрица* $W(t_0, t_0 + \vartheta)$ *положительно определена.*

Доказательство. ($2 \Longrightarrow 3$). Пусть матрица $W(t_0, t_0 + \vartheta)$ не является положительно определенной. Тогда существует вектор $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, такой, что $h^T W(t_0, t_0 + \vartheta)h = 0$. Из равенства (8) следует, что

$$h^T X(t_0, t)B(t) \equiv 0 \quad (\text{для п. в.}) \;\; t \in [t_0, t_0 + \vartheta]. \tag{9}$$

Это означает, что строки матрицы $X(t_0, t)B(t)$ линейно зависимы на Δ.

($1 \Longrightarrow 2$). Пусть строки матрицы $X(t_0, t)B(t)$ линейно зависимы на Δ. Тогда существует вектор $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, такой, что выполнено равенство (9). Поскольку система (1) вполне управляема на Δ, в силу формулы (7) для вектора h найдется управление $\widehat{u}(t)$, $t \in \Delta$, такое, что

$$h = -\int_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0, s)B(s)\widehat{u}(s)\, ds. \tag{10}$$

Умножая равенство (10) слева на h^T и учитывая (9), получаем $h^T h = 0$. Противоречие.

($3 \Longrightarrow 1$). Пусть матрица $W(t_0, t_0 + \vartheta)$ положительно определена, следовательно, невырожденна. Тогда для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ управление

$$u(t) = -B^T(t)X^T(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_0 + \vartheta)x_0, \quad t \in \Delta,$$

обеспечивает равенство (7). Значит, система (1) вполне управляема на Δ. □

Напомним, что матрица $A(\cdot)$ называется *интегрально ограниченной на* $\mathbb{R}$ [4, с. 252], если

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |A(s)|\, ds \leqslant a < \infty. \tag{11}$$

Ясно, что в (11) промежуток интегрирования $[t, t+1]$ можно заменить на любой другой $[t, t+\vartheta]$, где $\vartheta > 0$.

Определение 2 (Р. Калман [2]). Система (1) называется:
равномерно вполне управляемой, если найдутся $\vartheta > 0$ и $\alpha_i = \alpha_i(\vartheta) > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, такие, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства

$$0 < \alpha_1 I \leqslant W(\tau, \tau + \vartheta) \leqslant \alpha_2 I, \tag{12}$$

$$0 < \alpha_3 I \leqslant X(\tau + \vartheta, \tau)W(\tau, \tau + \vartheta)X^T(\tau + \vartheta, \tau) \leqslant \alpha_4 I; \tag{13}$$

ϑ-равномерно вполне управляемой, если (1) равномерно вполне управляема на отрезках длины ϑ, т. е. существуют $\alpha_i = \alpha_i(\vartheta) > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, такие, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства (12), (13).

Замечание 2. Калман в [2] дает определение *равномерной полной управляемости*, но не дает отдельно определение *ϑ-равномерной полной управляемости*. Это понятие было выделено С. Н. Поповой в [5].

Непосредственно из определения 2 вытекает следующее предложение.

Предложение 2 (Р. Калман [2]). *Пусть система* (1) *ϑ-равномерно вполне управляема. Тогда:*

(a) *существуют* $\delta_i = \delta_i(\vartheta) > 0$, $i = \overline{1, 4}$, *такие, что для любого* $\tau \in \mathbb{R}$ *выполнены следующие неравенства:*

$$\delta_1 \leqslant |X(\tau + \vartheta, \tau)| \leqslant \delta_2, \qquad \delta_3 \leqslant |X(\tau, \tau + \vartheta)| \leqslant \delta_4; \tag{14}$$

(b) *система* (1) *2ϑ-равномерно вполне управляема;*

(c) *система* (1) *ϑ_1-равномерно вполне управляема для любого* $\vartheta_1 \geqslant \vartheta$.

Кроме того, имеет место следующее предложение.

Предложение 3. *Пусть система* (1) *ϑ-равномерно вполне управляема* (*в смысле определения* 2). *Тогда:*

(d) *существует $\gamma = \gamma(\vartheta) > 0$ такое, что для любых t, s таких, что $|t-s| \leqslant \vartheta$, выполнено неравенство*

$$|X(t,s)| \leqslant \gamma; \tag{15}$$

(e) *матрица $B(\cdot)$ интегрально ограничена на $\mathbb{R}$ с квадратом нормы, т. е.*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |B(s)|^2\, ds \leqslant b_2 < \infty. \tag{16}$$

Свойство (d) предложения 3 будем называть просто *Свойством* (d).

Для системы (1) с кусочно непрерывными и ограниченными на $\mathbb{R}$ матричными коэффициентами Е. Л. Тонков доказал следующий критерий равномерной полной управляемости.

Теорема 1 (Е. Л. Тонков [6, 7]). *Пусть коэффициенты $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ кусочно непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}$. Система* (1) *ϑ-равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда существует $l > 0$ такое, что для каждых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется кусочно непрерывное управление $u : \Delta \to \mathbb{R}^m$, $\Delta = [t_0, t_0+\vartheta]$, удовлетворяющее оценке $\|u\|_{C(\Delta)} \leqslant l|x_0|$ и обеспечивающее для решения задачи Коши* (2), (3) *выполнение равенства* (5).

Доказательство теоремы 1 приведено в [7] и в работе [8, теорема 5.1]. Таким образом, условие теоремы 1 можно положить в основу определения равномерной полной управляемости. При этом условие кусочной непрерывности и ограниченности матриц $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ можно ослабить до условия измеримости и интегральной ограниченности. Сформулируем следующее определение.

Определение 3. (Е. Л. Тонков [7]) Пусть коэффициенты $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ системы (1) интегрально ограничены на $\mathbb{R}$. Система (1) называется:
ϑ-равномерно вполне управляемой, если существует $l > 0$ такое, что для каждых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется измеримое управление $u : \Delta \to \mathbb{R}^m$, $\Delta = [t_0, t_0+\vartheta]$, удовлетворяющее оценке $\|u\|_{C(\Delta)} \leqslant l|x_0|$ и обеспечивающее для решения задачи Коши (2), (3) выполнение равенства (5);
равномерно вполне управляемой, если существует $\vartheta > 0$ такое, что система (1) равномерно вполне управляема.

В следующих теоремах 2 и 3 теорема 1 распространяется на системы с коэффициентами более общего типа. В них устанавливается взаимосвязь между определениями равномерной полной управляемости 2 (Калмана) и 3 (Тонкова). Доказательства этих утверждений следуют схеме доказательства теоремы 1 (теорема 5.1 [8]). Взаимосвязь между этими определениями важна, поскольку в разных случаях удобно пользоваться тем или другим определением.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |A(s)|\, ds \leqslant a < \infty, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} |B(t)| \leqslant b < \infty. \tag{17}$$

Если система (1) *ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения* 2 *Калмана, то она ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения* 3 *Тонкова.*

Теорема 3. *Пусть коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |A(s)|\, ds \leqslant a < \infty, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |B(s)|^2\, ds \leqslant b_2 < \infty. \tag{18}$$

Если система (1) *ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения* 3 *Тонкова, то она ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения* 2 *Калмана.*

Следствие 1. *Пусть коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям* (17). *Тогда определения* 2 *и* 3 *совпадают.*

Если же условия на коэффициенты системы (1) будут слишком слабыми, такими, что какое-то из двух определений не имеет места, то определения не будут эквивалентны. Приведем соответствующие примеры.

Пример 1. Пусть $n = m = 1$, $A(t) \equiv 0$, $B(t) = p(t)$, где $p(t)$ — периодическая функция с периодом $\omega = 1$ такая, что $p(t) = 1/\sqrt{t}$ при $t \in (0, 1]$. Имеем $W(t_0, t_0 + 1) = \int_{t_0}^{t_0+1} B(t)B^T(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$. Этот интеграл расходится. Получаем, что $B(t) \notin L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Поскольку условие (16) является необходимым условием равномерной полной управляемости по Калману, следовательно, данная система не удовлетворяет определению 2. С другой стороны, очевидно, что для любого $x_0 \in \mathbb{R}^1$ управление $u(t) = -x_0/B(t)$ на отрезке $\Delta = [t_0, t_0 + \vartheta]$, где $\vartheta = 1$, обеспечивает для решения задачи Коши (2), (3) выполнение равенства (5); при этом выполнена оценка $\|u\|_{C(\Delta)} \leqslant l|x_0|$, где $l = 1$ и l не зависит от t_0. Следовательно, данная система удовлетворяет определению 3. $\square$

Пример 2. Пусть $n = m = 1$, $B(t) \equiv 1$, $A(t) = 2t\cos(t^2)$. Данная система не удовлетворяет определению 3: функция $A(t)$ не является интегрально ограниченной, так как $\int_t^{t+1} |2s\cos(s^2)|\,ds \to +\infty$ при $t \to +\infty$ (это легко видеть). С другой стороны, имеем $X(t, s) = \exp(\sin(t^2) - \sin(s^2))$. Отсюда вытекает неравенство (15) для $\gamma = e^2$. Отсюда следуют неравенства (12), (13) для $\vartheta = 1$, $\alpha_1 = \alpha_3 = e^{-4}$, $\alpha_2 = \alpha_4 = e^4$. Следовательно, данная система удовлетворяет определению 2. $\square$

Примеры 1, 2 показывают, что если коэффициенты системы (1) удовлетворяют достаточно слабым условиям, то определение 2 или 3 может не иметь места. Это означает, что, вообще говоря, следует указывать, в каком смысле (т. е. в смысле определения 2 или 3) понимается свойство равномерной полной управляемости. Введем еще одно определение некоторого свойства, которое связано с определениями 2 и 3.

Определение 4. Будем говорить, что система (1):
обладает свойством $H(\vartheta)$ (где $\vartheta > 0$), если существуют $\beta_i = \beta_i(\vartheta) > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, такие, что для любого $\tau \in \mathbb{R}$ и для любого вектора $h \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства

$$\beta_1|h| \leqslant \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau, s)B(s)|\,ds \leqslant \beta_2|h|, \tag{19}$$

$$\beta_3|h| \leqslant \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau + \vartheta, s)B(s)|\,ds \leqslant \beta_4|h|; \tag{20}$$

обладает свойством H, если существует $\vartheta > 0$ такое, что система (1) обладает свойством $H(\vartheta)$.

Для свойства H имеют место утверждения, аналогичные предложениям 2 и 3.

Предложение 4. *Пусть система* (1) *обладает свойством* $H(\vartheta)$. *Тогда:*
(*a*) *выполнено свойство* (*a*) *предложения* 2;
(*b*) *система* (1) *обладает свойством* $H(2\vartheta)$;
(*c*) *система* (1) *обладает свойством* $H(\vartheta_1)$ *для любого* $\vartheta_1 \geqslant \vartheta$;
(*d*) *выполнено Свойство* (*d*);
(*f*) *матрица* $B(\cdot)$ *интегрально ограничена на* $\mathbb{R}$.

Следующая теорема показывает взаимосвязь определения 4 и определения 3. Оказывается, что свойство (H) является обобщением понятия равномерной полной управляемости в смысле определения 3 Тонкова. Необходимое условие в определении 3 Тонкова — это условие интегральной ограниченности матриц $A(\cdot)$, $B(\cdot)$. В этих условиях определения 3 и 4 эквивалентны, то есть справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|A(s)|\,ds\leqslant a<\infty,\quad \sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|B(s)|\,ds\leqslant b_1<\infty. \tag{21}$$

Тогда система (1) *ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения* 3 *в том и только в том случае, если она обладает свойством $H(\vartheta)$.*

Следующие теоремы показывают взаимосвязь определения 4 и определения 2.

Теорема 5. *Пусть выполнено условие* (16). *Если система* (1) *обладает свойством $H(\vartheta)$, то она ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения* 2 *Калмана.*

Теорема 6. *Пусть матрица $B(\cdot)$ ограничена на $\mathbb{R}$. Если система* (1) *ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения* 2 *Калмана, то она обладает свойством $H(\vartheta)$.*

Следствие 2. *Пусть матрица $B(\cdot)$ ограничена на $\mathbb{R}$. Тогда определение* 2 *Калмана и определение* 4 *свойства H совпадают.*

Исходя из теоремы 4 и следствия 2, будем также называть свойство $H(\vartheta)$ свойством *ϑ-равномерной полной управляемости в смысле определения* 4.

Из теорем 4, 5, 6 теперь вытекают теоремы 2 и 3. Действительно, пусть коэффициенты системы (1) удовлетворяет условиям (17). Тогда выполнены, в частности, условия (21). Если система (1) ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения 2 Калмана, то по теореме 6 система (1) обладает свойством $H(\vartheta)$. Тогда по теореме 4 система удовлетворяет определению 3 Тонкова. Тем самым теорема 2 доказана. Пусть теперь коэффициенты системы (1) удовлетворяют условиям (18). Тогда выполнены, в частности, условия (21). Если система (1) ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения 3 Тонкова, то по теореме 4 система (1) обладает свойством $H(\vartheta)$. Тогда по теореме 5 система удовлетворяет определению 3 Калмана. Тем самым теорема 3 доказана.

Следствие 3. *Пусть выполнены условия* (17). *Тогда определения* 2, 3, 4 *равномерной полной управляемости совпадают.*

Следствие 3 вытекает из следствия 1, теоремы 4 и следствия 2.

Установим еще необходимые и достаточные условия равномерной полной управляемости по Калману.

Теорема 7. *Пусть система* (1) *ϑ-равномерно вполне управляема по Калману. Тогда выполнено следующее свойство $F(\vartheta)$: существует $l_2>0$ такое, что для каждых $t_0\in\mathbb{R}$ и $x_0\in\mathbb{R}^n$ найдется управление $u\in L_2(\Delta,\mathbb{R}^m)$, $\Delta=[t_0,t_0+\vartheta]$, удовлетворяющее оценке $\|u\|_{L_2(\Delta)}\leqslant l_2|x_0|$ и обеспечивающее для решения задачи Коши* (2), (3) *выполнение равенства* (5).

Теорема 8. *Пусть для системы* (1) *выполнены Свойство* (d) *и условие* (16). *Если имеет место свойство $F(\vartheta)$, то система* (1) *ϑ-равномерно вполне управляема по Калману.*

Следствие 4. *Пусть для системы* (1) *выполнены Свойство* (d) *и условие* (16). *Тогда система ϑ-равномерно вполне управляема по Калману в том и только в том случае, если выполнено свойство $F(\vartheta)$.*

Следствие 5. *Пусть коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям* (18). *Тогда система ϑ-равномерно вполне управляема по Калману в том и только в том случае, если выполнено свойство $F(\vartheta)$.*

Следствие 5 вытекает из следствия 4 и леммы 6 (см. § 2). Следствие 5 является аналогом следствия 1, только здесь управление выбирается в классе $L_2(\Delta)$. Теоремы 7, 8 позволяют доказать следующее важное утверждение о равномерной полной управляемости.

Теорема 9. *Пусть система* (1) *ϑ-равномерно вполне управляема по Калману. Тогда для любой измеримой по Лебегу функции $Q : \mathbb{R} \to M_{m,n}$, интегрально ограниченной с квадратом нормы, система*

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)Q(t))x + B(t)u \tag{22}$$

ϑ-равномерно вполне управляема по Калману.

Теорема 9 для системы (22) с кусочно непрерывными и ограниченными $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $Q(\cdot)$ была доказана С. Н. Поповой (см. [5], [8, теорема 5.2]). Теорема 9 обобщает теорему 5.2 [8] С. Н. Поповой.

Далее, очевидно, что в теореме 7 можно заменить L_2 на L_1, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 10. *Пусть система* (1) *ϑ-равномерно вполне управляема по Калману. Тогда выполнено следующее свойство $G(\vartheta)$: существует $l_1 > 0$ такое, что для каждых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется управление $u \in L_1(\Delta, \mathbb{R}^m)$, $\Delta = [t_0, t_0 + \vartheta]$, удовлетворяющее оценке $\|u\|_{L_1(\Delta)} \leqslant l_1|x_0|$ и обеспечивающее для решения задачи Коши* (2), (3) *выполнение равенства* (5).

Это теорема следует из теоремы 7, а также из того, что $L_2(\Delta) \subset L_1(\Delta)$ и неравенство $\|u\|_{L_2(\Delta)} \leqslant l_2|x_0|$ влечет неравенство $\|u\|_{L_1(\Delta)} \leqslant l_1|x_0|$ для некоторого $l_1 = l_1(\vartheta) > 0$. Можно было бы предположить, по аналогии с теоремой 8, что (при определенных условиях, например (17)) справедливо обратное утверждение, а именно следующее.

Утверждение 1. *Пусть для системы* (1) *выполнено условие* (17). *Если имеет место свойство $G(\vartheta)$, то система* (1) *ϑ-равномерно вполне управляема по Калману.*

Однако оказывается, что это утверждение неверно. Это показывает следующий пример.

Пример 3. Пусть $n = m = 1$; $A(t) \equiv 0$; $B(t) = 1$, $t < 1$; $B(t) = \chi_{[n,n+1/n)}(t)$, $t \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, где $\chi_E(t)$ — характеристическая функция множества E. Пусть $\vartheta = 1$. Положим $l_1 = 1$. Пусть заданы произвольные $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Если $t_0 < 1$, то управление $u(t) = (-1) \cdot x_0$, $t \in \Delta = [t_0, t_0 + 1]$, обеспечивает выполнение равенства (7), при этом $\|u\|_{L_1(\Delta)} = |x_0| \leqslant l_1|x_0|$. Пусть $t_0 \geqslant 1$, и пусть $t_0 \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда полагаем

если $t_0 \in \left[n, n + \dfrac{1}{n+1}\right)$, то

$$u(t) = \begin{cases} -nx_0, & t \in \left[t_0, n + \dfrac{1}{n}\right), \\ 0, & t \in \left[n + \dfrac{1}{n}, n+1\right), \\ -nx_0, & t \in [n+1, t_0 + 1); \end{cases}$$

если $t_0 \in \left[n + \dfrac{1}{n+1}, n+1\right)$, то

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, n+1), \\ -(n+1)x_0, & t \in \left[n+1, n+1+\dfrac{1}{n+1}\right), \\ 0, & t \in \left[n+1+\dfrac{1}{n+1}, t_0+1\right]. \end{cases}$$

Можно проверить, что $\|u\|_{L_1(\Delta)} = |x_0| \leqslant l_1|x_0|$ и $u(t)$, $t \in \Delta$, обеспечивает выполнение равенства (7). Следовательно, для системы выполнено свойство $G(\vartheta)$. Пусть $\vartheta \in \mathbb{N}$ — произвольное заданное число. Для любого $\tau \in \mathbb{N}$ имеем

$$W(\tau, \tau + \vartheta) = \int_\tau^{\tau+\vartheta} b^2(t)\,dt = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau+1} + \ldots + \frac{1}{\tau+\vartheta-1} \leqslant \frac{\vartheta}{\tau} \to 0 \ \text{ при } \ \tau \to \infty.$$

Следовательно, неравенство $\alpha_1 I \leqslant W(\tau, \tau+\vartheta)$ в (12) не выполнено ни для какого ϑ, а в силу свойства (c) предложения 2 ни для какого $\vartheta > 0$. Поэтому система не является ϑ-равномерно вполне управляемой по Калману. $\square$

Если бы утверждение 1 было верно, то из теоремы 10 и утверждения 1 можно было бы доказать следующее утверждение (аналогично тому, как теорема 9 доказывается из теорем 7, 8, см. далее § 2).

Теорема 11. *Пусть матрица $B(\cdot)$ ограничена на $\mathbb{R}$ и система* (1) *ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения* 4. *Тогда для любой измеримой по Лебегу, интегрально ограниченной функции $Q : \mathbb{R} \to M_{m,n}$ система* (22) *ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения* 4.

Но, поскольку утверждение 1 неверно, доказать теорему 11 с помощью него нельзя. Тем не менее теорема 11 верна и доказательство будет проведено другим способом. В силу следствия 2 свойство ϑ-равномерной полной управляемости в смысле определения 4 в теореме 11 можно заменить (и в посылке, и в заключении) на свойство ϑ-равномерной полной управляемости в смысле Калмана.

Предложения 3, 4 и теоремы 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 будут доказаны в § 2.

В общем случае определения 2, 3 и 4 не совпадают. Примеры, показывающие их различие, будут даны в § 2.

Замечание 3. Существует другое определение, не *равномерной полной управляемости*, а *равномерной управляемости* (см. L. M. Silverman, H. E. Meadows [9–11]). Эти определения независимы между собой, они несут различный смысл и применяются для решения разных задач. Построим матрицы $P_0(t) = B(t)$, $P_k(t) = -A(t)P_{k-1}(t) + \dot{P}_{k-1}(t)$, $k = \overline{1, n-1}$, $Q(t) = [P_0(t), P_1(t), \ldots, P_{n-1}(t)]$. Предполагаем, что необходимые производные существуют. Если ранг матрицы $Q(t)$ в некоторой точке $\alpha \in (t_0, t_1)$ равен n, то (см. [3, с. 148]) система (1) вполне управляема на отрезке $[\tau_0, \tau_1] \ni \alpha$. Система (1) названа *равномерно управляемой на интервале* (t_0, t_1) [11], если ранг матрицы равен n для всех $t \in (t_0, t_1)$. Здесь интервал (t_0, t_1) может быть и конечным. Ясно, что тогда система не является *равномерно вполне управляемой.* С другой стороны, в определении [11] необходимо требуется достаточная гладкость коэффициентов, в то время как в определениях 2, 3 и 4 она не требуется. Соответственно, система, удовлетворяющая (любому) определению равномерной полной управляемости, может не быть равномерно управляемой в смысле [11], и наоборот. Определение [11] применяется для решения задачи приведения системы (1) к каноническому виду, эквивалентному дифференциальному уравнению (одному или нескольким). В частности, это свойство используется в работах [12,13]. В данной работе определение равномерной управляемости [11] не используется.

Замечание 4. Свойство равномерной полной управляемости системы (1) играет ключевую роль в задачах локального и глобального управления асимптотическими инвариантами системы

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{23}$$

замкнутой по принципу линейной обратной связи $u = U(t)x$ (см. работы [5–8, 14–28, 30–32]), в частности в задачах стабилизации системы (23). При этом если коэффициенты системы (1) удовлетворяют лишь условиям (21), но условие (16) не выполнено, то определением 2 Калмана пользоваться нельзя; можно пользоваться определениями 3 или 4. Задачи управления асимптотическими инвариантами системы (23) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (21), исследовал А. А. Козлов [30].

§ 2. Доказательства необходимых и достаточных условий равномерной полной управляемости

Напомним, что операторная норма $|A| = \max\limits_{|x|=1} |Ax|$ матрицы $A \in M_{n,m}$ совпадает с $\sqrt{\Lambda(A^T A)}$, где $\Lambda(A^T A)$ — наибольшее собственное значение матрицы $A^T A$ [33, с. 357–358], и что $|A^T| = |A|$ [33, с. 71].

Докажем предложение 3. Для этого предварительно докажем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $W \geqslant 0$. Тогда $W \leqslant \alpha I \iff |W| \leqslant \alpha$.*

Доказательство леммы 1 приводится в [34, лемма 2].

Лемма 2. *Пусть $X, W \in M_n$, $0 < \alpha I \leqslant W$ и $XWX^T \leqslant \beta I$. Тогда $|X| \leqslant \sqrt{\beta/\alpha}$.*

Доказательство. $|X|^2 = |X^T|^2 = \max\limits_{|h|=1}(h^T X X^T h) = \dfrac{1}{\alpha} \max\limits_{|h|=1}(h^T X (\alpha I) X^T h) \leqslant$ $\leqslant \dfrac{1}{\alpha} \max\limits_{|h|=1}(h^T X W X^T h) \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha}$. □

Пусть $\Delta = [\tau, \tau + \vartheta]$, $G : \Delta \to M_{n,m}$, $G := \{g_{ij}\}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Лемма 3. *Соотношение $G \in L_p(\Delta, M_{n,m})$ $(p = 1, 2)$ равносильно соотношениям $g_{ij} \in L_p(\Delta, \mathbb{R})$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$; при этом имеют место неравенства*

$$\|G\|^2_{L_2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \|g_{ij}\|^2_{L_2} \leqslant m \|G\|^2_{L_2}, \tag{24}$$

$$\|g_{ij}\|_{L_1} \leqslant \sqrt{m} \|G\|_{L_1}, \qquad \|G\|_{L_1} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \|g_{ij}\|_{L_1}. \tag{25}$$

Доказательство. Построим матрицу $G^T(s)G(s)$. При каждом $s \in \Delta$ эта матрица симметрическая, неотрицательно определенная. Ее собственные значения вещественные и неотрицательные: $0 \leqslant \lambda_1(s) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m(s)$. Пусть $\Lambda(s)$ — это наибольшее собственное значение этой матрицы, то есть $\Lambda(s) = \lambda_m(s)$. Имеет место неравенство

$$0 \leqslant \Lambda(s) \leqslant \lambda_1(s) + \ldots + \lambda_m(s) = \mathrm{Sp}(G^T(s)G(s)) = \sum_{i,j} g^2_{ij}(s) \leqslant m\Lambda(s). \tag{26}$$

Имеем $\displaystyle\int_\Delta |G(s)|^2\,ds = \int_\Delta \Lambda(s)\,ds$. Поэтому из неравенства (26) вытекает требуемое утверждение при $p = 2$. Интегрируя неравенство (26) по промежутку Δ, получаем неравенства (24).

Далее, очевидны неравенства

$$|g_{ij}(s)| \leqslant \Big(\sum_{i,j} g^2_{ij}(s)\Big)^{1/2} \leqslant \sqrt{m\Lambda(s)}, \qquad \sqrt{\Lambda(s)} \leqslant \Big(\sum_{i,j} g^2_{ij}(s)\Big)^{1/2} \leqslant \sum_{i,j} |g_{ij}(s)|. \tag{27}$$

Имеем $\displaystyle\int_\Delta |G(s)|\,ds = \int_\Delta \sqrt{\Lambda(s)}\,ds$. Поэтому из неравенств (27) получаем требуемое утверждение для $p = 1$. Интегрируя неравенства (27) по промежутку Δ, получаем неравенства (25). □

Следствие 6. *Соотношение $G \in L_2(\Delta, M_{n,m})$ равносильно соотношению $GG^T \in L_1(\Delta, M_n)$; при этом имеет место неравенство*

$$\|GG^T\|_{L_1} \leqslant \|G\|^2_{L_2} \leqslant n\sqrt{n} \|GG^T\|_{L_1}. \tag{28}$$

Доказательство. ($\Longrightarrow$). $\int_\Delta |G(s)G^T(s)|\,ds \leqslant \int_\Delta |G(s)||G^T(s)|\,ds = \int_\Delta |G(s)|^2\,ds.$

($\Longleftarrow$). Пусть $F(s)=G(s)G^T(s)$ и $F\in L_1(\Delta,M_n)$. Тогда из первого неравенства (25) следует, что $\|f_{ii}\|_{L_1}\leqslant\sqrt{n}\|F\|_{L_1}$, $i=\overline{1,n}$. Имеем $f_{ii}(s)=\sum_{j=1}^m g_{ij}^2(s)$. Следовательно, $\int_\Delta\sum_{j=1}^m g_{ij}^2(s)\,ds\leqslant$ $\leqslant\sqrt{n}\|F\|_{L_1}$, $i=\overline{1,n}$. Поэтому $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\int_\Delta g_{ij}^2(s)\,ds\leqslant n\sqrt{n}\|F\|_{L_1}$. Учитывая первое неравенство в (24), получаем второе неравенство в (28). $\square$

Лемма 4. *Соотношение $G\in L_2(\Delta,M_{n,m})$ равносильно неравенству*

$$\int_\Delta G(s)G^T(s)\,ds\leqslant\alpha I \tag{29}$$

в смысле квадратичных форм; при этом имеют место неравенства

$$\int_\Delta G(s)G^T(s)\,ds\leqslant I\|G\|_{L_2}^2,\qquad \|G\|_{L_2}^2\leqslant n\alpha. \tag{30}$$

Доказательство. ($\Longrightarrow$). Пусть $G\in L_2(\Delta,M_{n,m})$. Тогда для любого $h\in\mathbb{R}^n$, $|h|=1$, имеем

$$h^T\cdot\int_\Delta G(s)G^T(s)\,ds\cdot h=\int_\Delta |G^T(s)h|^2\,ds\leqslant\int_\Delta |G^T(s)|^2|h|^2\,ds\leqslant\int_\Delta |G^T(s)|^2\,ds=\|G\|_{L_2}^2.$$

Отсюда следуют первая часть утверждения и левое неравенство в (30).

($\Longleftarrow$). Пусть выполнено (29). Следовательно, для любого $h\in\mathbb{R}^n$, $|h|=1$, имеем

$$\int_\Delta h^TG(s)G^T(s)h\,ds\leqslant\alpha. \tag{31}$$

Для каждого $i=\overline{1,n}$ положим $h=e_i\in\mathbb{R}^n$ в (31), получим $\alpha\geqslant\int_\Delta e_i^TG(s)G^T(s)e_i\,ds=$ $=\int_\Delta\sum_{j=1}^m g_{ij}^2(s)\,ds$. Отсюда следует, что $n\alpha\geqslant\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\int_\Delta g_{ij}^2(s)\,ds$. Учитывая первое неравенство в (24), получаем вторую часть утверждения и правое неравенство в (30). $\square$

Лемма 5. *Пусть для любого вектора $h\in\mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$\int_\Delta |h^TG(s)|\,ds\leqslant\beta|h|. \tag{32}$$

Тогда $G\in L_1(\Delta,M_{n,m})$ и $\|G\|_{L_1}\leqslant n\sqrt{m}\beta$.

Доказательство. Для каждого $i=\overline{1,n}$ положим $h=e_i\in\mathbb{R}^n$ в (32), получим $\beta\geqslant\int_\Delta|e_i^TG(s)|\,ds=\int_\Delta\Big(\sum_{j=1}^m g_{ij}^2(s)\Big)^{1/2}ds\geqslant\int_\Delta\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{j=1}^m|g_{ij}(s)|\,ds$. Суммируя эти неравенства по $i=\overline{1,n}$ и учитывая второе неравенство в (25), получаем

$$n\sqrt{m}\beta\geqslant\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\int_\Delta|g_{ij}(s)|\,ds=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\|g_{ij}\|_{L_1}\geqslant\|G\|_{L_1}. \qquad\square$$

Доказательство предложения 3. Пусть система (1) ϑ-равномерно вполне управляема в смысле Калмана. Тогда в силу свойства (c) предложения 2 можно считать без ограничения общности, что $\vartheta\geqslant 1$. Тогда выполнены неравенства (12), (13) для некоторых

$\alpha_i = \alpha_i(\vartheta) > 0$, $i = \overline{1,4}$. Согласно предложению 2 система (1) является также 2ϑ-равномерно вполне управляемой. Следовательно, существуют $\alpha_i = \alpha_i(\vartheta) > 0$, $i = 5, 6$, такие, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства

$$0 < \alpha_5 I \leqslant W(\tau, \tau + 2\vartheta) \leqslant \alpha_6 I. \tag{33}$$

Кроме того, выполнены неравенства (14). Пусть $0 \leqslant t - s \leqslant \vartheta$. Имеем

$$X(t,s)W(s,s+\vartheta)X^T(t,s) = \int_s^{s+\vartheta} X(t,\zeta)B(\zeta)B^T(\zeta)X^T(t,\zeta)\,d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t-\vartheta}^{t+\vartheta} X(t,\zeta)B(\zeta)B^T(\zeta)X^T(t,\zeta)\,d\zeta = X(t,t-\vartheta)W(t-\vartheta,t+\vartheta)X^T(t,t-\vartheta) =: V(t,\vartheta).$$

В силу неравенств (14), (33) и леммы 1 имеем $|V(t,\vartheta)| \leqslant \delta_2^2\alpha_6$. По лемме 1 получаем, что $V(t,\vartheta) \leqslant \delta_2^2\alpha_6 I$. Следовательно,

$$X(t,s)W(s,s+\vartheta)X^T(t,s) \leqslant \delta_2^2\alpha_6 I.$$

Отсюда и из неравенства (12) по лемме 2 получаем, что $|X(t,s)| \leqslant \sqrt{\delta_2^2\alpha_6/\alpha_1} =: \gamma_1$. Далее,

$$\begin{aligned} 0 < \alpha_1 I \leqslant W(t,t+\vartheta) = X(t,s)\int_t^{t+\vartheta} X(s,\zeta)B(\zeta)B^T(\zeta)X^T(s,\zeta)\,d\zeta\, X^T(t,s) \leqslant \\ \leqslant X(t,s)\int_s^{s+2\vartheta} X(s,\zeta)B(\zeta)B^T(\zeta)X^T(s,\zeta)\,d\zeta\, X^T(t,s) = X(t,s)W(s,s+2\vartheta)X^T(t,s). \end{aligned} \tag{34}$$

Из (34) и (33) имеем

$$X(s,t)W(t,t+\vartheta)X^T(s,t) \leqslant W(s,s+2\vartheta) \leqslant \alpha_6 I.$$

По лемме 2 получаем, что $|X(s,t)| \leqslant \sqrt{\alpha_6/\alpha_1} =: \gamma_2$. Полагая $\gamma := \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$, получаем требуемое неравенство (15).

Докажем пункт (e). Из неравенства (12) следует, что для всякого $\tau \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство (29), где $G(s) = X(\tau,s)B(s)$, $\Delta = [\tau, \tau+\vartheta]$, для $\alpha = \alpha_2$, где α_2 не зависит от τ. Тогда в силу леммы 4 выполнено неравенство $n\alpha_2 \geqslant \|G\|_{L_2}^2$. Теперь, используя следствие 6 и предложение 3 (пункт (d)), получаем, что для любого $\tau \in \mathbb{R}$

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta} |B(s)|^2\,ds = \|B\|_{L_2}^2 \leqslant n\sqrt{n}\|BB^T\|_{L_1} = n\sqrt{n}\int_\tau^{\tau+\vartheta} |B(s)B^T(s)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant n\sqrt{n}\int_\tau^{\tau+\vartheta} |X(s,\tau)||X(\tau,s)B(s)B^T(s)X^T(\tau,s)||X^T(s,\tau)|\,ds \leqslant n\sqrt{n}\gamma^2\|GG^T\|_{L_1} \leqslant$$

$$\leqslant n\sqrt{n}\gamma^2\|G\|_{L_2}^2 \leqslant n^2\sqrt{n}\gamma^2\alpha_2 =: b_0.$$

Здесь $b_0 = b_0(\vartheta)$ не зависит от τ. Поскольку $\vartheta \geqslant 1$, неравенство (16) выполнено при $b_2 := b_0$. Предложение 3 доказано. □

Доказательство предложения 4. (a) Рассмотрим произвольный вектор $g \in \mathbb{R}^n$, $g \neq 0$. Положим $h = X^T(\tau+\vartheta,\tau)g$ и подставим в (19), получим неравенство

$$0 < \beta_1|X^T(\tau+\vartheta,\tau)g| \leqslant \int_\tau^{\tau+\vartheta} |g^T X(\tau+\vartheta,s)B(s)|\,ds \leqslant \beta_2|X^T(\tau+\vartheta,\tau)g|. \tag{35}$$

Из неравенства (20) при $h = g$ и (35) получаем неравенства

$$\beta_1|X^T(\tau+\vartheta,\tau)g| \leqslant \beta_4|g|, \qquad \beta_3|g| \leqslant \beta_2|X^T(\tau+\vartheta,\tau)g|. \tag{36}$$

Из (36) получаем неравенства $\beta_3/\beta_2 \leqslant |X^T(\tau+\vartheta,\tau)| \leqslant \beta_4/\beta_1$, так как $g \neq 0$ — любой. Таким образом, левое (двойное) неравенство в (14) выполнено при $\delta_1 := \beta_3/\beta_2$, $\delta_2 := \beta_4/\beta_1$.

Далее, полагая $h = X^T(\tau,\tau+\vartheta)g$, где $g \in \mathbb{R}^n$, $g \neq 0$, подставляя в (20) и рассуждая аналогично, получим правое (двойное) неравенство в (14) при $\delta_3 := \beta_1/\beta_4$, $\delta_4 := \beta_2/\beta_3$.

(b) Представим $J := \displaystyle\int_\tau^{\tau+2\vartheta} |h^T X(\tau,s)B(s)|\,ds$ в виде $J = J_1 + J_2$, где

$$J_1 := \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau,s)B(s)|\,ds, \qquad J_2 := \int_{\tau+\vartheta}^{\tau+2\vartheta} |h^T X(\tau,s)B(s)|\,ds.$$

Имеем $J_1 \geqslant \beta_1|h|$, $J_2 \geqslant 0$, следовательно, $J \geqslant \beta_1|h|$. Далее, $J_1 \leqslant \beta_2|h|$. Положим $h = X^T(\tau+\vartheta,\tau)g$ в J_2. Получим

$$J_2 = \int_{\tau+\vartheta}^{\tau+2\vartheta} |g^T X(\tau+\vartheta,s)B(s)|\,ds \leqslant \beta_2|g| = \beta_2|X^T(\tau,\tau+\vartheta)h| \leqslant \beta_2|X^T(\tau,\tau+\vartheta)||h| \leqslant \beta_2\delta_4|h|.$$

Следовательно, $J \leqslant \beta_2(1+\delta_4)|h|$. Аналогично доказывается неравенство

$$\beta_3|h| \leqslant \int_\tau^{\tau+2\vartheta} |h^T X(\tau+2\vartheta,s)B(s)|\,ds \leqslant \beta_4(1+\delta_2)|h|.$$

И вообще, рассуждая аналогично, можно показать, что выполнены неравенства

$$\beta_1^{(k)}|h| \leqslant \int_\tau^{\tau+k\vartheta} |h^T X(\tau,s)B(s)|\,ds \leqslant \beta_2^{(k)}|h|, \tag{37}$$

$$\beta_3^{(k)}|h| \leqslant \int_\tau^{\tau+k\vartheta} |h^T X(\tau+k\vartheta,s)B(s)|\,ds \leqslant \beta_4^{(k)}|h|, \tag{38}$$

где $\beta_1^{(k)} := \beta_1$, $\beta_2^{(k)} := \beta_2(1+\delta_4+\ldots+\delta_4^{k-1})$, $\beta_3^{(k)} := \beta_3$, $\beta_4^{(k)} := \beta_4(1+\delta_2+\ldots+\delta_2^{k-1})$, т. е. система (1) обладает свойством $H(k\vartheta)$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

(c) Для любого $\vartheta_1 \geqslant \vartheta$ существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $k\vartheta \leqslant \vartheta_1 < (k+1)\vartheta$. Из неравенств (37), (38) вытекают неравенства

$$\beta_1^{(k)}|h| \leqslant \int_\tau^{\tau+\vartheta_1} |h^T X(\tau,s)B(s)|\,ds \leqslant \beta_2^{(k+1)}|h|,$$
$$\beta_3^{(k)}|h| \leqslant \int_\tau^{\tau+\vartheta_1} |h^T X(\tau+\vartheta_1,s)B(s)|\,ds \leqslant \beta_4^{(k+1)}|h|,$$

из которых следует свойство $H(\vartheta_1)$ для системы (1).

(d) Пусть $0 \leqslant t-s \leqslant \vartheta$. Имеем

$$\beta_1|X^T(t,s)h| \leqslant \int_s^{s+\vartheta} |h^T X(t,s)X(s,\zeta)B(\zeta)|\,d\zeta \leqslant \int_{t-\vartheta}^{t+\vartheta} |h^T X(t,\zeta)B(\zeta)|\,d\zeta =$$
$$= \left| f = X^T(t,t-\vartheta)h \right| = \int_{t-\vartheta}^{t+\vartheta} |f^T X(t-\vartheta,\zeta)B(\zeta)|\,d\zeta \leqslant \beta_2^{(2)}|f| \leqslant \beta_2^{(2)}\delta_2|h|.$$

Поскольку вектор $h \in \mathbb{R}^n$ произвольный, отсюда следует, что $|X^T(t,s)| \leqslant \beta_2^{(2)}\delta_2/\beta_1 =: \gamma_1$.

Далее,

$$\beta_1|X^T(s,t)g| \leqslant \int_t^{t+\vartheta} |g^T X(s,t)X(t,\zeta)B(\zeta)|\,d\zeta \leqslant \int_s^{s+2\vartheta} |g^T X(s,\zeta)B(\zeta)|\,d\zeta \leqslant \beta_2^{(2)}|g|.$$

Поскольку вектор $g \in \mathbb{R}^n$ произвольный, отсюда следует, что $|X^T(s,t)| \leqslant \beta_2^{(2)}/\beta_1 =: \gamma_2$. Полагая $\gamma := \max\{\gamma_1,\gamma_2\}$ и учитывая равенство $|X| = |X^T|$, получаем требуемое неравенство (15).

(f) Рассмотрим матрицу $G(s) = X(\tau, s)B(s)$, $s \in \Delta = [\tau, \tau+\vartheta]$. Используя неравенство (15), правое неравенство (19) и лемму 5 при $\beta = \beta_2$, получаем

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta} |B(s)|\,ds = \int_\tau^{\tau+\vartheta} |X(s,\tau)X(\tau,s)B(s)|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \int_\tau^{\tau+\vartheta} |X(s,\tau)||G(s)|\,ds \leqslant \gamma\|G\|_{L_1} \leqslant \gamma\beta_2 n\sqrt{m} =: b_0.$$

Здесь $b_0 = b_0(\vartheta)$ не зависит от τ. Таким образом, матрица $B(\cdot)$ интегрально ограничена. Предложение 4 доказано. □

Замечание 5. Очевидна следующая эквивалентная формулировка определения 4: система (1) *обладает свойством* $H(\vartheta)$, если существуют $\beta_i = \beta_i(\vartheta) > 0$, $i = 1,2,3,4$, такие, что для любого $\tau \in \mathbb{R}$ и для любого вектора $h \in \mathbb{R}^n$ такого, что $|h| = 1$, выполнены неравенства

$$\beta_1 \leqslant \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau,s)B(s)|\,ds \leqslant \beta_2, \tag{39}$$
$$\beta_3 \leqslant \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau+\vartheta,s)B(s)|\,ds \leqslant \beta_4. \tag{40}$$

Перейдем к доказательству теоремы 4. Докажем предварительно вспомогательные утверждения.

Лемма 6. *Пусть матрица* $A(\cdot)$ *интегрально ограничена. Тогда для матрицы Коши свободной системы* (4) *выполнено Свойство* (d).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено неравенство (11), и пусть $0 \leqslant t-s \leqslant \vartheta$. По формуле Коши имеем

$$X(t,s) = I + \int_s^t A(\zeta)X(\zeta,s)\,d\zeta, \quad X(s,t) = I - \int_s^t A(\zeta)X(\zeta,t)\,d\zeta \quad \Longrightarrow$$
$$|X(t,s)| \leqslant 1 + \int_s^t |A(\zeta)||X(\zeta,s)|\,d\zeta, \quad |X(s,t)| \leqslant 1 + \int_s^t |A(\zeta)||X(\zeta,t)|\,d\zeta.$$

Из неравенства Гронуолла–Беллмана [36, с. 108] следуют неравенства

$$|X(t,s)| \leqslant \exp\Big(\int_s^t |A(\zeta)|\,d\zeta\Big) \leqslant e^{(\vartheta+1)a}, \ \ |X(s,t)| \leqslant \exp\Big(\int_s^t |A(\zeta)|\,d\zeta\Big) \leqslant e^{(\vartheta+1)a}.$$

Таким образом, неравенство (15) выполнено при $\gamma = e^{(\vartheta+1)a}$. □

Лемма 7. *Пусть система* (1) ϑ*-равномерно вполне управляема в смысле определения* 4. *Тогда существует* $b_3 = b_3(\vartheta) > 0$ *такое, что*

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \int_\tau^{\tau+\vartheta} |X(\tau,s)B(s)|\,ds \leqslant b_3 < \infty.$$

Доказательство вытекает из правого неравенства (19) и леммы 5: в качестве b_3 можно взять $b_3 := n\sqrt{m}\beta_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4. Пусть выполнены условия (21).
Н е о б х о д и м о с т ь. Докажем, что существует $\beta_1 > 0$ такое, что для любого $\tau \in \mathbb{R}$ и для любого $h \in \mathbb{R}^n$ такого, что $|h| = 1$, выполнено неравенство

$$\beta_1 \leqslant \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau,s)B(s)|\,ds. \tag{41}$$

Предположим противное. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют $\tau_k \in \mathbb{R}$ и $h_k \in \mathbb{R}^n$, $|h_k| = 1$, такие, что

$$\int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} |h_k^T X(\tau_k, s)B(s)|\, ds < \frac{1}{k}. \tag{42}$$

Поскольку система (1) ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения 3, то существует $l > 0$ такое, что для $x_0^k = -h_k$ на отрезке $\Delta_k = [\tau_k, \tau_k + \vartheta]$ найдется измеримое управление $u_k(\cdot)$, которое переводит систему (1) из состояния $x(\tau_k) = x_0^k$ в состояние $x(\tau_k + \vartheta) = 0$ и удовлетворяет неравенству $\|u_k\|_{C(\Delta_k)} \leqslant l|x_0^k| = l$. Следовательно, для этого управления выполнено соотношение

$$\int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} X(\tau_k, s)B(s)u_k(s)\, ds = -x_0^k.$$

Умножая это равенство слева на строку h_k^T, получим

$$1 = |h_k^T(-x_0^k)| = \left|\int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} h_k^T X(\tau_k, s)B(s)u_k(s)\, ds\right| \leqslant \int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} |h_k^T X(\tau_k, s)B(s)u_k(s)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} |h_k^T X(\tau_k, s)B(s)| \cdot |u_k(s)|\, ds \leqslant l \int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} |h_k^T X(\tau_k, s)B(s)|\, ds < \frac{l}{k} \to 0 \ \text{ при } \ k \to \infty.$$

Противоречие. Следовательно, левое неравенство в (39) доказано.

Далее, для любого $h \in \mathbb{R}^n$ такого, что $|h| = 1$, в силу неравенств (21) и леммы 6 имеем

$$\int_{\tau}^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau, s)B(s)|\, ds \leqslant \int_{\tau}^{\tau+\vartheta} |h^T||X(\tau, s)||B(s)|\, ds \leqslant \gamma b_1(\vartheta + 1) = e^{(\vartheta+1)a} b_1(\vartheta + 1) =: \beta_2.$$

таким образом, неравенства (39) доказаны.

Далее, аналогично, для любого $h \in \mathbb{R}^n$ такого, что $|h| = 1$, в силу неравенств (21) и леммы 6 имеем

$$\int_{\tau}^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau + \vartheta, s)B(s)|\, ds \leqslant \gamma b(\vartheta + 1) = e^{(\vartheta+1)a} b_1(\vartheta + 1) =: \beta_4.$$

Докажем левое неравенство в (40). Пусть заданы произвольное $\tau \in \mathbb{R}$ и вектор $g \in \mathbb{R}^n$ такой, что $|g| = 1$. Построим $h = X^T(\tau + \vartheta, \tau)g$. В силу леммы 6 имеем

$$1 = |g| = |X^T(\tau, \tau + \vartheta)h| \leqslant |X^T(\tau, \tau + \vartheta)||h| \leqslant \gamma|h|, \tag{43}$$

следовательно, $|h| \geqslant 1/\gamma = e^{-(\vartheta+1)a}$. В силу доказанных неравенств (39) (и, следовательно, (19)) имеем

$$\int_{\tau}^{\tau+\vartheta} |g^T X(\tau + \vartheta, s)B(s)|\, ds = \int_{\tau}^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau, s)B(s)|\, ds \geqslant \beta_1|h| \geqslant \beta_1 e^{-(\vartheta+1)a} =: \beta_3.$$

Следовательно, неравенства (40) доказаны. Таким образом, необходимость в теореме 4 доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Для доказательства следует провести рассуждения, которые повторяют доказательство импликации $2 \Longrightarrow 1$ в теореме 1 [35] и импликации $2 \Longrightarrow 1$ в теореме 2 [35]. При этом доказательстве используется следствие 3 [35]; вместо него следует воспользоваться приведенной здесь леммой 7. Теорема доказана. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 5. Пусть выполнено условие (16). Предположим, что система (1) обладает свойством $H(\vartheta)$. Тогда выполнено Свойство (d) в силу предложения 4. Пусть заданы произвольные $\tau \in \mathbb{R}$ и вектор $h \in \mathbb{R}^n$ такой, что $|h| = 1$. Используя Свойство (d) и условие (16), получаем неравенство

$$h^T W(\tau, \tau + \vartheta)h = \int_{\tau}^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau, s)B(s)|^2\, ds \leqslant \gamma^2 \int_{\tau}^{\tau+\vartheta} |B(s)|^2\, ds \leqslant \gamma^2(\vartheta + 1)b_2 =: \alpha_2. \tag{44}$$

Аналогично,

$$h^T X(\tau+\vartheta,\tau)W(\tau,\tau+\vartheta)X^T(\tau+\vartheta,\tau)h \leqslant \gamma^2(\vartheta+1)b_2 =: \alpha_4. \tag{45}$$

В силу неравенства Буняковского имеем

$$h^T W(\tau,\tau+\vartheta)h = \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau,s)B(s)|^2\,ds \geqslant \frac{1}{\vartheta}\Big(\int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau,s)B(s)|\,ds\Big)^2 \geqslant \frac{|\beta_1|^2}{\vartheta} =: \alpha_1.$$

Аналогично, $h^T X(\tau+\vartheta,\tau)W(\tau,\tau+\vartheta)X^T(\tau+\vartheta,\tau)h \geqslant \dfrac{|\beta_3|^2}{\vartheta} =: \alpha_3$. Таким образом, неравенства (12), (13) выполнены. Теорема 5 доказана. □

Доказательство теоремы 6. Пусть $\|B\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant b$. Предположим, что система (1) ϑ-равномерно вполне управляема по Калману. В силу предложения 3 выполнено Свойство (d). Тогда получаем следующие неравенства для любого $\tau \in \mathbb{R}$ и любого $h \in \mathbb{R}^n$ такого, что $|h| = 1$:

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau,s)B(s)|\,ds \leqslant \gamma b\vartheta =: \beta_2, \quad \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau+\vartheta,s)B(s)|\,ds \leqslant \gamma b\vartheta =: \beta_4.$$

Докажем, что существует $\beta_1 > 0$ такое, что для любого $\tau \in \mathbb{R}$ и для любого $h \in \mathbb{R}^n$ такого, что $|h| = 1$, выполнено неравенство (41). Предположим противное. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют $\tau_k \in \mathbb{R}$ и $h_k \in \mathbb{R}^n$, $|h_k| = 1$, такие, что выполнено неравенство (42). Тогда имеем

$$\alpha_1 \leqslant h_k^T W(\tau_k,\tau_k+\vartheta)h_k = \int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} |h_k^T X(\tau_k,s)B(s)B^T(s)X^T(\tau_k,s)h_k|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} |h_k^T X(\tau_k,s)B(s)||B^T(s)||X^T(\tau_k,s)||h_k|\,ds \leqslant b\gamma\int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} |h_k^T X(\tau_k,s)B(s)|\,ds < \frac{b\gamma}{k} \to 0$$

при $k \to \infty$. Противоречие. Таким образом, неравенства (39) (и, следовательно, (19)) доказаны.

Далее, пусть заданы произвольное $\tau \in \mathbb{R}$ и вектор $g \in \mathbb{R}^n$ такой, что $|g| = 1$. Построим $h = X^T(\tau+\vartheta,\tau)g$. С учетом Свойства (d) имеем неравенства (43), следовательно, $|h| \geqslant 1/\gamma$. В силу доказанных неравенств (39) и (19) имеем

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta} |g^T X(\tau+\vartheta,s)B(s)|\,ds = \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau,s)B(s)|\,ds \geqslant \beta_1|h| \geqslant \beta_1/\gamma =: \beta_3.$$

Следовательно, неравенства (40) доказаны. Теорема 6 доказана. □

Пример 4. Пусть $n = m = 1$, $A(t) \equiv 0$, $B(t) = q(t)$, где функция $q(t)$ определена следующим образом: $q(t) \equiv 1$ при $t < 1$; $q(t) = \sqrt{k}$ при $t \in [k, k+1/k)$, $k \in \mathbb{N}$; $q(t) = 0$ при остальных t. Имеем $X(t,s) \equiv 1$. Далее, для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $W(k,k+1) = \displaystyle\int_k^{k+1} B^2(t)\,dt = \int_k^{k+1/k} k\,dt = 1$. Если $k \in \mathbb{Z}$ и $k \leqslant 0$, то также очевидно $W(k,k+1) = 1$. Тогда для любого $\tau \in \mathbb{R}$ имеем $1 = W([\tau]+1,[\tau]+2) \leqslant W(\tau,\tau+2) \leqslant W([\tau],[\tau]+3) = 3$, т. е. выполнены неравенства (12) при $\vartheta = 2$. Очевидно, (13) также выполнены. Таким образом, данная система является равномерно вполне управляемой по Калману. Проверим неравенства (39). Пусть $|h| = 1$. Тогда $\displaystyle\int_k^{k+1} |h^T X(k,s)B(s)|\,ds = \int_k^{k+1/k} \sqrt{k}\,dt = \frac{1}{\sqrt{k}}$ при $k \in \mathbb{N}$. Пусть даны произвольное целое число $\vartheta > 0$ и любое $\beta_1 > 0$. Выберем $\tau \in \mathbb{N}$ такое, что $\tau > (\vartheta/\beta_1)^2$. Тогда

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau,s)B(s)|\,ds = \frac{1}{\sqrt{\tau}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{\tau+\vartheta-1}} < \frac{\vartheta}{\sqrt{\tau}} < \beta_1.$$

Следовательно, свойство $H(\vartheta)$ не выполнено ни для какого целого $\vartheta > 0$, а в силу свойства (c) предложения 4, ни для какого $\vartheta > 0$. Следовательно, данная система не является равномерно вполне управляемой в смысле определения 4 и в смысле определения 3 (поскольку они эквивалентны по теореме 4: условия этой теоремы выполнены). Данный пример, в частности, показывает, что обратное утверждение в теореме 3 и в теореме 5 в общем случае неверно. □

Пример 5. $n = m = 1$; $A(t) = 2t\cos(t^2)$, $t \in \mathbb{R}$; $B(t) = p(t)$ из примера 1. Данная система не удовлетворяет определению 2, поскольку $B(t)$ не удовлетворяет необходимому условию (16). Данная система не удовлетворяет определению 3, поскольку $A(t)$ не удовлетворяет необходимому условию (11). Однако данная система удовлетворяет определению 4 при $\vartheta = 1$. Действительно, имеем $e^{-2} \leqslant |X(t,s)| \leqslant e^2$ для любых t, s, поэтому при $|h| = 1$ для любого $\tau \in \mathbb{R}$ имеем

$$2e^{-2} = e^{-2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{s}}\,ds \leqslant \int_\tau^{\tau+1} |h^T X(\tau,s)B(s)|\,ds \leqslant e^2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{s}}\,ds = 2e^2,$$

следовательно, выполнены неравенства (39). Неравенства (40) также выполнены при $\beta_3 = 2e^{-2}$, $\beta_4 = 2e^2$. □

Доказательство теоремы 7. Зафиксируем произвольные $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Построим управление

$$u(t) = -B^T(t)X^T(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_0+\vartheta)x_0, \quad t \in [t_0, t_0+\vartheta]. \tag{46}$$

Подставим управление (46) в формулу Коши (6). Тогда получим, что

$$x(t_0+\vartheta) = X(t_0+\vartheta,t_0)(x_0 - W(t_0,t_0+\vartheta)W^{-1}(t_0,t_0+\vartheta)x_0) = 0.$$

Следовательно, равенство (5) выполнено. Поскольку $W^T(t_0,t_0+\vartheta) = W(t_0,t_0+\vartheta) \geqslant \alpha_1 I$, следовательно, $(W^{-1}(t_0,t_0+\vartheta))^T = W^{-1}(t_0,t_0+\vartheta) \leqslant \alpha_1^{-1}I$. Поэтому имеем следующую оценку для нормы управления (46):

$$\|u\|^2_{L_2(\Delta)} = \int_{t_0}^{t_0+\vartheta} u^T(t)u(t)\,dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_0+\vartheta} x_0^T W^{-1}(t_0,t_0+\vartheta)X(t_0,t)B(t)B^T(t)X^T(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_0+\vartheta)x_0\,dt =$$
$$= x_0^T W^{-1}(t_0,t_0+\vartheta)x_0 \leqslant \alpha_1^{-1}|x_0|^2.$$

Таким образом, для $l_2 = \sqrt{\alpha_1^{-1}}$ справедлива требуемая оценка. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 8. Докажем неравенство $\alpha_1 I \leqslant W(\tau,\tau+\vartheta)$ для некоторого $\alpha_1 > 0$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$. Предположим противное. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют $\tau_k \in \mathbb{R}$ и $h_k \in \mathbb{R}^n$, $|h_k| = 1$, такие, что $h_k^T W(\tau_k,\tau_k+\vartheta)h_k^T < \dfrac{1}{k}$. По условию существует $l_2 > 0$ такое, что для всякого вектора x_0^k на отрезке $\Delta_k = [\tau_k,\tau_k+\vartheta]$ найдется управление $u_k \in L_2(\Delta_k,\mathbb{R}^m)$, которое переводит систему (1) из состояния $x(\tau_k) = x_0^k$ в состояние $x(\tau_k+\vartheta) = 0$ и удовлетворяет неравенству $\|u_k\|_{L_2(\Delta_k)} \leqslant l_2|x_0^k|$. Построим такое управление для вектора $x_0^k = -h_k$ при каждом $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, для этого управления выполнены соотношение

$$\int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} X(\tau_k,s)B(s)u_k(s)\,ds = -x_0^k \tag{47}$$

и неравенство $\|u_k\|_{L_2(\Delta_k)} \leqslant l_2$. Умножая равенство (47) слева на строку h_k^T, получим

$$1 = |h_k^T(-x_0^k)| = \left|\int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} h_k^T X(\tau_k,s)B(s)u_k(s)\,ds\right| \leqslant \int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} |h_k^T X(\tau_k,s)B(s)||u_k(s)|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} |h_k^T X(\tau_k,s)B(s)|^2\,ds\right)^{1/2}\left(\int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} |u_k(s)|^2\,ds\right)^{1/2} < \frac{l_2}{\sqrt{k}} \to 0 \ \text{ при } \ k \to \infty.$$

Противоречие. Следовательно, левое неравенство в (12) доказано.

Далее, используя Свойство (d) и условие (16), для $|h|=1$ получаем неравенства (44) и (45). Далее в силу левого неравенства в (12) имеем

$$h^T X(\tau+\vartheta,\tau)W(\tau,\tau+\vartheta)X^T(\tau+\vartheta,\tau)h \geqslant \alpha_1 h^T X(\tau+\vartheta,\tau)X^T(\tau+\vartheta,\tau)h = \\ = \alpha_1|X^T(\tau+\vartheta,\tau)h|^2 \geqslant \alpha_1|h|^2/\gamma^2 =: \alpha_3|h|^2.$$

Теорема доказана. □

Доказательству теоремы 9 предпошлем лемму.

Лемма 8. *Пусть для матрицы Коши $X(t,s)$ системы $\dot{x}=A(t)x$ выполнено Свойство* (d) *для некоторого $\vartheta>0$, и матрица $P(\cdot)$ интегрально ограничена на $\mathbb{R}$. Тогда для матрицы Коши $X_P(t,s)$ системы $\dot{x}=(A(t)+P(t))x$ также выполнено Свойство* (d) *(для того же числа $\vartheta>0$).*

Доказательство. Пусть $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|P\|_{L_1([t,t+1])}\leqslant p$. Рассмотрим матричную функцию $Z(t,\tau)=X_P(t,\tau)-X(t,\tau)$. Имеем $Z(t,\tau)\big|_{t=\tau}=0$,

$$\frac{d}{dt}Z(t,\tau)=(A(t)+P(t))X_P(t,\tau)-A(t)X(t,\tau)=A(t)Z(t,\tau)+P(t)(X(t,\tau)+Z(t,\tau)).$$

По формуле Коши имеем

$$Z(t,\tau)=\int_\tau^t X(t,s)P(s)(X(s,\tau)+Z(s,\tau))\,ds = \\ = \int_\tau^t X(t,s)P(s)X(s,\tau)\,ds+\int_\tau^t X(t,s)P(s)Z(s,\tau)\,ds. \tag{48}$$

Пусть $0\leqslant t-\tau\leqslant\vartheta$. Из равенства (48) имеем

$$|Z(t,\tau)|\leqslant(\vartheta+1)p\gamma^2+\int_\tau^t \gamma|P(s)||Z(s,\tau)|\,ds.$$

В силу неравенства Гронуолла–Беллмана получаем

$$|Z(t,\tau)|\leqslant(\vartheta+1)p\gamma^2\exp\Big(\int_\tau^t\gamma|P(s)|\,ds\Big)\leqslant(\vartheta+1)p\gamma^2e^{\gamma p(\vartheta+1)} =: \gamma_1.$$

Кроме того, из формулы (48) следует равенство

$$Z(\tau,t)=\int_t^\tau X(\tau,s)P(s)(X(s,t)+Z(s,t))\,ds=-\int_\tau^t X(\tau,s)P(s)(X(s,t)+Z(s,t))\,ds,$$

из которого также вытекает оценка $|Z(\tau,t)|\leqslant\gamma_1$. Таким образом, для любых t,τ таких, что $|t-\tau|\leqslant\vartheta$, получаем

$$|X_P(t,\tau)|=|X(t,\tau)+Z(t,\tau)|\leqslant|X(t,\tau)|+|Z(t,\tau)|\leqslant\gamma+\gamma_1=:\gamma_2.$$

Константа γ_2 зависит от ϑ, но не зависит от t и τ. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 9. Пусть система (1) ϑ-равномерно вполне управляема по Калману. Тогда в силу предложения 3 выполнены Свойство (d) и неравенство (16). По теореме 7 выполнено условие $F(\vartheta)$. Возьмем произвольное $t_0\in\mathbb{R}$ и $x_0\in\mathbb{R}^n$ и построим управление $u(t)$, $t\in\Delta=[t_0,t_0+\vartheta]$, которое переводит решение системы из состояния $x(t_0)=$

x_0 в состояние $x(t_0+\vartheta)=0$ и удовлетворяет оценке $\|u\|_{L_2(\Delta)}\leqslant l_2|x_0|$. Тогда имеет место представление (6). Имеем:

$$\sup_{t\in\Delta}|x(t)|\leqslant\sup_{t\in\Delta}\Big(|X(t,t_0)||x_0|+\int_{t_0}^{t}|X(t,s)||B(s)||u(s)|\,ds\Big)\leqslant$$
$$\leqslant\gamma|x_0|+\gamma\int_{t_0}^{t_0+\vartheta}|B(s)||u(s)|\,ds\leqslant\gamma\bigg(|x_0|+\Big(\int_{t_0}^{t_0+\vartheta}|B(s)|^2\,ds\Big)^{1/2}\Big(\int_{t_0}^{t_0+\vartheta}|u(s)|^2\,ds\Big)^{1/2}\bigg)\leqslant$$
$$\leqslant\gamma(|x_0|+\sqrt{b_2}\cdot l_2|x_0|)=\gamma(1+\sqrt{b_2}\cdot l_2)|x_0|=:l_3|x_0|.$$

Пусть $Q\in L_2^{\rm loc}(\mathbb{R},M_{m,n})$ — произвольная функция такая, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|Q\|_{L_2([t,t+1])}\leqslant q. \tag{49}$$

Тогда $\|Q\|_{L_2(\Delta)}\leqslant q\sqrt{\vartheta+1}$. Положим $v(t):=-Q(t)x(t)+u(t),\quad t\in\Delta$. Тогда

$$\|v\|_{L_2(\Delta)}\leqslant\|Q\|_{L_2(\Delta)}\cdot\|x\|_{C(\Delta)}+\|u\|_{L_2(\Delta)}\leqslant q\sqrt{\vartheta+1}\cdot l_3|x_0|+l_2|x_0|=:l_4|x_0|. \tag{50}$$

Имеем

$$\dot x(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)=(A(t)+B(t)Q(t))x(t)+B(t)(-Q(t)x(t)+u(t))=$$
$$=(A(t)+B(t)Q(t))x(t)+B(t)v(t).$$

Следовательно, $x(\cdot)$ — это решение системы (22) при $u=v(\cdot)$, удовлетворяющее условиям $x(t_0)=x_0$, $x(t_0+\vartheta)=0$. Таким образом, в силу неравенства (50) для системы (22) выполнено свойство $F(\vartheta)$. Заметим теперь, что условие (16) выполнено. Тогда из неравенства (49) и условия (16) следует, что матрица $B(\cdot)Q(\cdot)$ интегрально ограничена. Применим лемму 8, получим, что для матрицы Коши системы

$$\dot x=(A(t)+B(t)Q(t))x \tag{51}$$

выполнено Свойство (d). Теперь применим теорему 8 к системе (22). Получаем, что система (22) ϑ-равномерно вполне управляема по Калману. Теорема 9 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 11. Пусть $\|B\|_{C(\mathbb{R})}\leqslant b$, $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|Q\|_{L_1([t,t+1])}\leqslant q$ и система ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения 4. Тогда выполнено неравенство $\|Q\|_{L_1([\tau,\tau+\vartheta])}\leqslant q(\vartheta+1)$ для любого $\tau\in\mathbb{R}$; выполнены неравенства (39), (40); матрица $P(t):=B(t)Q(t)$ интегрально ограничена. В силу предложения 4 для матрицы Коши $X(t,s)$ системы $\dot x=A(t)x$ выполнено Свойство (d). Следовательно, по лемме 8 для матрицы Коши $X_P(t,s)$ системы (51) также выполнено Свойство (d) с некоторой константой $\gamma_2=\gamma_2(\vartheta)$. Рассмотрим функцию $Z(t,s)=X_P(t,s)-X(t,s)$. Из формулы (48) имеем $Z(t,s)=\displaystyle\int_s^t X(t,\zeta)P(\zeta)X_P(\zeta,s)\,d\zeta$. Следовательно,

$$X(\tau,s)=X_P(\tau,s)-Z(\tau,s)=X_P(\tau,s)+\int_\tau^s X(\tau,\zeta)B(\zeta)Q(\zeta)X_P(\zeta,s)\,d\zeta.$$

Пусть заданы любое число $\tau\in\mathbb{R}$ и вектор $h\in\mathbb{R}^n$ такой, что $|h|=1$, и пусть $s\in[\tau,\tau+\vartheta]$. Тогда

$$|h^TX(\tau,s)B(s)|=|h^TX_P(\tau,s)B(s)+\int_\tau^s h^TX(\tau,\zeta)B(\zeta)Q(\zeta)X_P(\zeta,s)\,d\zeta\cdot B(s)|\leqslant$$
$$\leqslant|h^TX_P(\tau,s)B(s)|+\int_\tau^s|h^TX(\tau,\zeta)B(\zeta)|\cdot|Q(\zeta)|\cdot|X_P(\zeta,s)|\,d\zeta\cdot|B(s)|\leqslant \tag{52}$$
$$\leqslant|h^TX_P(\tau,s)B(s)|+\gamma_2 b\int_\tau^s|h^TX(\tau,\zeta)B(\zeta)|\cdot|Q(\zeta)|\,d\zeta.$$

Применим лемму Гронуолла–Беллмана [36, с. 108] к функции $g(s) = |h^T X(\tau,s)B(s)|$, тогда из неравенства (52) получаем неравенство

$$|h^T X(\tau,s)B(s)| \leqslant |h^T X_P(\tau,s)B(s)| \exp\Big(\gamma_2 b\int_\tau^s |Q(\zeta)|\,d\zeta\Big) \leqslant |h^T X_P(\tau,s)B(s)|e^{\gamma_2 b(\vartheta+1)q}.$$

Следовательно,

$$\beta_1 \leqslant \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau,s)B(s)|\,ds \leqslant \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X_P(\tau,s)B(s)|e^{\gamma_2 b(\vartheta+1)q}\,ds.$$

Отсюда получаем, что $\displaystyle\int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X_P(\tau,s)B(s)|\,ds \geqslant \beta_1 e^{-\gamma_2 b(\vartheta+1)q} =: \beta_1' > 0$. Далее,

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X_P(\tau,s)B(s)|\,ds \leqslant \gamma_2 b\vartheta =: \beta_2', \qquad \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X_P(\tau+\vartheta,s)B(s)|\,ds \leqslant \gamma_2 b\vartheta =: \beta_4',$$

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X_P(\tau+\vartheta,s)B(s)|\,ds \geqslant \beta_1'|X_P^T(\tau+\vartheta,\tau)h| \geqslant \beta_1'\gamma_2^{-1} =: \beta_4'.$$

Таким образом, неравенства вида (39), (40) выполнены для системы (22), следовательно, она является ϑ-равномерно вполне управляемой в смысле определения (4). Теорема 11 доказана. □

§ 3. Равномерная полная управляемость дифференциального уравнения

Рассмотрим систему управления, которая описывается линейным дифференциальным уравнением n-го порядка:

$$z^{(n)} + a_1(t)z^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)z = u, \qquad z \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{53}$$

Система (53) эквивалентна управляемой системе (1), где

$$A(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{Vmatrix}, \qquad B(t) = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}. \tag{54}$$

Эквивалентность задается равенствами $z = x_1$, $\dot z = x_2$, ..., $z^{(n-1)} = x_n$. Уравнение (53) называется *(ϑ-равномерно) вполне управляемым*, если система (1), (54) обладает этим свойством. Пусть $a_j(t) \equiv 0$, $j = \overline{1,n}$. Тогда (1), (54) — это стационарная система

$$\dot x = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{55}$$

$$A = J, \qquad B = e_n, \tag{56}$$

где J — первый единичный косой ряд. Стационарная система (55) вполне управляема тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$. Если стационарная система (55) вполне управляема, то она ϑ-равномерно вполне управляема для любого ϑ. Очевидно, что система (55), (56) вполне управляема.

Пусть теперь $a_j(t) \not\equiv 0$. Если коэффициенты $a_j(\cdot)$ кусочно-непрерывные и ограниченные, то равномерная полная управляемость системы (1), (54) вытекает, например, из теоремы 5.2 [8] С. Н. Поповой. Используя результаты §§ 1, 2, можно ослабить условия на коэффициенты. Справедлива следующая теорема.

Теорема 12. *Пусть коэффициенты $a_j(\cdot)$, $j = \overline{1,n}$, матрицы* (54) *интегрально ограничены. Тогда система* (1), (54) *ϑ-равномерно вполне управляема для любого $\vartheta > 0$.*

Доказательство следует из ϑ-равномерной вполне управляемости системы (55), (56) и теоремы 11 с матрицей $Q(t) = [-a_n(t), \ldots, -a_1(t)] \in M_{1,n}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
2. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1960. Vol. 5. № 1. P. 102–119.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
4. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
5. Попова С.Н. Задачи управления показателями Ляпунова: дис. … канд. физ.-матем. наук / УдГУ. Ижевск, 1992. 103 с.
6. Тонков Е.Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.
7. Тонков Е.Л. К теории линейных управляемых систем: дис. … д-ра физ.-матем. наук / Институт математики и механики. Уральский научный центр АН СССР. Свердловск, 1983. 267 с.
8. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларус. навука, 2012. 407 с.
9. Silverman L.M., Meadows H.E. Degrees of controllability in time-variable linear systems // Proceedings of the National Electronics Conference. 1965. Vol. 21. P. 689–693.
10. Silverman L.M. Transformation of time-variable systems to canonical (phase-variable) form // IEEE Transactions on Automatic Control. 1966. Vol. AC-11. № 2. P. 300–303.
11. Silverman L.M., Meadows H.E. Controllability and observability in time-variable linear systems // SIAM Journal on Control. 1967. Vol. 5. № 1. P. 64–73.
12. Гайшун И.В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. М.: Едиториал УРСС, 2004. 408 с.
13. Смирнов Е.Я. Некоторые задачи математической теории управления. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 200 с.
14. Култышев С.Ю., Тонков Е.Л. Управляемость линейной нестационарной системы // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11. № 7. С. 1206–1216.
15. Попова С.Н. К вопросу об управлении показателями Ляпунова // Вестник Удмуртского университета. Математика. 1992. № 1. С. 23–39.
16. Макаров Е.К., Попова С.Н. О локальной управляемости характеристических показателей Ляпунова систем с некратными показателями // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 4. С. 495–499.
17. Макаров Е.К., Попова С.Н. О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 97–106.
18. Макаров Е.К., Попова С.Н. О глобальной управляемости центральных показателей линейных систем // Известия вузов. Математика. 1999. № 2 (441). С. 60–67.
19. Попова С.Н. О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2002. Вып. 2 (25). С. 79–80.
20. Попова С.Н. Об эквивалентности локальной достижимости и полной управляемости линейных систем // Известия вузов. Математика. 2002. № 6 (481). С. 50–53.
21. Попова С.Н. К свойству локальной достижимости линейных управляемых систем // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 1. С. 50–56.
22. Макаров Е.К., Попова С.Н. О достаточных условиях локальной пропорциональной управляемости показателей Ляпунова линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 2. С. 217–226.
23. Попова С.Н. Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 12. С. 1627–1636.
24. Попова С.Н. Глобальная приводимость линейных управляемых систем к системам скалярного типа // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 1. С. 41–46.
25. Попова С.Н. Одновременная локальная управляемость спектра и коэффициента неправильности Ляпунова правильных систем // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 3. С. 425–428.
26. Зайцев В.А., Макаров Е.К., Попова С.Н., Тонков Е.Л. Задачи управления инвариантами А.М. Ляпунова // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2006. Вып. 3 (37). С. 43–48.
27. Зайцев В.А. Равномерная полная управляемость и ляпуновская приводимость двумерного квазидифференциального уравнения // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2007. № 1. С. 55–66.

28. Zaitsev V.A. Lyapunov reducibility and stabilization of nonstationary systems with observer // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2007. Т. 12. Вып. 4. С. 451–452.
29. Попова С.Н. О глобальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 8. С. 1048–1054.
30. Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально-интегрируемыми коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 10. С. 1319–1335.
31. Зайцев В.А. Ляпуновская приводимость и стабилизация нестационарных систем с наблюдателем // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 3. С. 432–442.
32. Зайцев В.А., Тонков Е.Л. Равномерная экспоненциальная стабилизируемость семейства управляемых систем // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 6. С. 902–903.
33. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
34. Зайцев В.А., Попова С.Н., Тонков Е.Л. О свойстве равномерной полной управляемости линейной управляемой системы с дискретным временем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 4. С. 53–63.
35. Зайцев В.А. Управляемость квазидифференциального уравнения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 1. С. 90–100.
36. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

Поступила в редакцию 15.03.2015

Зайцев Василий Александрович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: verba@udm.ru

V. A. Zaitsev

Criteria for uniform complete controllability of a linear system

Keywords: linear control system, uniform complete controllability.

MSC: 93B05, 93C05

The notion of uniform complete controllability of linear system introduced by R. Kalman plays a key role in problems of control of asymptotic properties for linear systems closed by linear feedback control. E. L. Tonkov has found a necessary and sufficient condition of uniform complete controllability for systems with piecewise continuous and bounded coefficients. The Tonkov criterion can be considered as the definition of uniform complete controllability. If the coefficients of the system satisfy weak conditions then the definitions of Kalman and Tonkov are not coincide. We obtain necessary conditions and sufficient conditions for uniform complete controllability in the sense of Kalman and Tonkov for systems with measurable and locally integrable coefficients. We introduce a new definition of uniform complete controllability that extends the definition of Tonkov and coincides with the definition of Kalman providing the matrix $B(\cdot)$ is bounded. We prove some known results on the controllability of linear systems that allow the weakening of the requirements on the coefficients. We prove that if a linear control system $\dot{x}=A(t)x+B(t)u$, $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^m$, with measurable and bounded matrix $B(\cdot)$ is uniformly completely controllable in the sense of Kalman then for any measurable and integrally bounded $m\times n$-matrix function $Q(\cdot)$ the system $\dot{x}=(A(t)+B(t)Q(t))x+B(t)u$ is also uniformly completely controllable in the sense of Kalman.

REFERENCES

1. Filippov A.F. *Differential equations with discontinuous righthand sides*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988.
2. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control, *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, 1960, vol. 5, no. 1, pp. 102–119.
3. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* (Theory of motion control), Moscow: Nauka, 1968, 476 p.

4. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoichivosti* (Theory of Lyapunov exponents and its application to problems of stability), Moscow: Nauka, 1966, 576 p.
5. Popova S.N. Problems of control over Lyapunov exponents, *Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation*, Izhevsk, 1992, 103 p (in Russian).
6. Tonkov E.L. A criterion for uniform controllability and stabilization of a linear recurrent system, *Differ. Uravn.*, 1979, vol. 15, no. 10, pp. 1804–1813 (in Russian).
7. Tonkov E.L. On the theory of linear control systems, *Dr. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation*, Sverdlovsk, 1983, 267 p (in Russian).
8. Makarov E.K., Popova S.N. *Upravlyaemost' asimptoticheskikh invariantov nestatsionarnykh lineinykh sistem* (Controllability of asymptotic invariants of non-stationary linear systems), Minsk: Belarus. Navuka, 2012, 407 p.
9. Silverman L.M., Meadows H.E. Degrees of controllability in time-variable linear systems, *Proceedings of the National Electronics Conference*, 1965, vol. 21, pp. 689–693.
10. Silverman L.M. Transformation of time-variable systems to canonical (phase-variable) form, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1966, vol. AC-11, no. 2, pp. 300–303.
11. Silverman L.M., Meadows H.E. Controllability and observability in time-variable linear systems, *SIAM Journal on Control*, 1967, vol. 5, issue 2, pp. 64–73.
12. Gaishun I.V. *Vvedenie v teoriyu lineinykh nestatsionarnykh sistem* (Introduction to the theory of linear non-stationary systems), Moscow: Editorial URSS, 2004, 408 p.
13. Smirnov E.Ya. *Nekotorye zadachi matematicheskoi teorii upravleniya* (Some problems of mathematical theory of control), Leningrad: Leningrad State University, 1981, 200 p.
14. Kultyshev S.Yu., Tonkov E.L. Controllability of a linear non-stationary system, *Differ. Uravn.*, 1975, vol. 11, no. 7, pp. 1206–1216 (in Russian).
15. Popova S.N. On problem of control over Lyapunov exponents, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat.*, 1992, no. 1, pp. 23–39 (in Russian).
16. Makarov E.K., Popova S.N. Local controllability of Lyapunov characteristic exponents for systems with simple exponents, *Differential Equations*, 1997, vol. 33, no. 4, pp. 496–500.
17. Makarov E.K., Popova S.N. The global controllability of a complete set of Lyapunov invariants for two-dimensional linear systems, *Differential Equations*, 1999, vol. 35, no. 1, pp. 97–107.
18. Makarov E.K., Popova S.N. Global controllability of central exponents of linear systems, *Russian Mathematics*, 1999, vol. 43, no. 2, pp. 56–63.
19. Popova S.N. On global controllability of the complete set of Lyapunov invariants for periodic systems, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2002, no. 2 (25), pp. 79–80 (in Russian).
20. Popova S.N. Equivalence between local attainability and complete controllability of linear systems, *Russian Mathematics*, 2002, vol. 46, no. 6, pp. 48–51.
21. Popova S.N. Local attainability for linear control systems, *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 1, pp. 51–58.
22. Makarov E.K., Popova S.N. Sufficient conditions for the local proportional controllability of Lyapunov exponents of linear systems, *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 2, pp. 234–245.
23. Popova S.N. Global controllability of the complete set of Lyapunov invariants of periodic systems, *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 12, pp. 1713–1723.
24. Popova S.N. Global reducibility of linear control systems to systems of scalar type, *Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 1, pp. 43–49.
25. Popova S.N. Simultaneous local controllability of the spectrum and the Lyapunov irregularity coefficient of regular systems, *Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 3, pp. 461–465.
26. Zaitsev V.A., Makarov E.K., Popova S.N., Tonkov E.L. Problems of control over Lyapunov invariants, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2006, no. 3 (37), pp. 43–48 (in Russian).
27. Zaitsev V.A. Uniform complete controllability and Lyapunov reducibility of a two-dimensional quasi-differential equation, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat.*, 2007, no. 1, pp. 55–66 (in Russian).
28. Zaitsev V.A. Lyapunov reducibility and stabilization of nonstationary systems with observer, *Vestn. Tambov. Univ. Ser. Estestv. Tekh. Nauki*, 2007, vol. 12, no. 4, pp. 451–452.
29. Popova S.N. On the global controllability of Lyapunov exponents of linear systems, *Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 8, pp. 1072–1078.
30. Kozlov A.A. On the control of Lyapunov exponents of two-dimensional linear systems with locally integrable coefficients, *Differential Equations*, 2008, vol. 44, no. 10, pp. 1375–1392.
31. Zaitsev V.A. Lyapunov reducibility and stabilization of nonstationary systems with an observer, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 3, pp. 437–447.
32. Zaitsev V.A., Tonkov E.L. Uniform exponential stabilization of a family of control systems, *Differential*

Equations, 2011, vol. 47, no. 6, pp. 910–911.
33. Horn R., Johnson C. *Matrix analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, 1988. Translated under the title *Matrichnyi analiz*, Moscow: Mir, 1989, 655 p.
34. Zaitsev V.A., Popova S.N., Tonkov E.L. On the property of uniform complete controllability of a discrete-time linear control system, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, no. 4, pp. 53–63 (in Russian).
35. Zaitsev V.A. Quasidifferential equation controllability, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 1, pp. 90–100 (in Russian).
36. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* (Lectures on the mathematical stability theory), Moscow: Nauka, 1967, 472 p.

Received 15.03.2015

Zaitsev Vasilii Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: verba@udm.ru