МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 2

УДК 515.122

© *М. А. Патракеев, Е. А. Резниченко*

ПРИМЕР НЕНОРМАЛЬНОГО СУБМЕТРИЗУЕМОГО ПРОСТРАНСТВА МАЛОЙ МОЩНОСТИ [1]

В 1976 году Альстер и Пшимусинский построили ненормальное вполне регулярное сепарабельное топологическое пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности и имеющее мощность $\aleph_1$. Они также доказали, что в предположении аксиомы Мартина и отрицании континуум-гипотезы нельзя построить подобный пример, который дополнительно кометризуем. Если ослабить условие кометризуемости до субметризуемости, то подобное утверждение доказать нельзя: в данной статье построен пример ненормального вполне регулярного субметризуемого сепарабельного локально счетного топологического пространства, удовлетворяющего первой аксиоме счетности и имеющего мощность $\aleph_1$.

Ключевые слова: субметризуемость, нормальность, кометризуемость.

Напомним, что топологическое пространство $\langle X, \tau\rangle$ называется *субметризуемым*, если на X существует метризуемая топология $\tau_M \subseteq \tau$. Если при этом существует семейство τ_M-замкнутых множеств, τ-внутренности которых образуют базу для $\langle X, \tau\rangle$, то пространство $\langle X, \tau\rangle$ называется *кометризуемым*. Если на $\langle X, \tau_M\rangle$ дополнительно наложить условие сепарабельности, то будем называть пространство $\langle X, \tau\rangle$ *сепарабельно-кометризуемым*.

В 1976 году Альстер и Пшимусинский доказали [1], что в предположении аксиомы Мартина каждое хаусдорфово сепарабельно-кометризуемое пространство, представимое в виде объединения компактных подмножеств в числе меньше, чем континуум, является нормальным (и даже все его конечные степени также нормальны). В той же работе уже без дополнительных теоретико-множественных предположений они привели пример ненормального вполне регулярного сепарабельного пространства с первой аксиомой счетности и имеющего мощность $\aleph_1$.

Таким образом, заменить условие сепарабельной кометризуемости на сепарабельность в сочетании с первой аксиомой счетности в утверждении Альстера и Пшимусинского нельзя. Мы приводим другой пример, показывающий, что условие сепарабельной кометризуемости нельзя заменить даже на субметризуемость в сочетании с сепарабельностью и с первой аксиомой счетности.

Теорема 1. *Существует ненормальное вполне регулярное субметризуемое сепарабельное локально счетное топологическое пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности и имеющее мощность* $\aleph_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество не более чем счетных ординалов ω_1, наделенное порядковой топологией, то есть топологией, база которой состоит из интервалов и лучей с открытыми концами. Пусть L — это множество предельных ординалов из ω_1. Напомним, что через ω обозначается множество конечных ординалов и что $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} \in \omega_1$. В топологическом произведении $\omega_1 \times (\omega + 1)$ рассмотрим подпространство

$$Z := \omega_1 \times (\omega + 1) \ \setminus \ L \times \{\omega\}.$$

Будем считать, что $Z = \{z_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$, где все точки z_α различны. Отметим, что пространство Z нульмерно, с первой аксиомой счетности и локально счетно. Компакт $bZ := (\omega_1 + 1) \times (\omega + 1)$ является нульмерной компактификацией Z веса $\aleph_1$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15–01–05369).

Обозначим через $\mathbb{C}$ канторово множество со стандартной топологией. Канторово множество $\mathbb{C}$ имеет счетный вес, и каждое его открытое подмножество несчетно. Трансфинитной рекурсией длины ω_1 нетрудно построить дизъюнктное семейство $\{C_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ счетных плотных подмножеств в $\mathbb{C}$. Теперь в топологическом произведении $Z \times \mathbb{C}$ рассмотрим подпространство

$$Y := \bigcup_{\alpha\in\omega_1} (\{z_\alpha\} \times C_\alpha).$$

Пространство Y не нормально, так как два его непустых дизъюнктных замкнутых подмножества

$$F := \big((\omega_1 \setminus L) \times \{\omega\} \times \mathbb{C}\big) \cap Y \quad \text{и} \quad G := (L \times \omega \times \mathbb{C}) \cap Y$$

не отделяются открытыми окрестностями. Для доказательства этого факта предположим противное: пусть U и V — два дизъюнктных открытых в Y множества такие, что $F \subseteq U$ и $G \subseteq V$. Выберем счетную базу $\mathcal{B}$ в пространстве $\mathbb{C}$. Так как количество пар $(k, W) \in \omega \times \mathcal{B}$ всего лишь счетно, то нетрудно показать, что существуют непустая окрестность $W \in \mathcal{B}$, ординал $k = \{0, \ldots, k-1\} \in \omega$ и неограниченное в ω_1 множество $A \subseteq \omega_1 \setminus L$ такие, что для каждого $\alpha \in A$ выполняется

$$U \supseteq \Big(\{\alpha\} \times \big((\omega+1) \setminus k\big) \times W\Big) \cap Y =: M_\alpha.$$

Рассмотрим множество $\big(L \times \{k\} \times W\big) \cap Y \subseteq G$. Так как L замкнуто и неограничено в ω_1, то его нельзя представить в виде объединения счетного числа нестационарных в ω_1 подмножеств [2]. Поэтому из счетности базы $\mathcal{B}$ следует, что найдутся непустая окрестность $W' \subseteq W$ из базы $\mathcal{B}$ и стационарное в ω_1 множество $L' \subseteq L$ такие, что каждый ординал $\gamma \in L'$ содержится в некоторой своей окрестности $(\alpha_\gamma, \beta_\gamma) \subseteq \omega_1$, для которой справедливо

$$\big((\alpha_\gamma, \beta_\gamma) \times \{k\} \times W'\big) \cap Y \subseteq V.$$

Так как $\alpha_\gamma < \gamma$ для каждого $\gamma \in L'$, то согласно теореме Фодора [2] существуют стационарное в ω_1 множество $L'' \subseteq L'$ и ординал $\delta \in \omega_1$ такие, что для каждого $\gamma \in L''$ справедливо $\alpha_\gamma = \delta$. Из этого следует, что

$$V \supseteq \big((\omega_1 \setminus \delta) \times \{k\} \times W'\big) \cap Y =: N.$$

Нетрудно показать, что для некоторого $\alpha \in A$ выполняется $M_\alpha \cap N \neq \varnothing$. Это противоречит дизъюнктности окрестностей U и V.

Таким образом, пространство Y не нормально. Так как $Y \subseteq Z \times \mathbb{C}$, то Y вполне регулярно и обладает первой аксиомой счетности. Также нетрудно показать, что Y локально счетно. Пусть π есть проекция $bY := bZ \times \mathbb{C}$ на $\mathbb{C}$. По построению $\pi|_Y$ иньективно и $\pi(Y) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$. Поэтому Y субметризуемо и имеет мощность $\aleph_1$. Теперь мы построим искомое пространство X, которое будет обладать всеми только что перечисленными свойствами пространства Y и при этом окажется сепарабельным.

Компакт bY является компактным расширением Y, и вес bY не превосходит $\aleph_1$. Поэтому [3, глава 11, § 1] существует компактификация $\delta\mathbb{N}$ пространства натуральных чисел $\mathbb{N}$ такая, что ее нарост $\delta\mathbb{N}^* := \delta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ гомеоморфен bY. Для удобства будем считать, что $\delta\mathbb{N}^* = bY$.

Теперь мы можем определить искомое пространство — это подпространство $X := Y \cup \mathbb{N}$ в $\delta\mathbb{N}$. Пространство X вполне регулярно, локально счетно и имеет мощность $\aleph_1$. Сепарабельность X следует из плотности $\mathbb{N}$ в $\delta\mathbb{N}$. Ненормальность X следует из того, что Y не нормально и Y замкнуто в X.

Покажем, что X субметризуемо. Так как $\delta\mathbb{N}$ является нормальным пространством, то согласно теореме Титце–Урысона [4, теорема 2.1.8] π продолжается до непрерывной функции $f\colon \delta\mathbb{N} \to I$, где $I := [0,1]$. Рассмотрим непрерывное отображение $g : \delta\mathbb{N} \to I$ такое, что

$g(n) = 1/n$ при $n \in \mathbb{N}$ и $g(y) = 0$ при $y \in bY$. Пусть $h := f \triangle g$ есть диагональное произведение f и g из $\delta\mathbb{N}$ в $I \times I$. Отображение h непрерывно и $h|_X$ инъективно. Следовательно, X субметризуемо.

Покажем, что X удовлетворяет первой аксиоме счетности. Точки из $\mathbb{N}$ изолированы в X, поэтому нам достаточно найти счетную базу пространства X в произвольной точке $p \in Y$. Точка p имеет счетный характер в bY, и, следовательно, p является точкой типа G_δ в bY. Так как $\delta\mathbb{N} \setminus bY = \mathbb{N}$ счетно, то p будет точкой типа G_δ и в $\delta\mathbb{N}$. Из теоремы 3.3.4 из [4] вытекает, что у p будет счетный характер в $\delta\mathbb{N}$ и, тем более, в X. $\square$

В силу теоремы Биркгофа–Какутани [4, 8.1.G] топологические группы с первой аксиомой счетности метризуемы. Обладающие первой аксиомой счетности ретракты топологических групп не обязательно метризуемы [5], но известные сепарабельные субметризуемые обладающие первой аксиомой счетности ретракты групп кометризуемы.

Вопрос 1. Построить пример нульмерного субметризумого сепарабельного (локально счетного) пространства с первой аксиомой счетности, не являющегося ретрактом группы. Будет ли построенное в этой заметке пространство ретрактом группы?

Вопрос 2. Существует ли наивный пример не нормального субметризумого сепарабельного (локально счетного) пространства с первой аксиомой счетности, которое является ретрактом группы?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alster K., Przymusiński T. Normality and Martin's axiom // Fund. Math. 1976. Vol. 91. P. 123–131.
2. Барвайс Дж. (ред.) Справочная книга по математической логике. Часть II. Теория множеств. М.: Наука, 1982. 376 с.
3. Kunen K., Vaughan J.E. (ed.) Handbook of set-theoretic topology. Amsterdam: North-Holland, 1984. 1273 p.
4. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
5. Gartside P.M., Reznichenko E.A., Sipacheva O.V. Mal'tsev and retral spaces // Topology Appl. 1997. Vol. 80. № 1–2. P. 115–129.

Поступила в редакцию 19.05.2015

Патракеев Михаил Александрович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел алгебры и топологии, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
доцент, кафедра математического анализа и теории функций, Институт математики и компьютерных наук, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: patrakeev@mail.ru

Резниченко Евгений Александрович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра общей топологии и геометрии, механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы.
E-mail: erezn@inbox.ru

M. A. Patrakeev, E. A. Reznichenko

Example of nonnormal submetrizable space of small cardinality

Keywords: submetrizable space, nonnormal space, cometrizable space.

MSC: 54G20, 54D15

In 1976 K. Alster and T. Przymusiński constructed an example of nonnormal completely regular separable and first-countable topological space of cardinality $\aleph_1$. Also they proved a theorem which implies that under Martin's Axiom with negation of continuum hypothesis there is no similar example, which is additionally

МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 2

cometrizable. If we weaken the cometrizability condition to submetrizability, then the similar statement can not be proved: here we construct an example of nonnormal completely regular submetrizable separable first-countable locally countable space of cardinality $\aleph_1$.

REFERENCES

1. Alster K., Przymusiński T. Normality and Martin's axiom, *Fund. Math.*, 1976, vol. 91, pp. 123–131.
2. Barwise J. (Ed.) *Handbook of mathematical logic*, Amsterdam: Elsevier, 1977, 1165 p.
3. Kunen K., Vaughan J.E. (Ed.) *Handbook of set-theoretic topology*, Amsterdam: North-Holland, 1984, 1273 p.
4. Engelking R. *General topology*, Sigma series in pure mathematics, vol. 6, Berlin: Heldermann–Verlag, 1989, 529 p.
5. Gartside P.M., Reznichenko E.A., Sipacheva O.V. Mal'tsev and retral spaces, *Topology Appl.*, 1997, vol. 80, no. 1–2, pp. 115–129.

Received 19.05.2015

Patrakeev Mikhail Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Algebra and Topology, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Associate Professor, Institute of Mathematics and Computer Sciences, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: patrakeev@mail.ru

Reznichenko Evgenii Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of General Topology and Geometry, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: erezn@inbox.ru