ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 2

УДК 517.925.44

© *К. М. Дулина*

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РЕГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА–ФАУЛЕРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В работе рассматривается дифференциальное уравнение типа Эмдена–Фаулера второго порядка с отрицательными потенциалом $y''-p(x,\,y,\,y')|y|^k\,\mathrm{sgn}\;y=0$ в случае регулярной нелинейности $k>1$. Предполагается, что функция $p(x,\,u,\,v)$ положительна, непрерывна по x и удовлетворяет условию Липшица по последним двум аргументам. Исследуется асимптотическое поведение максимально продолженных решений рассматриваемого уравнения. Изучается случай неограниченной сверху и отделенной от нуля снизу функции $p(x,\,u,\,v)$. Получены условия существования вертикальной асимптоты у всех нетривиальных максимально продолженных решений уравнения. Кроме того, получены достаточные условия, при которых все нетривиальные максимально продолженные решения уравнения обладают свойством $\lim\limits_{x\to a}|y'(x)|=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a}|y(x)|<+\infty$, где a — граничная точка области определения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка, регулярная нелинейность, асимптотическое поведение.

DOI: 10.20537/vm160206

Введение

Рассмотрим дифференциальное уравнение типа Эмдена–Фаулера

$$y^{(n)}-p(x,\,y,\,y',\,\ldots,y^{(n-1)})\,|y|^k\,\mathrm{sgn}\,y=0.$$

И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурией в монографии [1] изучено поведение решений и получена асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка для $p=p(x)$. В. А. Кондратьевым и В. А. Никишкиным в работе [2] для положительных решений уравнения второго порядка в случае регулярной нелинейности $k>1$ и достаточно гладкой функции $p=p(x)$ получено несколько членов асимптотики. И. В. Асташовой в работах [3–5] для $n=3$, $p=p(x)$ и $n=4$, $p\equiv p_0$ соответственно получена асимптотическая классификация решений рассматриваемого уравнения в случае регулярной $(k>1)$ и сингулярной $(0<k<1)$ нелинейности. В работах [6, 7] приведена асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка для ограниченной функции $p(x,\,u,\,v)$ в случае $k\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

В работе [1] получены условия существования таких решений, что $\lim\limits_{x\to a}|y'(x)|=+\infty$, $a\in\mathbb{R}$. Оставался открытым вопрос, будет ли при этом решение также стремиться к бесконечности или может стремиться к конечному пределу при $x\to a$, то есть вопрос разграничения двух случаев:

$$\lim_{x\to a}|y'(x)|=+\infty,\quad \lim_{x\to a}|y(x)|=+\infty,\tag{1}$$

$$\lim_{x\to a}|y'(x)|=+\infty,\quad \lim_{x\to a}|y(x)|<+\infty.\tag{2}$$

В данной работе рассматривается уравнение

$$y''-p(x,\,y,\,y')\,|y|^k\,\mathrm{sgn}\,y=0,\quad k>1,\tag{3}$$

где функция $p(x,\,u,\,v)$ положительна, непрерывна по x и удовлетворяет условию Липшица по последним двум аргументам.

С использованием методов, изложенных в работах [8, 9], получены условия на функцию $p(x,\, u,\, v)$, при которых все нетривиальные максимально продолженные решения уравнения (3) обладают свойством (1), то есть имеют вертикальную асимптоту. Также получены достаточные условия на функцию $p(x,\, u,\, v)$, при которых все рассматриваемые решения обладают свойством (2).

§ 1. Вспомогательные результаты

Прежде чем получить основные результаты работы, установим справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *Пусть функция $p(x,\, u,\, v)$ непрерывна по x, удовлетворяет условию Липшица по u, v и существует константа $m > 0$ такая, что $p(x,\, u,\, v) \geqslant m$. Пусть $y(x)$ — нетривиальное максимально продолженное решение уравнения (3), удовлетворяющее в некоторой точке x_0 условию $y(x_0)\, y'(x_0) > 0$ (соответственно, $y(x_0)\, y'(x_0) < 0$). Тогда существует значение $x^* \in (x_0,\, +\infty)$ (соответственно, $x_* \in (-\infty,\, x_0)$), для которого*

$$\lim_{x\to x^*-0} |y'(x)| = +\infty \quad \left(\textit{соответственно, } \lim_{x\to x_*+0} |y'(x)| = +\infty\right).$$

Если $y(x_0)y'(x_0) = 0$, то существуют конечные значения x_* и x^*, $x_0 \in (x_*,\, x^*)$, для которых

$$\lim_{x\to x^*-0} |y'(x)| = \lim_{x\to x_*+0} |y'(x)| = +\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При заменах $x \mapsto -x$, $y(x) \mapsto -y(x)$ мы получаем уравнение того же типа, что и (3), поэтому достаточно исследовать поведение максимально продолженных положительных решений уравнения вблизи правой границы области определения. Пусть $y(x)$ — ненулевое максимально продолженное вправо решение уравнения (3), определенное на $[x_0,\, \widetilde{x})$, где $\widetilde{x} \leq +\infty$, с начальными условиями $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) > 0$. В работе [10] было показано, что $y'(x) \to +\infty$ при $x \to \widetilde{x}$, и на интервале $(x_0,\, \widetilde{x})$ у решения $y(x)$ уравнения (3) нет нулей и точек экстремума.

Без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$. Рассмотрим отрезок $[0,\, x_1']$, на котором производная увеличилась в два раза, то есть $y'(x_1') = 2y'(0)$. Такой отрезок существует в силу неограниченного возрастания $y'(x)$. Для всех $x \in [0, x_1']$ справедливо двойное неравенство

$$y'(0) \leqslant y'(x) \leqslant 2y'(0).$$

Левая и правая части неравенства $y'(x) \geqslant y'(0)$ положительны. Проинтегрируем его на интервале $(0,\, x)$, получим

$$y(x) \geqslant y(x) - y(0) \geqslant y'(0)\, x$$

и, в силу (3),

$$y''(x) \geqslant m(y'(0))^k\, x^k.$$

Проинтегрируем последнее неравенство на интервале $(0,\, x_1')$, получим

$$y'(0) = y'(x_1') - y'(0) \geqslant \frac{m(y'(0))^k}{k+1}(x_1')^{k+1}.$$

Тогда

$$(x_1')^{k+1} \leqslant \frac{k+1}{m}(y'(0))^{1-k},$$

или

$$x_1' \leqslant \left(\frac{k+1}{m}\right)^{\frac{1}{k+1}} (y'(0))^{\frac{1-k}{1+k}}.$$

Таким образом, существует положительная константа C, зависящая только от m и k, такая, что в точке x_1' выполнено неравенство

$$x_1' \leqslant \big(C\ y'(0)\big)^{-\frac{k-1}{k+1}}.$$

Далее построим последовательность $\{x_i'\}$, $i = 0, 1, \ldots$, выберем $x_0' = 0$, $y'(x_i') = 2y'(x_{i-1}')$. Тогда

$$x_{i+1}' - x_i' \leqslant (y'(x_i'))^{-\frac{k-1}{k+1}} \leqslant 2^{-i\frac{k-1}{k+1}}(Cy'(0))^{-\frac{k-1}{k+1}},$$

а значит,

$$\sum_{i=0}^{\infty}(x_{i+1}' - x_i') \leqslant (Cy'(0))^{-\frac{k-1}{k+1}} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i\frac{k-1}{k+1}} < \infty.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{x_i'\}$ имеет конечный предел $x^* = \lim\limits_{i\to\infty} x_i'$ и по построению $y'(x) \to +\infty$ при $x \to x^* - 0$.

Лемма доказана. □

§ 2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть существуют такие значения $u_0 > 0$, $v_0 > 0$, что при $u > u_0$, $v > v_0$ функция $p = p(x,\, u,\, v)$ представима в виде $p = h(u)\, g(v)$, где функции $h(u)$, $g(v)$ непрерывны и ограничены снизу положительными константами. Тогда для любого максимально продолженного решения $y(x)$ уравнения* (3)*, удовлетворяющего условию $\lim\limits_{x\to x^*-0} y'(x) = +\infty$, прямая $x = x^*$ является вертикальной асимптотой тогда и только тогда, когда*

$$\int_{v_0}^{+\infty} \frac{v}{g(v)}\, dv = +\infty. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $y(x)$ — максимально продолженное вправо решение уравнения (3) с начальными условиями $y(x_0) = y_0 \geqslant u_0 > 0$ и $y'(x_0) = y_1 \geqslant v_0 > 0$. Тогда уравнение (3) принимает вид

$$y'' = h(y)\, g(y')\, y^k.$$

Разделим переменные и проинтегрируем полученное выражение на интервале $(x_0,\, x)$, $x < x^*$:

$$\frac{y'y''}{g(y')} = h(y)\, y^k\, y',$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(x)y''(x)}{g(y')}\, dx = \int_{x_0}^{x} h(y)\, y^k(x)\, y'(x)\, dx,$$

$$\int_{y_1}^{y'(x)} \frac{y'}{g(y')}\, dy' = \int_{y_0}^{y(x)} h(y)\, y^k\, dy.$$

При $x \to x^* - 0$, в силу леммы 1, имеем $y'(x) \to +\infty$, поэтому

$$\int_{y_1}^{+\infty} \frac{v}{g(v)}\, dv = \int_{y_0}^{\lim\limits_{x\to x^*-0} y(x)} h(y)\, y^k\, dy.$$

Покажем достаточность. Пусть интеграл в левой части последнего равенства расходится, тогда

$$\int_{y_0}^{\lim\limits_{x\to x^*-0} y(x)} h(y)\, y^k\, dy = +\infty.$$

Предположим, что $\lim\limits_{x\to x^*-0} y(x) < +\infty$. Тогда в силу непрерывности функции $h(y)$ подынтегральное выражение ограничено сверху и, следовательно, интеграл по конечному промежутку от ограниченной функции сходится, получаем противоречие. Таким образом, $y(x) \to +\infty$ при $x \to x^* - 0$, то есть прямая $x = x^*$ является вертикальной асимптотой.

Покажем необходимость. Если интеграл в левой части (4) сходится, то

$$\int_{y_0}^{\lim\limits_{x\to x^*-0} y(x)} h(y)\, y^k\, dy < +\infty.$$

По условию, существует константа $m > 0$ такая, что $h(y) \geqslant m$, и тогда

$$\int_{y_0}^{\lim\limits_{x\to x^*-0} y(x)} h(y)\, y^k\, dy \geqslant m \int_{y_0}^{\lim\limits_{x\to x^*-0} y(x)} y^k\, dy = \frac{m}{k+1}\left(\lim_{x\to x^*-0} y^{k+1}(x) - y_0^{k+1}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{m}{k+1}\left(\lim_{x\to x^*-0} y^{k+1}(x) - y_0^{k+1}\right) < +\infty$$

и, следовательно, $\lim\limits_{x\to x^*-0} y(x) < +\infty$.

Теорема доказана. $\square$

Теорема 2. *Пусть существуют такие значения $u_0 > 0$, $v_0 > 0$, что при $u > u_0$, $v > v_0$ функция $p(x,\, u,\, v)$ удовлетворяет условиям леммы 1 и справедливо неравенство $p(x,\, u,\, v) \leqslant f(x,\, u)\, g(v)$, где функция $f(x,\, u)$ непрерывна в совокупности, а функция $g(v)$ непрерывна и ограничена снизу положительной константой, причем $\displaystyle\int_{v_0}^{+\infty} \frac{dv}{g(v)} = +\infty$. Тогда для любого максимально продолженного решения $y(x)$ уравнения (3), удовлетворяющего условию $\lim\limits_{x\to x^*-0} y'(x) = +\infty$, прямая $x = x^*$ является вертикальной асимптотой.*

Доказательство. Пусть $y(x)$ — максимально продолженное вправо решение уравнения (3) с начальными условиями $y(x_0) = y_0 \geqslant u_0 > 0$ и $y'(x_0) = y_1 \geqslant v_0 > 0$. Тогда, в силу уравнения (3), имеем

$$y'' \leqslant f(x,\, y)\, g(y')\, y^k.$$

Аналогично доказательству теоремы 1 получим

$$\int_{y_1}^{+\infty} \frac{dv}{g(v)} \leqslant \int_{x_0}^{x^*} f\big(x,\, y(x)\big)\, y^k(x)\, dx.$$

По условию теоремы, интеграл в левой части неравенства расходится, следовательно,

$$\int_{x_0}^{x^*} f\big(x,\, y(x)\big)\, y^k(x)\, dx = +\infty.$$

Предположим, что $\lim\limits_{x\to x^*-0} y(x) < +\infty$. Тогда в силу непрерывности функции $f(x,\, u)$ подынтегральное выражение ограничено сверху и, следовательно, интеграл по конечному промежутку от ограниченной функции сходится, получаем противоречие. Таким образом, $y(x) \to +\infty$ при $x \to x^* - 0$, то есть прямая $x = x^*$ является вертикальной асимптотой.

Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. *Пусть функция $p = p(x,\, u)$ удовлетворяет условиям леммы 1. Тогда для любого максимально продолженного решения $y(x)$ уравнения (3), удовлетворяющего условию $\lim\limits_{x\to x^*-0} y'(x) = +\infty$, прямая $x = x^*$ является вертикальной асимптотой.*

Доказательство. Действительно, достаточно положить $f(x,\, u) = p(x,\, u)$, $g(v) \equiv 1$. Тогда $\displaystyle\int_{v_0}^{+\infty} \frac{dv}{g(v)} = \int_{v_0}^{+\infty} dv = +\infty$ и функция $p(x,\, u)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, таким образом, мы получаем требуемое. $\square$

Следствие 2. *Пусть существуют такие значения $u_0 > 0$, $v_0 > 0$, $C_1 > 0$, что при $u > u_0$, $v > v_0$ функция $p(x, u, v)$ удовлетворяет условиям леммы 1 и справедливо неравенство $p(x, u, v) \leqslant C_1\, g(v)$, где функция $g(v)$ непрерывна, причем $\displaystyle\int_{v_0}^{+\infty} \frac{dv}{g(v)} = +\infty$. Тогда для любого максимально продолженного решения $y(x)$ уравнения (3), удовлетворяющего условию $\lim\limits_{x\to x^*-0} y'(x) = +\infty$, прямая $x = x^*$ является вертикальной асимптотой.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2. □

Теорема 3. *Пусть существуют такие значения $u_0 > 0$, $v_0 > 0$, $C_2 > 0$, что при $u > u_0$, $v > v_0$ функция $p(x, u, v)$ удовлетворяет условиям леммы 1 и справедливо неравенство $p(x, u, v) \geqslant C_2\, g(v)$, где функция $g(v)$ непрерывна и ограничена снизу положительной константой, причем $\displaystyle\int_{v_0}^{+\infty} \frac{v\, dv}{g(v)} < +\infty$. Тогда для любого максимально продолженного решения $y(x)$ уравнения (3) с начальными условиями $y(x_0) \geqslant u_0$ и $y'(x_0) \geqslant v_0$, удовлетворяющего условию $\lim\limits_{x\to x^*-0} y'(x) = +\infty$, справедливо*

$$0 < \lim_{x\to x^*-0} y(x) < +\infty \qquad \text{и} \qquad x^* - x_0 < \frac{1}{C_2 y^k(x_0)} \int_{y'(x_0)}^{+\infty} \frac{dv}{g(v)}.$$

Доказательство. Пусть $y(x)$ — максимально продолженное вправо решение уравнения (3) с начальными условиями $y(x_0) = y_0 \geqslant u_0 > 0$ и $y'(x_0) = y_1 \geqslant v_0 > 0$. Тогда в силу вида уравнения (3) имеем

$$y'' \geqslant C_2\, g(y') y^k.$$

Аналогично доказательству теоремы 2 получим

$$\int_{y_1}^{+\infty} \frac{v\, dv}{g(v)} \geqslant C_2 \int_{x_0}^{x^*} y^k(x)\, dy(x) = \frac{C_2}{k+1} \left(\lim_{x\to x^*-0} y^{k+1}(x) - y_0^{k+1} \right).$$

По условию теоремы, интеграл в левой части неравенства сходится, следовательно,

$$\frac{C_2}{k+1} \left(\lim_{x\to x^*-0} y^{k+1}(x) - y_0^{k+1} \right) < +\infty$$

и $\lim\limits_{x\to x^*-0} y(x) < +\infty$.

Заметим, что

$$\int_{y_1}^{+\infty} \frac{dv}{g(v)} \geqslant C_2 \int_{x_0}^{x^*} y^k(x)\, dx \geqslant C_2 y_0^k\, (x^* - x_0).$$

Так как интеграл в левой части неравенства сходится, то можно оценить расстояние до x^*:

$$x^* - x_0 < \frac{1}{C_2 y_0^k} \int_{y_1}^{+\infty} \frac{dv}{g(v)},$$

где $y_0 = y(x_0)$, $y_1 = y'(x_0)$. Теорема доказана. □

§ 3. Примеры

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y'' - |\ln|y||(y')^2|y|^3 \operatorname{sgn} y = 0.$$

Заметим, что показатель нелинейности $k = 3$ и функция $p = p(u, v) = |\ln|u||\, v^2$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Действительно, пусть $u_0 > 1$, $v_0 > 0$, тогда функции $h(u) = |\ln|u||$

и $g(v)=v^2$ непрерывны и ограничены снизу положительными константами при $u>u_0$, $v>v_0$ соответственно, причем

$$\int_{v_0}^{+\infty}\frac{v}{g(v)}\,dv=\int_{v_0}^{+\infty}\frac{v}{v^2}\,dv=\int_{v_0}^{+\infty}\frac{1}{v}\,dv=+\infty.$$

Таким образом, любое максимально продолженное решение рассматриваемого уравнения с начальными условиями $y(x_0)>1$, $y'(x_0)>0$ имеет вертикальную асимптоту справа.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y''-\frac{(2+\sin(xy))(y')^4}{|\ln|y'||}|y|^3\operatorname{sgn}y=0.$$

Заметим, что показатель нелинейности $k=3$ и функция $p(x,\,u,\,v)=\frac{(2+\sin(xu))\,v^4}{|\ln|v||}$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Действительно, пусть $u_0>0$, $v_0>1$, тогда справедливо $p(x,\,u,\,v)\geqslant g(v)$, где функция $g(v)=\frac{v^4}{|\ln|v||}$ непрерывна и ограничена снизу положительной константой при $v>v_0$, причем

$$\int_{v_0}^{+\infty}\frac{v\,dv}{g(v)}=\int_{v_0}^{+\infty}\frac{|\ln|v||dv}{v^3}<\int_{v_0}^{+\infty}\frac{dv}{v^2}<+\infty.$$

Таким образом, для любого максимально продолженного решения рассматриваемого уравнения с начальными условиями $y(x_0)>0$, $y'(x_0)>1$ справедливо

$$\lim_{x\to x^*-0}y'(x)=+\infty,\qquad\lim_{x\to x^*-0}y(x)<+\infty,$$

где $x^*>x_0$ — граничная точка области определения.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$y''-p\left(x,\,y,\,y'\right)\left(1+|y'|\right)^{2+\varepsilon}|y|^k\operatorname{sgn}y=0,\ k>1,\ \varepsilon>0,$$

где функция $p(x,\,u,\,v)$ непрерывна по x, липшицева по u,v и удовлетворяет неравенству $p(x,\,u,\,v)\geqslant m>0$.

Заметим, что условия теоремы 3 выполнены. Действительно, $p(x,\,u,\,v)\geqslant m\,g(v)$, где функция $g(v)=(1+|v|)^{2+\varepsilon}$ непрерывна и ограничена снизу положительной константой, причем

$$\int_{v_0}^{+\infty}\frac{v\,dv}{g(v)}=\int_{v_0}^{+\infty}\frac{dv}{(1+|v|)^{2+\varepsilon}}<+\infty.$$

Таким образом, для любого максимально продолженного решения рассматриваемого уравнения с положительными начальными условиями справедливо

$$\lim_{x\to x^*-0}y'(x)=+\infty,\qquad\lim_{x\to x^*-0}y(x)<+\infty,$$

где x^* — граничная точка области определения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990. 432 с.
2. Кондратьев В.А., Никишкин В.А. О положительных решениях уравнения $y''=p(x)y^k$ // Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений и теории управления движением. Саранск, 1980. С. 131–141.
3. Astashova I. On asymptotic behavior of solutions to a quasilinear second order differential equation // Functional Differential Equations. 2009. Vol. 16. № 1. P. 93–115.

4. Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. М.: Юнити-Дана, 2012. С. 22–288.
5. Асташова И.В. Об асимптотической классификации решений нелинейных уравнений третьего и четвертого порядков со степенной нелинейностью // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2015. Вып. 2. С. 3–25.
6. Дулина К.М., Корчемкина Т.А. Асимптотическая классификация решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с отрицательным потенциалом // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2015. Вып. 6 (128). С. 50–56.
7. Дулина К.М., Корчемкина Т.А. Классификация решений сингулярных нелинейных уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка // Информационные технологии и нанотехнологии: Сборник трудов международной конференции и молодежной школы. Самарский научный центр РАН. Самара, 2015. С. 45–46.
8. Astashova I. Application of dynamical systems to the study of asymptotic properties of solutions to nonlinear higher-order differential equations // Journal of Mathematical Sciences. 2005. Vol. 126. № 5. P. 1361–1391.
9. Асташова И.В. Равномерные оценки положительных решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия РАН. Серия математическая. 2008. Т. 72. № 6. С. 85–104.
10. Дулина К.М., Корчемкина Т.А. О существовании решений с заданной областью определения уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка // Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения: Сборник трудов конференции. М.: МЭСИ, 2014. С. 19–27.

Поступила в редакцию 14.05.2016

Дулина Ксения Михайловна, аспирант, механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Россия, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1.
E-mail: sun-ksi@mail.ru

K. M. Dulina

On asymptotic behaviour of solutions with infinite derivative for regular second-order Emden–Fowler type differential equations with negative potential

Keywords: second-order Emden–Fowler type differential equations, regular nonlinearity, asymptotic behaviour.

MSC: 34C11, 34E10

In this paper we consider the second-order Emden–Fowler type differential equation with negative potential $y'' - p(x,\, y,\, y')|y|^k \operatorname{sgn} y = 0$ in case of regular nonlinearity $k > 1$. We assume that the function $p(x,\, u,\, v)$ is continuous in x and Lipschitz continuous in two last variables. We investigate asymptotic behaviour of non-extensible solutions to the equation above. We consider the case of a positive function $p(x,\, u,\, v)$ unbounded from above and bounded away from 0 from below. The conditions guaranteeing an existence of a vertical asymptote of all nontrivial non-extensible solutions to the equation are obtained. Also the sufficient conditions providing the following solutions' properties $\lim\limits_{x\to a} |y'(x)| = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} |y(x)| < +\infty$, where $a < \infty$ is a boundary point, are obtained.

REFERENCES

1. Kiguradze I.T., Chanturiya T.A. *Asimptoticheskie svoistva reshenii neavtonomnykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* (Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations), Moscow: Nauka, 1990, 432 p.
2. Kondrat'ev V.A., Nikishkin V.A. On the positive solutions of the equation $y'' = p(x)y^k$, *Nekotorye voprosy kachestvennoi teorii differentsial'nykh uravnenii i teorii upravleniya dvizheniem* (Some problems of the qualitative theory of differential equations and the theory of motion control), Saransk, 1980, pp. 131–141 (in Russian).

3. Astashova I. On asymptotic behavior of solutions to a quasilinear second order differential equation, *Functional Differential Equations*, 2009, vol. 16, no. 1, pp. 93–115.
4. Astashova I.V. Qualitative properties of solutions to quasilinear ordinary differential equations, *Kachestvennye svoistva reshenii differentsial'nykh uravnenii i smezhnye voprosy spektral'nogo analiza* (Qualitative properties of solutions to differential equations and related topics of spectral analysis), Moscow: Unity-Dana, 2012, pp. 22–288 (in Russian).
5. Astashova I.V. On asymptotic classification of solutions to nonlinear third- and fourth- order differential equations with power nonlinearity, *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. Im. N. Eh. Baumana, Ser. Estestv. Nauki*, 2015, no. 2, pp. 3–25 (in Russian).
6. Dulina K.M., Korchemkina T.A. Asymptotic classification of solutions to second-order Emden–Fowler type differential equations with negative potential, *Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauchn. Ser.*, 2015, no. 6 (128), pp. 50–56 (in Russian).
7. Dulina K.M., Korchemkina T.A. Classification of solutions to singular nonlinear second-order Emden–Fowler type equations, *Proceedings of the International Conference and School for Young Scientists "Information Technology and Nanotechnology"*, Samara Research Centre of RAS, Samara, 2015, pp. 45–46 (in Russian).
8. Astashova I. Application of dynamical systems to the study of asymptotic properties of solutions to nonlinear higher-order differential equations, *Journal of Mathematical Sciences*, 2005, vol. 126, no. 5, pp. 1361–1391.
9. Astashova I.V. Uniform estimates of positive solutions to quasilinear differential equations, *Izvestiya: Mathematics*, 2008, vol. 72, no. 6, pp. 1141–1160.
10. Dulina K.M., Korchemkina T.A. On existence of solutions to second-order Emden–Fowler type differential equations with prescribed domain, *Proceedings of the International Conference "Qualitative theory of differential equations and applications"*, Moscow State University of Economics, Statistics, and Informatics, 2014, pp. 19–27 (in Russian).

Received 14.05.2016

Dulina Kseniya Mikhailovna, Post-Graduate Student, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, GSP-1, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: sun-ksi@mail.ru