ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 2

УДК 519.6

© *А. Г. Ченцов*

МЕТОД ПРОГРАММНЫХ ИТЕРАЦИЙ В ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ НАВЕДЕНИЯ [1]

Рассматривается решение дифференциальной игры сближения–уклонения с использованием метода программных итераций. Основная цель состоит в построении множества позиционного поглощения, соответствующего разбиению пространства позиций игры, отвечающему фундаментальной теореме об альтернативе Н. Н. Красовского, А. И. Субботина. Для построения используется оператор программного поглощения, определяемый целевым множеством в задаче о сближении. Множество, формирующее фазовые ограничения, поэтапно преобразуется упомянутым оператором, реализуя последовательность, предел которой совпадает с множеством позиционного поглощения. Предполагается, что целевое множество замкнуто, а множество, определяющее фазовые ограничения исходной задачи, имеет замкнутые сечения, каждое из которых соответствует фиксации момента времени. Установлены свойства, имеющие смысл односторонней непрерывности множества позиционного поглощения при изменении множеств, определяющих исходную дифференциальную игру. Показано, что предел итерационной процедуры совпадает с множеством успешной разрешимости в классе многозначных обобщенных квазистратегий.

Ключевые слова: дифференциальная игра, метод программных итераций, множество позиционного поглощения.

DOI: 10.20537/vm160213

Введение

В статье рассматривается дифференциальная игра (ДИ) сближения–уклонения (см. [1, 2]). Предполагаются заданными целевое множество и множество, определяющее фазовые ограничения (ФО), которые должны соблюдаться на траекториях конфликтно-управляемой системы вплоть до встречи с целевым множеством; в этом состоит цель игрока I. Цель игрока II противоположна: он заинтересован в осуществлении уклонения. В работах Н. Н. Красовского и А. И. Субботина (см. [1, 2]) была установлена фундаментальная теорема об альтернативе в нелинейной ДИ общего вида. Из этой теоремы следует, что множество, определяющее ФО, допускает разбиение в сумму двух подмножеств (п/м), являющихся множествами успешной разрешимости задачи наведения игрока I и задачи уклонения игрока II. Упомянутое положение [1, 2] во многом определило все последующее развитие теории ДИ; в частности, было установлено [2] существование (для типичных вариантов критерия задачи управления) седловой точки в классах позиционных стратегий (процедур управления по принципу обратной связи). При этом предполагалось, что динамическая система удовлетворяет традиционным условиям, среди которых сейчас отметим локальную липшицевость по фазовой переменной; А. В. Кряжимскому принадлежит важное обобщение: альтернатива Н. Н. Красовского, А. И. Субботина была распространена [3] на класс конфликтно-управляемых систем, удовлетворяющих условию обобщенной единственности.

Построение множества успешной разрешимости задачи игрока I (задача сближения или наведения) является важным еще и потому, что данное множество, именуемое множеством позиционного поглощения (МПП), позволяет построить стратегию, разрешающую упомянутую задачу, конструктивно на основе принципа экстремального сдвига (см. [1, 2]) либо процедуру управления с поводырем (моделью); см. [2]. В настоящей работе для построения МПП используется один из известных методов, а именно метод программных итераций (МПИ), см. [4–8]. Рассматривается реализация МПИ при более общих условиях в сравнении с [5]. При данных

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Постановления № 211 Правительства РФ, контракт № 02.A03.21.0006 и РФФИ (проекты 16–01–00649, 16–01–00505).

условиях исследуется связь процедуры на основе МПИ и решения ДИ в классе квазистратегий (см. также [9]). Наконец, изучаются некоторые свойства, связанные с близостью МПП при изменении параметров ДИ, а именно: целевого множества и ФО. Отдельные положения статьи анонсированы в [10].

§ 1. Некоторые общие обозначения

Ниже используются кванторы, связки; как обычно, $\varnothing$ — пустое множество. Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Произвольному объекту y сопоставляется синглетон $\{y\}$, содержащий $y:\ y \in \{y\}$. Множеству S сопоставляем семейство $\mathcal{P}(S)$ всех подмножеств (п/м) S; $\mathcal{P}'(S) \triangleq \mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\}$ (здесь и ниже $\triangleq$ — равенство по определению). Для непустого семейства $\mathcal{X}$ и множества Y в виде $\mathcal{X}|_Y \triangleq \{X \cap Y : X \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(Y)\big)$ имеем след $\mathcal{X}$ на Y. Если A и B — непустые множества, то через B^A обозначаем непустое множество всех отображений из A в B (значения отображений $h \in B^A$ обозначаем традиционно: $h(a) \in B$, где $a \in A$). При $g \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}'(A)$ в виде $(g|C) \triangleq \big(g(x)\big)_{x \in C} \in B^C$ имеем сужение g на множество C.

Через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую, $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\}$, $\mathbb{N}_o \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N}$; полагаем $\overline{1,k} \triangleq \{s \in \mathbb{N} \mid s \leqslant k\}$ при $k \in \mathbb{N}$ и $\overrightarrow{m,\infty} \triangleq \{s \in \mathbb{N}_o \mid m \leqslant s\}$ при $m \in \mathbb{N}_o$. Полагаем, что элементы $\mathbb{N}_o$ не являются множествами, и для всяких множества S и $k \in \mathbb{N}$ используем более традиционное обозначение S^k вместо $S^{\overline{1,k}}$, получая множество всех кортежей в S «длины» k. Последовательности в S — суть элементы $S^{\mathbb{N}}$ и только они (в качестве S может использоваться семейство). Если Ξ — множество, $(\Sigma_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\Xi)^{\mathbb{N}}$ и $\Sigma \in \mathcal{P}(\Xi)$, то, как обычно,

$$((\Sigma_k)_{k \in \mathbb{N}} \downarrow \Sigma) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \left(\left(\Sigma = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Sigma_k\right) \ \&\ (\Sigma_{j+1} \subset \Sigma_j \quad \forall\, j \in \mathbb{N})\right).$$

Множеству E и семейству $\mathcal{E} \in \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(E)\big)$ сопоставляем σ-алгебру $\sigma_E^o(\mathcal{E})$ п/м E, порожденную семейством $\mathcal{E}$; $\big(E, \sigma_E^o(\mathcal{E})\big)$ есть стандартное измеримое пространство (ИП). Если X — множество, $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(X)\big)$ и $Y \in \sigma_X^o(\mathcal{X})$, то $\sigma_Y^o(\mathcal{X}|_Y) = \sigma_X^o(\mathcal{X})|_Y = \{L \in \sigma_X^o(\mathcal{X}) \mid L \subset Y\}$. Каждой σ-алгебре $\mathcal{S}$ п/м множества S сопоставляем (непустое) множество $(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{S}]$ всех вещественнозначных (в/з) неотрицательных счетно-аддитивных мер на $\mathcal{S}$; если $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{S}]$, то $(S, \mathcal{S}, \mu)$ — пространство с мерой. Если (X, τ), $X \neq \varnothing$, есть топологическое пространство (ТП), то через $(\tau - \mathrm{comp})[X]$ обозначаем семейство всех непустых компактных в (X, τ) п/м X. При $k \in \mathbb{N}$ оснащаем $\mathbb{R}^k$ обычной топологией $\tau_{\mathbb{R}}^{(k)}$ покоординатной сходимости.

§ 2. Обсуждение задачи

Всюду в дальнейшем фиксируем промежуток $T \triangleq [t_o, \vartheta_o]$, где $t_o \in \mathbb{R}$ и $\vartheta_o \in]t_o, \infty[$; на данном промежутке и на промежутках вида $[t, \vartheta_o]$, $t \in T$, рассматривается функционирование конфликтно-управляемой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, \quad v \in Q, \tag{2.1}$$

в n-мерном фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}$. Полагаем, что $P \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(p)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^p]$ и $Q \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(q)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^q]$, где $p \in \mathbb{N}$ и $q \in \mathbb{N}$; пусть $f:\ T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ есть непрерывная по совокупности переменных вектор-функция. Полагаем, что в (2.1) u есть управляющий параметр игрока I, а v — управляющий параметр игрока II. В качестве обычных программных управлений игроков I и II используем борелевские функции со значениями в P и Q соответственно и определенные на том или ином промежутке $[t, \vartheta_o]$, где $t \in T$. Обобщенные программные управления определяем в виде борелевских мер, соответствующих произведениям $[t, \vartheta_o] \times P \times Q$ и $[t, \vartheta_o] \times Q$, где $t \in T$. Управление по принципу обратной связи реализуется в классе позиционных стратегий соответствующего типа (подробнее см. в [2]). Фиксируя множества $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, получаем [1, 2] ДИ сближения–уклонения с целевым множеством M при ФО, определяемых сечениями N; в [1,2] предполагалось, что множества M и N замкнуты в обычной топологии покоординатной сходимости. Осуществление сближения является целью игрока I; игрок II имеет противоположную цель (уклонение): он либо стремится исключить встречу с M, либо допускает такую встречу только после нарушения ФО. Согласно теореме об альтернативе Н. Н. Красовского, А. И. Субботина (при естественных условиях на f) N допускает разбиение в сумму двух дизъюнктных множеств успешной разрешимости задач сближения и уклонения, первое из которых, связанное с задачей игрока I, именуется МПП. В терминах МПП может быть определена экстремальная стратегия игрока I, разрешающая задачу сближения.

В настоящей работе (см. краткий вариант в [11]) рассматривается один из подходов к построению МПП. Речь идет о МПИ, на основе которого реализуется последовательность в семействе п/м N, предел которой совпадает с МПП. Мы рассматриваем некоторые виды зависимости МПП от M и N, также привлекая аппарат МПИ.

Ниже существенно применение расширений пространств обычных управлений. В этой связи введем нужные типы стратегических мер, для чего сначала условимся о некоторых обозначениях: если $t \in T$, то непустые компакты $[t, \vartheta_o]$, $Z_t \triangleq [t, \vartheta_o] \times Q$ и $\Omega_t \triangleq [t, \vartheta_o] \times P \times Q$ оснащаем σ-алгебрами их борелевских п/м; упомянутые (борелевские) σ-алгебры обозначаем через $\mathcal{T}_t, \mathcal{D}_t$ и $\mathcal{C}_t$ соответственно. При этом

$$(\Gamma \times P \times Q \in \mathcal{C}_t \ \ \forall\, \Gamma \in \mathcal{T}_t)\, \&\, \Big(D \underline{\times} P \triangleq \{(t,u,v) \in \Omega_t |\, (t,v) \in D\} \in \mathcal{C}_t \ \ \forall\, D \in \mathcal{D}_t\Big).$$

Кроме того, при $t \in T$ и $\theta \in [t, \vartheta_o]$ имеем $(\mathcal{T}_\theta \subset \mathcal{T}_t)\,\&\,(\mathcal{D}_\theta \subset \mathcal{D}_t)\,\&\,(\mathcal{C}_\theta \subset \mathcal{C}_t)$; наконец, $\mathcal{D}_t^{(\theta)} \triangleq \mathcal{D}_t|_{[t,\theta[\times Q} = \{D \in \mathcal{D}_t |\, D \subset [t, \theta[\times Q\}$ и $\mathcal{C}_t^{(\theta)} \triangleq \mathcal{C}_t|_{[t,\theta[\times P \times Q} = \{C \in \mathcal{C}_t |\, C \subset [t, \theta[\times P \times Q\}$. Через λ обозначаем сужение меры Лебега на $\mathcal{T}_{t_o}$. Полагаем при $t \in T$, что

$$\mathcal{H}_t \triangleq \{\eta \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{C}_t] \big|\, \eta(\Gamma \times P \times Q) = \lambda(\Gamma) \ \ \forall\, \Gamma \in \mathcal{T}_t\},$$

$$\mathcal{E}_t \triangleq \{\nu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{D}_t] \big|\, \nu(\Gamma \times Q) = \lambda(\Gamma) \ \ \forall\, \Gamma \in \mathcal{T}_t\};$$

меры из $\mathcal{E}_t$ являются аналогами борелевских функций $v(\cdot) \in Q^{[t,\vartheta_o]}$, а меры из $\mathcal{H}_t$ — аналоги пар $\big(u(\cdot), v(\cdot)\big)$, где $u(\cdot) \in P^{[t,\vartheta_o]}$ и $v(\cdot) \in Q^{[t,\vartheta_o]}$ суть борелевские функции. Если к тому же $\nu \in \mathcal{E}_t$, то меры из $\Pi_t(\nu) \triangleq \{\eta \in \mathcal{H}_t |\, \eta(D \underline{\times} P) = \nu(D) \ \ \forall\, D \in \mathcal{D}_t\}$ являются аналогами пар $\big(u(\cdot), v(\cdot)\big)$ обычных борелевских программных управлений, где $v(\cdot)$ фиксировано: $v(\cdot) = \bar{v}(\cdot)$. Если $t \in T$ и $\theta \in [t, \vartheta_o]$, то $\mathcal{H}_\theta = \{(\eta |\, \mathcal{C}_\theta) : \ \eta \in \mathcal{H}_t\}$ и $\mathcal{E}_\theta = \{(\nu |\, \mathcal{D}_\theta) : \ \nu \in \mathcal{E}_t\}$. При $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$

$$\begin{gathered}\Phi(t_*, x_*, \eta) \triangleq \Big\{x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_o]) \big|\, x(t) = \\ = x_* + \int\limits_{[t_*, t[\times P \times Q} f\big(\xi, x(\xi), u, v\big)\, \eta\big(d(\xi, u, v)\big) \ \ \forall\, t \in [t_*, \vartheta_o]\Big\}\end{gathered} \tag{2.2}$$

есть (обобщенная) интегральная воронка, отвечающая триплету (t_*, x_*, η). Постулируем одноэлементность (2.2) для каждого такого триплета: всюду в дальнейшем при $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$ имеет место $\Phi(t_*, x_*, \eta) = \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)\}$, где $\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) = \big(\varphi(t, t_*, x_*, \eta)\big)_{t \in [t_*, \vartheta_o]} \in C_n([t_*, \vartheta_o])$. Данное условие (обобщенной единственности) соответствует [3]. Полагая, что $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, постулируем в дальнейшем следующее условие равномерной ограниченности. А именно, $\forall\, a \in [0, \infty[\ \exists\, b \in [0, \infty[$:

$$\varphi(\xi, t, x, \eta) \in \mathbb{B}_n(b) \ \ \forall\, t \in T \ \ \forall\, x \in \mathbb{B}_n(a) \ \ \forall\, \eta \in \mathcal{H}_t \ \ \forall\, \xi \in [t, \vartheta_o] \tag{2.3}$$

где $\mathbb{B}_n(c) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \big|\, \|x\| \leqslant c\} \ \ \forall\, c \in [0, \infty[$. Упомянутые условия согласуются с [3].

Подчеркнем, что при $t \in T$ множества $\mathcal{H}_t$ и $\mathcal{E}_t$ $*$-слабо компактны; кроме того, при $\nu \in \mathcal{E}_t$ множество $\Pi_t(\nu)$ также $*$-слабо компактно. Зависимость

$$(x,\eta) \longmapsto \varphi(\cdot,t,x,\eta) : \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_t \longrightarrow C_n([t,\vartheta_o]) \tag{2.4}$$

непрерывна; при этом $C_n([t,\vartheta_o])$ оснащается нормой равномерной сходимости.

§ 3. Оператор программного поглощения

Рассматриваем произведение $T \times \mathbb{R}^n$ в качестве пространства позиций. Через $\mathcal{T}$ обозначаем обычную топологию покоординатной сходимости в $T \times \mathbb{R}^n$, получая, в частности, метризуемое ТП

$$(T \times \mathbb{R}^n, \mathcal{T}); \tag{3.1}$$

через $\mathcal{F}$ обозначаем семейство всех п/м $T \times \mathbb{R}^n$, замкнутых в ТП (3.1), то есть семейство всех п/м $T \times \mathbb{R}^n$, замкнутых в обычном «покоординатном» смысле. Разумеется, $\mathcal{T}$ порождается метрикой ρ следующего вида:

$$\big((t_1,x_1),(t_2,x_2)\big) \longmapsto \sup\big(\{|t_1-t_2|; \|x_1-x_2\|\}\big) \colon (T \times \mathbb{R}^n) \times (T \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow [0,\infty[. \tag{3.2}$$

Полагая $\tau_\partial \overset{\triangle}{=} \mathcal{P}(T)$, получаем в виде (T,τ_∂) дискретное [12, 1.1.7] ТП, после чего оснащаем $T \times \mathbb{R}^n$ естественной топологией $\tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ произведения ТП (T,τ_∂) и $(\mathbb{R}^n,\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$. Получаем метризуемое ТП

$$\Big(T \times \mathbb{R}^n, \tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\Big) \tag{3.3}$$

(τ_∂ порождается дискретной метрикой [12, 4.1.4], а $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ — обычной евклидовой метрикой). Семейство $\mathfrak{F}$ всех п/м $T \times \mathbb{R}^n$, замкнутых в ТП (3.3), допускает простое описание в терминах сечений: полагая, что $\mathbf{F}$ есть семейство всех п/м $\mathbb{R}^n$, замкнутых в $(\mathbb{R}^n,\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$, и $H\langle t\rangle \overset{\triangle}{=} \{x \in \mathbb{R}^n |\, (t,x) \in H\}$ $\forall\, H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ $\forall\, t \in T$, получаем очевидное равенство

$$\mathfrak{F} = \{F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) |\, F\langle t\rangle \in \mathbf{F} \ \ \forall\, t \in T\}.$$

Ясно, что $\mathcal{T} \subset \tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ и $\mathcal{F} \subset \mathfrak{F}$. В основных конструкциях в качестве целевого (множества) будем, как правило, использовать множество из $\mathcal{F}$, а в качестве множества, определяющего ФО, — множество из $\mathfrak{F}$. Однако в приводимом ниже определении будем допускать применение произвольных п/м $T \times \mathbb{R}^n$.

Если $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то определяем оператор программного поглощения (ОПП) $A[M] : \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, связанный с целевым множеством M, посредством следующего правила:

$$\begin{gathered} A[M](S) \overset{\triangle}{=} \Big\{(t,x) \in S |\, \forall\, \nu \in \mathcal{E}_t \ \exists\, \eta \in \Pi_t(\nu) \ \exists\, \vartheta \in [t,\vartheta_o] : \\ \Big(\big(\vartheta,\varphi(\vartheta,t,x,\eta)\big) \in M\Big) \ \& \ \Big(\big(\xi,\varphi(\xi,t,x,\eta)\big) \in S \ \ \forall\, \xi \in [t,\vartheta[\Big)\Big\} \ \ \forall\, S \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n); \end{gathered} \tag{3.4}$$

ясно, что $M \cap H \subset A[M](H)$ при $H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$. Кроме того, $\forall\, M_1 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ $\forall\, S_1 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ $\forall\, M_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ $\forall\, S_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$\big((M_1 \subset M_2) \ \& \ (S_1 \subset S_2)\big) \Longrightarrow \big(A[M_1](S_1) \subset A[M_2](S_2)\big). \tag{3.5}$$

Отметим, наконец, что (см. (3.4)) при $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $S \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$\big((M = \varnothing) \vee (S = \varnothing)\big) \Longrightarrow \big(A[M](S) = \varnothing\big). \tag{3.6}$$

Предложение 3.1. *Если $M \in \mathcal{F}$, то семейство $\mathfrak{F}$ есть инвариантное подпространство $A[M]$: $A[M](F) \in \mathfrak{F}$ $\forall\, F \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство использует свойство непрерывности отображения (2.4) и $*$-слабую компактность множеств $\Pi_t(\nu)$ при $t \in T$ и $\nu \in \mathcal{E}_t$.

Предложение 3.2. *Если* $(M_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $(F_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$, $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ *и при этом*

$$\big((M_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow M\big) \ \& \ \big((F_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow F\big),$$

то $M \in \mathcal{F}$, $F \in \mathfrak{F}$ *и* $\big(A[M_i](F_i)\big)_{i\in\mathbb{N}}\downarrow A[M](F)$.

При доказательстве, наряду со свойствами непрерывности отображения (2.4) и $*$-слабой компактности $\Pi_t(\nu)$, где $t \in T$ и $\nu \in \mathcal{E}_t$, используется (3.5).

§ 4. Итерационная процедура

Напомним следующее достаточно традиционное соглашение: если H — непустое множество и $\mathbf{h} \in H^H$, то $(\mathbf{h}^k)_{k\in\mathbb{N}_o} : \ \mathbb{N}_o \longrightarrow H^H$ определяется условиями

$$\Big(\mathbf{h}^o(x) \stackrel{\triangle}{=} x \ \ \forall\, x \in H\Big) \ \& \ \Big(\mathbf{h}^{k+1} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{h} \circ \mathbf{h}^k \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}_o\Big).$$

Данное соглашение будем применять к ОПП: при $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ определены операторы $A[M]^k$, $k \in \mathbb{N}_o$, действующие каждый в $\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$. С учетом этого полагаем при $M \in \mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$, $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $k \in \mathbb{N}_o$, что $W_k(M,N) \stackrel{\triangle}{=} A[M]^k(N)$; получаем тогда

$$(W_o(M,N) = N) \ \& \ \big(W_{r+1}(M,N) = A[M]\big(W_r(M,N)\big) \ \ \forall\, r \in \mathbb{N}_o\big). \tag{4.1}$$

Разумеется, $W_k(M,N) \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}_o$. Наряду с (4.1) введем в рассмотрение при $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ предельное множество

$$W(M,N) \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{k\in\mathbb{N}_o} W_k(M,N) \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n); \tag{4.2}$$

при этом, конечно, $\big(W_k(M,N)\big)_{k\in\mathbb{N}}\downarrow W(M,N)$. Из (3.5) легко следует, что при $M_1 \in \mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$, $M_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $N_1 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$\big((M_1 \subset M_2) \ \& \ (N_1 \subset N_2)\big) \Longrightarrow \big(W(M_1,N_1) \subset W(M_2,N_2)\big). \tag{4.3}$$

Легко видеть также (см. (3.6), (4.1), (4.2)), что $\forall\, M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)\ \forall\, N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)\ \big((M = \varnothing) \vee (N = \varnothing)\big) \Longrightarrow \big(W(M,N) = \varnothing\big)$.

Предложение 4.1. *Если* $M \in \mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n), N \in \mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ *и* $H \in \mathcal{P}(N)$, *то истинна импликация* $\big(H = A[M](H)\big) \Longrightarrow \big(H \subset W(M,N)\big)$.

Доказательство. Фиксируем M, N и H в соответствии с условиями предложения. Пусть истинна посылка доказываемой импликации. При этом (см. (4.1)) $H \subset W_o(M,N)$. Пусть вообще $m \in \mathbb{N}_o$ таково, что $H \subset W_m(M,N)$. С учетом (3.5) получаем, что $H = A[M](H) \subset A[M]\big(W_m(M,N)\big) = W_{m+1}(M,N)$. Итак, $\big(H \subset W_m(M,N)\big) \Longrightarrow \big(H \subset W_{m+1}(M,N)\big)$. Поскольку выбор $m \in \mathbb{N}_o$ был произвольным, по индукции установлено, что $H \subset W_k(M,N)\ \forall\, k \in \mathbb{N}_o$. С учетом (4.2) получаем, что $H \subset W(M,N)$, чем и завершается доказательство. □

Из предложения 3.1 рассуждением по индукции получаем, что

$$W_k(M,N) \in \mathfrak{F} \ \ \forall\, M \in \mathcal{F} \ \ \forall\, N \in \mathfrak{F}. \tag{4.4}$$

В свою очередь, из (4.2) и (4.4) следует по свойствам замкнутых множеств, что

$$W(M,N) \in \mathfrak{F} \ \ \forall\, M \in \mathcal{F} \ \ \forall\, N \in \mathfrak{F}. \tag{4.5}$$

Предложение 4.2. *Если* $M \in \mathcal{F}$ *и* $N \in \mathfrak{F}$, *то* $W(M,N) = A[M]\big(W(M,N)\big)$.

Доказательство получается комбинацией предложения 3.2, (4.1) и (4.2); используем монотонную сходимость $\big(W_k(M,N)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ к $W(M,N)$.

С учетом предложений 4.1 и 4.2 получаем, что справедлива

Теорема 4.1. *Если* $M \in \mathcal{F}$ *и* $N \in \mathfrak{F}$, *то* $W(M,N)$ *есть наибольший по включению элемент каждого из следующих двух семейств:*

$$\{H \in \mathcal{P}(N) \,|\, H = A[M](H)\} \qquad \text{и} \qquad \{F \in \mathfrak{F} \,|\, (F \subset N)\,\&\,(F = A[M](F))\}$$

На основе предложения 3.2 и (4.1) рассуждением по индукции устанавливается, что $\forall\,(M_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}\ \forall\,(N_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}\ \forall\, M \in \mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)\ \forall\, N \in \mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$

$$\Big(\big((M_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow M\big)\,\&\,\big((N_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow N\big)\Big) \Longrightarrow \Big(\big(W_k(M_i,N_i)\big)_{i\in\mathbb{N}}\!\downarrow W_k(M,N) \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}_o\Big). \tag{4.6}$$

В свою очередь, из (4.2) и (4.6) вытекает следующая

Теорема 4.2. *Если* $(M_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $(N_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$, $M \in \mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$, $N \in \mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ *и* $\big((M_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow M\big)\,\&\,\big((N_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow N\big)$, *то* $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathfrak{F}$ *и*

$$\big(W(M_i,N_i)\big)_{i\in\mathbb{N}}\!\downarrow W(M,N).$$

Из теоремы 4.2 следует, в частности, что отображение

$$(M,N) \longmapsto W(M,N) :\ \mathcal{F}\times\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F} \tag{4.7}$$

обладает своеобразной секвенциальной непрерывностью сверху (относительно монотонной сходимости множеств). В то же время, как показывает пример [11, раздел 6], естественной непрерывностью (даже секвенциальной) зависимость (4.7) не обладает; это касается и тех случаев, когда при описании сходимости множеств удается «задействовать» метрику Хаусдорфа.

§ 5. Одно пространство, инвариантное относительно оператора программного поглощения

В настоящем параграфе фиксируем $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}\setminus\{\varnothing\}$. Метрика $(\rho\,|\,N\times N)$, являющаяся сужением на N метрики ρ (3.2), порождает топологию $\mathcal{T}|_N = \{N\cap G :\ G \in \mathcal{T}\}$, реализующую в виде $(N,\mathcal{T}|_N)$ подпространство ТП (3.1). Заметим также, что $\mathcal{F}|_N = \{N\cap F : F \in \mathcal{F}\}$ есть семейство всех замкнутых в ТП $(N,\mathcal{T}|_N)$ п/м N.

Предложение 5.1. *Семейство* $\mathcal{F}|_N$ *является инвариантным подпространством оператора* $A[M] :\ A[M](F) \in \mathcal{F}|_N \ \ \forall\, F \in \mathcal{F}|_N$.

Доказательство данного предложения (см. также [11, предложение 4]), использующее непрерывность оператора (2.4) и $*$-слабую компактность множеств $\Pi_t(\nu)$, $t \in T$, $\nu \in \mathcal{E}_t$, опустим по соображениям объема. В качестве очевидного следствия отметим (см. (4.1)), что $W_k(M,N) \in \mathcal{F}|_N\ \forall\, k \in \mathbb{N}_o$. В свою очередь, это означает (см. (4.2)), что справедлива следующая

Теорема 5.1. *Множество* $W(M,N)$ *замкнуто в ТП* $(N,\mathcal{T}|_N) :\ W(M,N) \in \mathcal{F}|_N$.

Таким образом, МПП $W(M,N)$ незамкнуто в ТП (3.1) «ровно настолько», насколько незамкнуто (в упомянутом ТП (3.1)) множество N, определяющее ФО рассматриваемой задачи управления.

Замечание 5.1. Пусть до конца настоящего параграфа $N \in \mathcal{F}\setminus\{\varnothing\}$. Итак, рассмотрим случай, когда непустое множество N замкнуто в ТП (3.1). Тогда $\mathcal{F}|_N \subset \mathcal{F}$. Поэтому, в частности, имеем, что $W_k(M,N) \in \mathcal{F}\ \forall\, k \in \mathbb{N}_o$. Из теоремы 5.1 следует, что $W(M,N) \in \mathcal{F}$, что согласуется с положениями [1,2], связанными с альтернативой Н. Н. Красовского, А. И. Субботина.

§ 6. Некоторые свойства близости фрагментов множеств позиционного поглощения, 1

В настоящем параграфе мы рассмотрим соотношения фрагментов МПП, отвечающих различным значениям параметров, являющихся п/м $T \times \mathbb{R}^n$. При этом учитывается (4.3). Речь пойдет об односторонних оценках близости. Условимся о некоторых обозначениях, связанных с метрическим пространством $(T \times \mathbb{R}^n, \rho)$ (см. (3.2)).

Если $H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$ и $z \in T \times \mathbb{R}^n$, то через $\rho(z; H)$ обозначаем обычное расстояние от точки z до множества H: $\rho(z;H) \stackrel{\triangle}{=} \inf\bigl(\{\rho(z,h) : h \in H\}\bigr) \in [0,\infty[$. В качестве H может использоваться множество из $\mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$, что достаточно для всех наших целей;

$$S_o(F,\varepsilon) \stackrel{\triangle}{=} \{z \in T \times \mathbb{R}^n \,|\, \rho(z;F) \leqslant \varepsilon\} \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\} \quad \forall\, F \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\} \quad \forall\, \varepsilon \in [0,\infty[.$$

Кроме того, при $F \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$ полагаем, что $\mathcal{K}[F] \stackrel{\triangle}{=} \{K \in (\mathcal{T} - \mathrm{comp})[T \times \mathbb{R}^n] \,|\, K \cap F \neq \varnothing\}$. Отметим, что при $F \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$ и $K \in \mathcal{K}[F]$ непременно $K \cap F \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$. С учетом замечания 5.1 имеем для $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathcal{F}$ со свойством $W(M,N) \neq \varnothing$, что $W(M,N) \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$ и $K \cap W(M,N) \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$ $\forall\, K \in \mathcal{K}[W(M,N)]$. Поэтому при $\varepsilon \in [0,\infty[$ определено множество $S_o\bigl(K \cap W(M,N), \varepsilon\bigr) \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$.

Фиксируем до конца настоящего параграфа множества $M \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$ и $N \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$, для которых $W(M,N) \neq \varnothing$. Тогда, как уже отмечалось, $W(M,N) \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$ и $\mathcal{K}[W(M,N)] \neq \varnothing$. Справедливо следующее

Предложение 6.1. *Если* $\mathbf{K} \in \mathcal{K}[W(M,N)]$ *и* $\varepsilon \in]0,\infty[$, *то*

$$\begin{gathered}\exists\, \delta \in]0,\infty[\quad \forall\, \widetilde{M} \in \mathcal{F} \quad \forall\, \widetilde{N} \in \mathcal{F} \quad \Bigl(\Bigl(\widetilde{M} \subset S_o(M,\delta)\Bigr) \;\&\; \Bigl(\widetilde{N} \subset S_o(N,\delta)\Bigr)\Bigr) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \Bigl(\mathbf{K} \cap W(\widetilde{M},\widetilde{N}) \subset S_o\left(\mathbf{K} \cap W(M,N),\varepsilon\right)\Bigr).\end{gathered} \tag{6.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathbf{K}$ и ε в соответствии с условиями. Покажем, что истинно (6.1). Допустим противное. Тогда, как легко видеть,

$$\left(\mathbf{K} \cap W\left(S_o\left(M,\frac{1}{k}\right), S_o\left(N,\frac{1}{k}\right)\right)\right) \setminus S_o\left(\mathbf{K} \cap W(M,N),\varepsilon\right) \neq \varnothing \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Используя аксиому выбора, получаем, что для некоторой последовательности

$$k \longmapsto (t^{(k)}, x^{(k)}) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbf{K} \tag{6.2}$$

имеет место свойство

$$(t^{(j)}, x^{(j)}) \in W\left(S_o\left(M,\frac{1}{j}\right), S_o\left(N,\frac{1}{j}\right)\right) \setminus S_o\left(\mathbf{K} \cap W(M,N),\varepsilon\right) \quad \forall\, j \in \mathbb{N}. \tag{6.3}$$

С учетом компактности $\mathbf{K}$ полагаем, не ограничивая общности, последовательность (6.2) сходящейся:

$$\Bigl(\rho\bigl((t^{(j)}, x^{(j)}), (t_*, x_*)\bigr)\Bigr)_{j \in \mathbb{N}} \longrightarrow 0, \tag{6.4}$$

где $(t_*, x_*) \in \mathbf{K}$. Тогда (см. (6.3)) имеем с очевидностью, что

$$(t_*, x_*) \in W\left(S_o\left(M,\frac{1}{k}\right), S_o\left(N,\frac{1}{k}\right)\right) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{6.5}$$

Учтем, что $\bigl(S_o(M,\frac{1}{k})\bigr)_{k \in \mathbb{N}} \downarrow M$ и $\bigl(S_o(N,\frac{1}{k})\bigr)_{k \in \mathbb{N}} \downarrow N$. Тогда, в силу (6.5) и теоремы 4.2,

$$(t_*, x_*) \in \mathbf{K} \cap W(M,N). \tag{6.6}$$

Вместе с тем (см. (6.3)) $\varepsilon < \rho\bigl((t^{(j)}, x^{(j)}); \mathbf{K} \cap W(M,N)\bigr)$ $\forall\, j \in \mathbb{N}$. Тогда из (6.4) извлекается неравенство $\varepsilon \leqslant \rho\bigl((t_*, x_*); \mathbf{K} \cap W(M,N)\bigr)$, а потому (6.6) невозможно. Противоречие показывает, что на самом деле имеет место (6.1). $\square$

Из (4.3) и предложения 6.1 вытекает

Теорема 6.1. *Если* $\mathbf{K} \in \mathcal{K}[W(M,N)]$ *и* $\varepsilon \in]0,\infty[$, *то*

$$\exists\,\delta \in]0,\infty[\ \ \forall\,\widetilde{M} \in \mathcal{F}\ \ \forall\,\widetilde{N} \in \mathcal{F}\ \ \Bigl(\Bigl(M \subset \widetilde{M} \subset S_o(M,\delta)\Bigr)\ \&\ \Bigl(N \subset \widetilde{N} \subset S_o(N,\delta)\Bigr)\Bigr) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Bigl(\mathbf{K} \cap W(M,N) \subset \mathbf{K} \cap W(\widetilde{M},\widetilde{N}) \subset S_o\left(\mathbf{K} \cap W(M,N),\varepsilon\right)\Bigr).$$

Последняя теорема характеризует поведение зависимости

$$(\widetilde{M},\widetilde{N}) \longmapsto W(\widetilde{M},\widetilde{N}) :\ \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$

в «точке» (M,N) с оговоренными выше свойствами; мы получили некоторый аналог непрерывности сверху. Способ «усечения» МПП, принятый в предложении 6.1 и теореме 6.1, является достаточно естественным в связи с (2.3): представляется логичным оценивать свои возможности для начальных позиций из компакта.

§ 7. Некоторые свойства близости фрагментов множеств позиционного поглощения, 2

В настоящем параграфе вернемся к зависимости (4.7); будем рассматривать аналоги положений параграфа 6 применительно к фрагментам сечений МПП. В этой связи условимся, что при $H \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и $x \in \mathbb{R}^n$ $\quad (\|\cdot\| - \inf)[x;H] \stackrel{\triangle}{=} \inf(\{\|x-h\| :\ h \in H\})$. При этом, конечно, в виде $x \longmapsto (\|\cdot\| - \inf)[x;H] :\ \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty[$ имеем непрерывную в/з функцию на $\mathbb{R}^n$. Легко видеть, что при $L \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon \in]0,\infty[$

$$B^o_n(L,\varepsilon) \stackrel{\triangle}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\|\cdot\| - \inf)[x;L] \leqslant \varepsilon\} \in \mathbf{F} \setminus \{\varnothing\} \tag{7.1}$$

есть замкнутая ε-окрестность L. Полагая при $\Lambda \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$\mathrm{Supp}(\Lambda) \stackrel{\triangle}{=} \{t \in T \mid \Lambda\langle t\rangle \neq \varnothing\}, \tag{7.2}$$

имеем, что при $t \in \mathrm{Supp}(\Lambda)$ и $\varepsilon \in]0,\infty[$ определено $B^o_n(\Lambda\langle t\rangle,\varepsilon) \in \mathbf{F} \setminus \{\varnothing\}$, где $\Lambda\langle t\rangle \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$. Полагаем теперь при $H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon \in]0,\infty[$, что

$$\mathbb{S}(H,\varepsilon) \stackrel{\triangle}{=} \{(t,x) \in \mathrm{Supp}(H) \times \mathbb{R}^n \mid x \in B^o_n(H\langle t\rangle,\varepsilon)\},$$

получая замкнутую окрестность H в ТП (3.3). Легко видеть, что $\mathbb{S}(H,\varepsilon) \in \mathfrak{F}\ \forall\,H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ $\forall\,\varepsilon \in]0,\infty[$. Пусть, наконец,

$$\mathfrak{K}[F] \stackrel{\triangle}{=} \{K \in (\tau^{(n)}_{\mathbb{R}} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^n] \mid K \cap F \neq \varnothing\}\ \ \forall\,F \in \mathbf{F} \setminus \{\varnothing\}. \tag{7.3}$$

Фиксируем $M \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$ и $N \in \mathfrak{F}$ до конца настоящего параграфа, получая $W(M,N) \in \mathfrak{F}$. При этом $W(M,N)\langle t\rangle \in \mathbf{F} \setminus \{\varnothing\}\ \ \forall\,t \in \mathrm{Supp}\bigl(W(M,N)\bigr)$. Отметим также простые следствия: если $t \in \mathrm{Supp}\bigl(W(M,N)\bigr)$, то $\mathfrak{K}[W(M,N)\langle t\rangle] \in \mathcal{P}'\bigl((\tau^{(n)}_{\mathbb{R}} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^n]\bigr)$ и

$$K \cap W(M,N)\langle t\rangle \in \mathbf{F} \setminus \{\varnothing\}\ \ \forall\,K \in \mathfrak{K}[W(M,N)\langle t\rangle].$$

Предложение 7.1. *Пусть* $t_* \in \mathrm{Supp}\bigl(W(M,N)\bigr), \mathbb{K} \in \mathfrak{K}[W(M,N)\langle t_*\rangle]$ *и* $\varepsilon \in]0,\infty[$. *Тогда*

$$\exists\,\delta \in]0,\infty[\ \ \forall\,\widetilde{M} \in \mathcal{F}\ \ \forall\,\widetilde{N} \in \mathfrak{F}\ \ \Bigl(\bigl(\widetilde{M} \subset S_o(M,\delta)\bigr)\,\&\,\bigl(\widetilde{N} \subset \mathbb{S}(N,\delta)\bigr)\Bigr) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Bigl(\mathbb{K} \cap W(\widetilde{M},\widetilde{N})\langle t_*\rangle \subset B^o_n\bigl(\mathbb{K} \cap W(M,N)\langle t_*\rangle,\varepsilon\bigr)\Bigr).$$

Обоснование подобно в идейном отношении доказательству предложения 6.1. Отметим, как наиболее важный, случай, когда в условиях предложения 7.1 $t_* = t_o \in \mathrm{Supp}\bigl(W(M,N)\bigr)$.

Теорема 7.1. *Пусть* $t_* \in \mathrm{Supp}\big(W(M,N)\big)$, $\mathbb{K} \in \mathfrak{K}[W(M,N)\langle t_*\rangle]$ *и* $\varepsilon \in]0,\infty[$. *Тогда*

$$\exists\,\delta \in]0,\infty[\ \ \forall\,\widetilde{M} \in \mathcal{F}\ \ \forall\,\widetilde{N} \in \mathfrak{F}\ \ \Big(\big(M \subset \widetilde{M} \subset S_o(M,\delta)\big)\,\&\,\big(N \subset \widetilde{N} \subset \mathbb{S}(N,\delta)\big)\Big) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Big(\mathbb{K} \cap W(M,N)\langle t_*\rangle \subset \mathbb{K} \cap W(\widetilde{M},\widetilde{N})\langle t_*\rangle \subset B_n^o\big(\mathbb{K} \cap W(M,N)\langle t_*\rangle,\varepsilon\big)\Big).$$

Итак, установлено свойство, имеющее смысл непрерывности сверху фрагментов сечений МПП (имеется в виду зависимость (4.7)).

§ 8. Условия разрешимости задачи наведения в классе обобщенных квазистратегий

В настоящем параграфе исследуется связь (4.7) с проблемой успешной разрешимости задачи наведения в классе идеализированных процедур управления — квазистратегий. Упомянутые квазистратегии определяем как мультифункции (м/ф), действующие в пространствах мер. Последнее естественно для нелинейной системы общего вида в связи с возможной некомпактностью пучка обычных траекторий. Многозначность (квазистратегий) позволяет определять разрешающие квазистратегии конструктивно, связывая нужное построение с МПИ. Условимся о некоторых обозначениях, используя σ-алгебры $\mathcal{C}_t^{(\theta)}$ и $\mathcal{D}_t^{(\theta)}$, введенные в параграфе 2 при $t \in T$ и $\theta \in [t,\vartheta_o]$. Будем рассматривать сужения обобщенных управлений на данные σ-алгебры.

При $t \in T$, $\theta \in [t,\vartheta_o]$ и $H \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_t)$ полагаем, что $[H|\,t;\theta) \triangleq \Big\{(\eta|\,\mathcal{C}_t^{(\theta)})\,:\ \eta \in H\Big\}$. Если $t_* \in T$, то элементы множества

$$\widetilde{A}_{t_*} \triangleq \Big\{\alpha \in \prod_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \mathcal{P}'\left(\Pi_{t_*}(\nu)\right) \,|\, \forall\,\nu_1 \in \mathcal{E}_{t_*}\ \ \forall\,\nu_2 \in \mathcal{E}_{t_*}\ \ \forall\,\theta \in [t_*,\vartheta_o]$$
$$\Big((\nu_1|\,\mathcal{D}_{t_*}^{(\theta)}) = (\nu_2|\,\mathcal{D}_{t_*}^{(\theta)})\Big) \Longrightarrow \left([\alpha(\nu_1)|\,t_*;\theta) = [\alpha(\nu_2)|\,t_*;\theta)\right)\Big\} \tag{8.1}$$

называем (многозначными обобщенными) квазистратегиями на отрезке $[t_*,\vartheta_o]$; каждая такая квазистратегия (как отображение) действует из $\mathcal{E}_{t_*}$ в $\mathcal{P}'(\mathcal{H}_{t_*})$. Получаем, что $\forall\,t \in T\ \ \forall\,\alpha \in \widetilde{A}_t$

$$\widetilde{\Pi}_t(\alpha) \triangleq \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_t} \alpha(\nu) \in \mathcal{P}'(\mathcal{H}_t)$$

(множество всех обобщенных программных управлений, отвечающих квазистратегии α). Если $t \in T$, а $\alpha \in \widetilde{A}_t$ такова, что множество $\widetilde{\Pi}_t(\alpha)$ $*$-слабо замкнуто, то называем α квазипрограммой на отрезке $[t,\vartheta_o]$. Через $\widetilde{A}_t^{\Pi}$ обозначаем множество всех квазипрограмм на упомянутом отрезке $[t,\vartheta_o]$, где $t \in T$. Легко видеть, что (см. параграф 3) $\Pi_t(\cdot) \triangleq \big(\Pi_t(\nu)\big)_{\nu \in \mathcal{E}_t} \in \widetilde{A}_t^{\Pi}$. Итак, имеем, что $\widetilde{A}_t^{\Pi} \neq \varnothing\ \ \forall\,t \in T$.

Фиксируем до конца статьи $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$. Пусть

$$\mathfrak{H}_{M,N}(t,x) \triangleq \Big\{\eta \in \mathcal{H}_t |\,\forall\,\vartheta \in [t,\vartheta_o]\ \ \Big(\big(\vartheta,\varphi(\vartheta,t,x,\eta)\big) \in M\Big) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \Big(\exists\,\xi \in [t,\vartheta[:\ \big(\xi,\varphi(\xi,t,x,\eta)\big) \notin N\Big)\Big\}\ \ \forall\,(t,x) \in N. \tag{8.2}$$

Рассуждением по индукции устанавливается, что $\widetilde{\Pi}_t(\alpha) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t,x) \neq \varnothing\ \forall\,k \in \mathbb{N}_o\ \forall\,(t,x) \in N \setminus W_k(M,N)\ \forall\,\alpha \in \widetilde{A}_t$. Как следствие, получаем свойство $\widetilde{\Pi}_t(\alpha) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t,x) \neq \varnothing\ \forall\,(t,x) \in N \setminus W(M,N)\ \forall\,\alpha \in \widetilde{A}_t$. Введем при $(t,x) \in N$ и $H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{S}_{M,H}(t,x) \triangleq \Big\{\eta \in \mathcal{H}_t |\,\exists\,\theta \in [t,\vartheta_o]:\ \Big(\big(\theta,\varphi(\theta,t,x,\eta)\big) \in M\Big)\,\&$$
$$\&\,\Big(\big(\xi,\varphi(\xi,t,x,\eta)\big) \in H\ \ \forall\,\xi \in [t,\theta[\Big)\Big\}, \tag{8.3}$$

получая множество всех обобщенных программных управлений-мер, разрешающих задачу наведения на M в пределах H, где $H \subset T \times \mathbb{R}^n$. С использованием (8.3) конструируем множества

$$\pi^{(W)}_{t,x}\langle \nu |\, M, N\rangle \overset{\triangle}{=} \Pi_t(\nu) \cap \mathcal{S}_{M,W(M,N)}(t,x) \quad \forall\,(t,x) \in N \quad \forall\,\nu \in \mathcal{E}_t. \tag{8.4}$$

В свою очередь, (8.4) определяет м/ф на пространствах мер: при $(t,x) \in N$

$$\pi^{(W)}_{t,x}\langle \cdot |\, M, N\rangle \overset{\triangle}{=} (\pi^{(W)}_{t,x}\langle \nu |\, M, N\rangle)_{\nu \in \mathcal{E}_t} \in \prod_{\nu \in \mathcal{E}_t} \mathcal{P}\big(\Pi_t(\nu)\big). \tag{8.5}$$

Предложение 8.1. *Если* $(t_*, x_*) \in W(M,N)$, *то* $\pi^{(W)}_{t_*,x_*}\langle \cdot |\, M, N\rangle \in \widetilde{A}^{\Pi}_{t_*}$.

Доказательство следует фактически из того, что $W(M,N)$ является неподвижной точкой оператора $A[M]$. Ясно также (см. (8.4)), что при $(t_*, x_*) \in W(M,N)$

$$\widetilde{\Pi}_{t_*}(\pi^{(W)}_{t_*,x_*}\langle \cdot |\, M, N\rangle) \subset \mathcal{S}_{M,N}(t_*, x_*). \tag{8.6}$$

Из (8.6) вытекает, что посредством (8.4), (8.5) для позиций из МПП $W(M,N)$ конструктивно определяется квазипрограмма (и, в частности, квазистратегия), гарантированно разрешающая задачу наведения. Итак, для гарантированного приведения траекторий на M в пределах N следует на самом деле обеспечивать упомянутое приведение в пределах $W(M,N)$; важно при этом, чтобы начальная позиция сама принадлежала $W(M,N)$.

Теорема 8.1. *Справедлива следующая цепочка равенств:*

$$W(M,N) = \{(t,x) \in N \,|\, \exists\,\alpha \in \widetilde{A}_t : \widetilde{\Pi}_t(\alpha) \subset \mathcal{S}_{M,N}(t,x)\} =$$
$$= \{(t,x) \in N \,|\, \exists\,\alpha \in \widetilde{A}^{\Pi}_t : \widetilde{\Pi}_t(\alpha) \subset \mathcal{S}_{M,N}(t,x)\}.$$

Доказательство использует отмеченное ранее свойство неразрешимости задачи наведения (в классе квазистратегий) для позиций из $N \setminus W(M,N)$, а также (8.6) и то очевидное положение, что для $(t,x) \in N$ $\mathcal{S}_{M,N}(t,x) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t,x) = \varnothing$; заметим также, что $\mathcal{S}_{M,N}(t,x) \cup \mathfrak{H}_{M,N}(t,x) = \mathcal{H}_t$. Итак, МПП $W(M,N)$ исчерпывает возможности успешного решения задачи наведения в классе квазистратегий.

Если $t \in T$, то введем бинарное отношение $\overset{\mathrm{t}}{\sqsubseteq}$ на множестве $\widetilde{A}_t$, полагая, что $\forall\,\alpha_1 \in \widetilde{A}_t$ $\forall\,\alpha_2 \in \widetilde{A}_t$

$$\left(\alpha_1 \overset{\mathrm{t}}{\sqsubseteq} \alpha_2\right) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (\alpha_1(\nu) \subset \alpha_2(\nu) \quad \forall\,\nu \in \mathcal{E}_t);$$

получаем частично упорядоченное множество (ЧУМ) $(\widetilde{A}_t, \overset{\mathrm{t}}{\sqsubseteq})$.

Теорема 8.2. *При* $(t_*, x_*) \in W(M,N)$ *квазипрограмма* $\pi^{(W)}_{t_*,x_*}\langle \cdot |\, M, N\rangle$ *является наибольшим, в смысле ЧУМ* $(\widetilde{A}_{t_*}, \overset{\mathrm{t}_*}{\sqsubseteq})$, *элементом множества*

$$\left\{\alpha \in \widetilde{A}_{t_*} \,|\, \widetilde{\Pi}_{t_*}(\alpha) \subset \mathcal{S}_{M,N}(t_*, x_*)\right\}.$$

Доказательство использует факт неразрешимости задачи сближения в классе квазистратегий из позиций $(t,x) \in N \setminus W(M,N)$, а также одну полезную возможность «сужения» квазистратегии на меньший промежуток времени; а именно: если $t_* \in T$, $\alpha \in \widetilde{A}_{t_*}$, $\nu_* \in \mathcal{E}_{t_*}$, $\eta_* \in \alpha(\nu_*)$ и $\theta \in [t_*, \vartheta_o]$, то

$$\bar{\alpha} \overset{\triangle}{=} \big(\{\bar{\eta} \in \Pi_\theta(\nu) \,|\, \eta_* \perp \bar{\eta} \in \alpha(\nu_* \bowtie \nu)\}\big)_{\nu \in \mathcal{E}_\theta} \in \widetilde{A}_\theta,$$

где приняты следующие обозначения для операций склеивания:

$$\left(\eta_1 \perp \eta_2 \overset{\triangle}{=} \Big(\eta_1\big(H \cap ([t_*, \theta[\times P \times Q)\big) + \eta_2(H \cap \Omega_\theta)\Big)_{H \in \mathcal{C}_{t_*}} \in \mathcal{H}_{t_*} \quad \forall\,\eta_1 \in \mathcal{H}_{t_*} \quad \forall\,\eta_2 \in \mathcal{H}_\theta\right) \&$$
$$\& \left(\nu_1 \bowtie \nu_2 \overset{\triangle}{=} \Big(\nu_1\big(D \cap ([t_*, \theta[\times Q)\big) + \nu_2(D \cap Z_\theta)\Big)_{D \in \mathcal{D}_{t_*}} \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \forall\,\nu_1 \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \forall\,\nu_2 \in \mathcal{E}_\theta\right).$$

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикладная математика и механика. 1970. Т. 34. № 6. С. 1005–1022.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Кряжимский А.В. К теории позиционных дифференциальных игр сближения–уклонения// Доклады АН СССР. 1978. Т. 239. № 4. С. 779–782.
4. Ченцов А.Г. О структуре одной игровой задачи сближения // Доклады АН СССР. 1975. Т. 224. № 6. С. 1272–1275.
5. Ченцов А.Г. К игровой задаче наведения // Доклады АН СССР. 1976. Т. 226. № 1. С. 73–76.
6. Ченцов А.Г. Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Математический сборник. 1976. Т. 99. № 3. С. 394–420.
7. Ухоботов В.И. Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 2. С. 358–364.
8. Чистяков С.В. К решению игровых задач преследования // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 5. С. 825–832.
9. Ченцов А.Г. Об альтернативе в классе квазистратегий для дифференциальной игры сближения–уклонения // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 41. № 10. С. 1801–1808.
10. Ченцов А.Г. Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения–уклонения. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1979. 103 с. Деп. в ВИНИТИ 04.06.1979, № 1933-79.
11. Ченцов А.Г. Метод программных итераций и множества позиционного поглощения // Доклады Академии наук. 2016. Т. 467. № 2. С. 144–148.
12. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.

Поступила в редакцию 06.05.2016

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, отдел управляемых систем, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

A. G. Chentsov
The programmed iterations method in a game problem of guidance

Keywords: differential game, programmed iterations method, set of positional absorption.

MSC: 28A33

The solution of a differential game of guidance–evasion on the basis of the programmed iterations method is considered. The basic goal consists in the construction of a set of positional absorption corresponding to alternative partition following from the fundamental alternative theorem of N. N. Krasovskii and A. I. Subbotin. For construction, an operator of programmed absorption defined by the target set in a guidance problem is used. The set defining phase constraints is gradually transformed by the above-mentioned operator; therefore, the sequence for which the corresponding limit coincides with the set of positional absorption is realized. It is assumed that the target set is closed and the set defining phase constraints of initial problem has closed sections corresponding to fixation of time. Properties having the sense of one-sided continuity of the positional absorption set under variation of sets defining initial differential game are established. It is shown that the limit of iterated procedure coincides with the set of successful solvability in a class of set-valued generalized quasistrategies.

REFERENCES

1. Krasovskii N.N, Subbotin A.I. An alternative for the game problem of convergence, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1970, vol. 34, issue 6, pp. 948–965.

2. Krasovskii N.N, Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.
3. Kryazhimskii A.V. On the theory of positional differential games of convergence–evasion, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1978, vol. 19, pp. 408–412.
4. Chentsov A.G. On the structure of a game problem of convergence, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1975, vol. 16, pp. 1404–1408.
5. Chentsov A.G. On a game problem of guidance, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1976, vol. 17, pp. 73–77.
6. Čencov A.G. On a game problem of converging at a given instant of time, *Mathematics of the USSR – Sbornik*, 1976, vol. 28, no. 3, pp. 353–376.
7. Ukhobotov V.I. Construction of a stable bridge for a class of linear games, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1977, vol. 41, issue 2, pp. 350–354.
8. Chistyakov S.V. On solving pursuit game problems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1977, vol. 41, issue 5, pp. 845–852.
9. Chentsov A.G. About an alternative to the class of quasistrategies for differential pursuit–evasion game, *Differ. Uravn.*, 1980, vol. 16, no. 10, pp. 1801–1808 (in Russian).
10. Chentsov A.G. *The programmed iterations method for differential pursuit–evasion game*, Sverdlovsk: Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Research Centre of RAS, 1979, 103 p. Deposited in VINITI 04.06.1979, no. 1933-79 (in Russian).
11. Chentsov A.G. Programmed iteration method and sets of positional absorption, *Doklady Mathematics*, 2016, vol. 93, no. 2, pp. 144–148.
12. Engelking R. *General topology*, Warszawa: PWN, 1985, 752 p.

Received 06.05.2016

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Science, Main Researcher, Department of Controlled Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru