УДК 517.935

© *Л. И. Родина*

СВОЙСТВА СРЕДНЕЙ ВРЕМЕННОЙ ВЫГОДЫ В СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ СБОРА ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО РЕСУРСА[1]

Рассматриваются модели сбора возобновляемого ресурса, заданные дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями, зависящими от случайных параметров. При отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается дифференциальным уравнением $\dot{x} = g(x)$, которое имеет асимптотически устойчивое решение $\varphi(t) \equiv K$, $K > 0$. Предполагаем, что длины интервалов $\theta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ между моментами импульсов τ_k являются случайными величинами и размеры импульсного воздействия зависят от случайных параметров v_k, $k = 1, 2, \ldots$. На процесс сбора можно влиять таким образом, чтобы остановить заготовку в том случае, когда ее доля окажется достаточно большой, чтобы сохранить некоторую часть ресурса для увеличения размера следующего сбора. Построено управление $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_k, \ldots)$, ограничивающее долю добываемого ресурса в каждый момент времени τ_k таким образом, чтобы количество оставшегося ресурса, начиная с некоторого момента τ_{k_0}, было не меньше заданного значения $x > 0$. Получены оценки средней временной выгоды от извлечения ресурса и приведены условия, при которых она имеет положительный предел (с вероятностью единица). Показано, что при недостаточном ограничении на извлечение ресурса значение средней временной выгоды может равняться нулю для всех или для почти всех значений случайных параметров. Таким образом, мы описываем способ добычи ресурса для режима сбора в долгосрочной перспективе, при котором постоянно сохраняется некоторая часть популяции, необходимая для ее дальнейшего восстановления, и с вероятностью единица существует предел средней временной выгоды.

Ключевые слова: стохастические модели сбора, возобновляемый ресурс, средняя временная выгода.

DOI: 10.20537/vm180207

Введение

Задачи оптимального сбора ресурса в вероятностных моделях начали вызывать интерес ученых, начиная с семидесятых годов прошлого века (см. [1–4]). В одной из первых работ [3], посвященной данной тематике, показано, что стохастическую рыбную популяцию можно эксплуатировать до достижения определенного уровня (escapement level), не зависящего от текущего размера популяции. Вопросы оптимальной эксплуатации популяций, заданных различными стохастическими моделями, в которых случайным воздействиям подвержены размер популяции, коэффициент рождаемости или цена продукции, также рассматриваются в работах [5–9] (более подробный обзор литературы приведен в [10]). Основными моделями для исследования в большинстве работ являются модели рыбного промысла, поскольку неконтролируемое промышленное рыболовство может привести к серьезным экологическим последствиям.

Данная статья является продолжением [11]. Мы рассматриваем модели динамики эксплуатируемой популяции, заданные дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями, зависящими от случайных параметров. Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается дифференциальным уравнением $\dot{x} = g(x)$, а в моменты времени τ_k из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса v_k, $k = 1, 2, \ldots$, что приводит к резкому (импульсному) уменьшению количества данного ресурса. Считаем, что длины интервалов $\theta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ между моментами импульсов τ_k являются случайными величинами и размеры импульсного воздействия зависят от случайных параметров v_k; здесь $\theta_k \in \Omega_1 \subseteq [\alpha_1, \beta_1]$, где $0 < \alpha_1 \leqslant \beta_1 < \infty$, $v_k \in \Omega_2 \subseteq [0, 1]$, $k = 1, 2, \ldots$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16–01–00346-а).

Пусть имеется возможность влиять на процесс сбора ресурса таким образом, чтобы остановить заготовку, если ее доля окажется достаточно большой (больше некоторого значения $u_k \in [0,1)$ в момент τ_k), чтобы сохранить некоторую часть ресурса для увеличения размера следующего сбора. В этом случае доля добываемого ресурса будет равна

$$\ell_k = \begin{cases} v_k, & \text{если} \ \ v_k < u_k, \\ u_k, & \text{если} \ \ v_k \geqslant u_k. \end{cases} \tag{0.1}$$

Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана дифференциальным уравнением с импульсным воздействием:

$$\begin{gathered} \dot{x} = g(x), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta x\big|_{t=\tau_k} = -\ell(v_k, u_k)x, \quad k = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{0.2}$$

где $\Delta x\big|_{t=\tau_k} = x(\tau_k) - x(\tau_k - 0)$, $\theta_k = \tau_k - \tau_{k-1} \in \Omega_1$, $(x, v_k, u_k) \in [0, +\infty) \times \Omega_2 \times [0,1]$. Предполагаем, что решения уравнения непрерывны справа, функция $g(x)$ определена и непрерывно дифференцируема для всех $x \in [0, +\infty)$. Пусть также имеет место следующее условие: *существует $K > 0$ такое, что $\varphi(t) \equiv K$ является асимптотически устойчивым решением уравнения* $\dot{x} = g(x)$. Данное условие выполнено, если $K > 0$ — стационарное состояние уравнения $\dot{x} = g(x)$ и $g'(K) < 0$ (см. [12, с. 30]). В частности, оно выполнено для логистического уравнения $\dot{x} = (a - bx)x$, где коэффициенты $a > 0$ и $b > 0$ являются показателями роста популяции и внутривидовой конкуренции соответственно (здесь $K = \dfrac{a}{b}$), и уравнения динамики популяции $\dot{x} = ax(x - L)(K - x)$, где $a > 0$, $K > L > 0$, L — нижняя критическая плотность популяции, K — стационарная плотность.

Обозначим $U \doteq \{\bar{u} : \bar{u} = (u_1, \ldots, u_k, \ldots)\}$, где $u_k \in [0,1]$,

$$\begin{gathered} \bar{\theta} \doteq (\theta_1, \ldots, \theta_k, \ldots), \ \ \theta_k \in \Omega_1, \\ \bar{v} \doteq (v_1, \ldots, v_k, \ldots), \ \ v_k \in \Omega_2, \\ \bar{\ell} \doteq (\ell_1, \ldots, \ell_k, \ldots), \ \ \ell_k = \ell(v_k, u_k). \end{gathered}$$

Отметим, что $\bar{\ell} = \bar{\ell}(\bar{v}, \bar{u})$, то есть последовательность $\bar{\ell}$ определяется значениями $\bar{v}$ и управлением $\bar{u} \in U$. Пусть $X_k = X_k(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0)$ — количество ресурса до сбора в момент τ_k, $k = 1, 2, \ldots$, зависящее от длин промежутков $\theta_1, \ldots, \theta_k$ между моментами сбора, долей ресурса $\ell_i = \ell(v_i, u_i)$, $i = 1, \ldots, k-1$, собранного в предыдущие моменты времени, и начального значения x_0. Для любого $x_0 \geqslant 0$ введем в рассмотрение функцию

$$H_*\big(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0\big) \doteq \varliminf_{n \to \infty} \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \theta_k} \sum_{k=1}^{n} X_k\big(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0\big)\ell_k,$$

которую назовем *средней временной выгодой* от извлечения ресурса. Аналогично, с заменой нижнего предела на верхний, определим функцию $H^*\big(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0\big)$, и если выполнено равенство $H_*\big(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0\big) = H^*\big(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0\big)$, то определим предел

$$H\big(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0\big) \doteq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \theta_k} \sum_{k=1}^{n} X_k\big(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0\big)\ell_k. \tag{0.3}$$

В данной работе построено управление $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_k, \ldots) \in U$, ограничивающее долю добываемого ресурса в каждый момент времени τ_k таким образом, чтобы количество оставшегося ресурса, начиная с некоторого момента τ_{k_0} (зависящего от x_0), было не меньше заданного значения $x > 0$. Для данного управления получены оценки средней временной выгоды и приведены условия, при которых с вероятностью единица существует положительный предел (0.3). Показано, что при недостаточном ограничении на извлечение ресурса значение средней временной выгоды может равняться нулю для всех или для почти всех значений случайных параметров. Таким образом, мы описываем способ добычи ресурса для режима сбора в долгосрочной перспективе, при котором постоянно сохраняется некоторая часть популяции, необходимая для ее дальнейшего восстановления, и с вероятностью единица существует предел средней временной выгоды. Представленное исследование не только дает интересную качественную информацию, но может также стать инструментом моделирования для облегчения реального долгосрочного планирования промысловой деятельности.

§ 1. Описание вероятностной модели

Вероятностная модель, отвечающая дифференциальному уравнению со случайными параметрами (0.2), описана в работе [13]. Приведем краткое описание для полноты изложения. В данной модели моменты τ_k являются моментами скачков для системы с импульсным воздействием; полагаем, что $\tau_0=0$, $\theta_k=\tau_k-\tau_{k-1}\in\Omega_1\subseteq[\alpha_1,\beta_1]$ и величина скачка в момент τ_k зависит от случайного параметра $v_k\in\Omega_2\subseteq[0,1]$, $k=1,2,\ldots$. Таким образом, все параметры принадлежат множеству $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$, причем любое из множеств Ω_1 или Ω_2 может содержать только один элемент. Если все множество Ω состоит из одного элемента, вероятностная модель совпадает с детерминированной.

Определим вероятностное пространство $(\Sigma,\mathfrak{A},\mu)$ как прямое произведением вероятностных пространств $(\Sigma_1,\mathfrak{A}_1,\mu_1)$ и $(\Sigma_2,\mathfrak{A}_2,\mu_2)$. Здесь Σ_1 означает множество числовых последовательностей $\bar\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_k,\ldots)$, где $\theta_k\in\Omega_1$, система множеств $\mathfrak{A}_1$ является наименьшей сигма-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами

$$E_k\doteq\{\bar\theta\in\Sigma_1:\theta_1\in I_1,\ldots,\theta_k\in I_k\},\quad\text{где }\ I_i\doteq(t_i,s_i],\ i=1,\ldots,k,$$

а вероятностная мера μ_1 определена следующим образом. Для каждого промежутка I_i, $i==1,2,\ldots$, определим вероятностную меру $\widetilde\mu_1(I_i)=F_1(s_i)-F_1(t_i)$ с помощью функции распределения $F_1(t)$. На алгебре цилиндрических множеств построим меру

$$\widetilde\mu_1(E_k)=\widetilde\mu_1(I_1)\cdot\ldots\cdot\widetilde\mu_1(I_k),$$

тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова (см., например, [14, с. 176]) на измеримом пространстве $(\Sigma_1,\mathfrak{A}_1)$ существует единственная вероятностная мера μ_1, которая является продолжением меры $\widetilde\mu_1$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}_1$. Таким же образом определяем вероятностное пространство $(\Sigma_2,\mathfrak{A}_2,\mu_2)$, где $\Sigma_2\doteq\{\bar v:\bar v=(v_1,\ldots,v_k,\ldots)\}$, $v_k\in\Omega_2$, мера $\widetilde\mu_2$ задана с помощью функции распределения $F_2(t)$. Отметим, что

$$\Sigma=\Sigma_1\times\Sigma_2=\big\{\sigma:\sigma=(\omega_1,\ldots,\omega_k,\ldots)\big\},\quad\text{где }\ \omega_k=(\theta_k,v_k)\in\Omega.$$

Зададим сигма-алгебру $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2$ и меру $\mu=\mu_1\times\mu_2$, которая является прямым произведением вероятностных мер μ_1 и μ_2. Это означает, что $\mu(A\times B)=\mu_1(A)\mu_2(B)$ для всех $A\in\mathfrak{A}_1$, $B\in\mathfrak{A}_2$.

§ 2. Оценка средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса

Определим $\varphi(t,x)$ как решение дифференциального уравнения $\dot x=g(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,x)=x$, где $t\geqslant0$, $x\geqslant0$. Если $\theta\in\Omega_1$, то функция $\varphi(\theta,x)$ является случайной величиной, заданной на множестве Ω_1. Напомним, что областью асимптотической устойчивости (областью притяжения) решения $\varphi(t)\equiv K$ уравнения $\dot x=g(x)$ является множество всех точек $x\in\mathbb{R}$, обладающих свойством $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t,x)=K$.

Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим $\sigma_m \doteq (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ и зададим рекуррентным образом случайные величины $A_m = A_m(\sigma_m, x)$, $B_m = B_m(\sigma_m, x)$:

$$A_1 = \varphi(\theta_1, x), \;\; A_{k+1} = \varphi\big(\theta_{k+1}, A_k(1-\ell_k)\big);$$
$$B_1 = K, \;\; B_{k+1} = \varphi\big(\theta_{k+1}, B_k(1-\ell_k)\big), \quad k = 1, \ldots, m-1.$$

Здесь

$$\ell_k = \ell_k(\sigma_k, x) = \begin{cases} v_k, \;\; \text{если} \;\; v_k < u_k, \\ u_k, \;\; \text{если} \;\; v_k \geqslant u_k = 1 - \dfrac{x}{A_k(\sigma_k, x)}, \end{cases} \tag{2.1}$$

$\ell_m = \ell_m(\sigma_m, x)$ также определим равенством (2.1).

Буквой M будем обозначать математическое ожидание случайной величины, $M\theta$ — математическое ожидание длин интервалов $\theta_1, \theta_2, \ldots$. Заметим, что $0 < \alpha_1 \leqslant M\theta \leqslant \beta_1 < \infty$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *уравнение* $\dot{x} = g(x)$ *имеет асимптотически устойчивое решение* $\varphi(t) \equiv K$, *и интервал* (K_1, K_2) *является областью притяжения этого решения* $(0 \leqslant K_1 < K < K_2 \leqslant +\infty)$;

2) $\Omega_1 \subseteq [\alpha_1, \beta_1]$, *где* $0 < \alpha_1 \leqslant \beta_1 < \infty$; $\Omega_2 \subseteq [0, 1]$, $F_2(0) < 1$.

Тогда для любых $m \in \mathbb{N}$, $x \in (K_1, K)$ *и* $x_0 \in (K_1, K_2)$ *существует управление* $\bar{u} \in U$ *такое, что для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *выполнены неравенства*

$$\frac{1}{m \cdot M\theta} \sum_{k=1}^{m} M(A_k \ell_k) \leqslant H_*\big(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0\big) \leqslant H^*\big(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0\big) \leqslant \frac{1}{m \cdot M\theta} \sum_{k=1}^{m} M(B_k \ell_k). \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим сначала, что функция $x \mapsto \varphi(t, x)$ возрастающая. Действительно, если существуют такие $x_1 < x_2$, что $\varphi(t, x_1) \geqslant \varphi(t, x_2)$, то найдется точка $t_* \in (0, t]$ такая, что $\varphi(t_*, x_1) = \varphi(t_*, x_2)$; получили противоречие с условием единственности решений дифференциального уравнения.

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и $x \in (K_1, K)$. Определим последовательности случайных величин $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$A_{sm+1} \doteq \varphi(\theta_{sm+1}, x), \quad A_{sm+i} \doteq \varphi\big(\theta_{sm+i}, A_{sm+i-1}(1 - \ell_{sm+i-1})\big),$$
$$B_{sm+1} \doteq K, \quad B_{sm+i} \doteq \varphi\big(\theta_{sm+i}, B_{sm+i-1}(1 - \ell_{sm+i-1})\big),$$
$$i = 2, \ldots, m, \;\; s = 0, 1, 2, \ldots.$$

Здесь ℓ_k, $k = 1, 2, \ldots$, задаются равенством (0.1), управление $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_k, \ldots) \in U$ выбирается в зависимости от расположения начальной точки x_0. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $x_0 \in [x, K]$. Покажем, что управление $\bar{u} \in U$, при котором выполнено (2.2), можно определить равенствами $u_k = 1 - \dfrac{x}{A_k}$ при всех $k = 1, 2, \ldots$. Обозначим через X_k и x_k размеры популяции перед и после извлечения ресурса в момент τ_k. Поскольку функция $x \mapsto \varphi(t, x)$ возрастающая, то

$$A_1 = \varphi(\theta_1, x) \leqslant X_1 = \varphi(\theta_1, x_0) \leqslant \varphi(\theta_1, K) = K = B_1;$$

если $m \geqslant 2$, то для $X_2 = \varphi(\theta_2, x_1) = \varphi\big(\theta_2, X_1(1-\ell_1)\big)$ выполнены неравенства

$$A_2 = \varphi\big(\theta_2, A_1(1-\ell_1)\big) \leqslant X_2 \leqslant \varphi\big(\theta_2, B_1(1-\ell_1)\big) = B_2. \tag{2.3}$$

Таким же способом получаем, что $A_k \leqslant X_k \leqslant B_k$ для всех $k = 1, \ldots, m$. Далее, из неравенств $\ell_m \leqslant u_m$ и $A_m \leqslant X_m$ следует, что

$$x_m = X_m(1-\ell_m) \geqslant X_m(1-u_m) = \frac{X_m x}{A_m} \geqslant x.$$

Из последнего неравенства при $x_0 \in [x, K]$ имеем

$$A_{m+1} = \varphi(\theta_{m+1}, x) \leqslant X_{m+1} = \varphi(\theta_{m+1}, x_m) \leqslant K = B_{m+1}.$$

Отсюда, аналогично (2.3), следует, что $A_{m+i} \leqslant X_{m+i} \leqslant B_{m+i}$ при $i = 2, \ldots, m$. Повторяя предыдущие рассуждения, получаем

$$A_k \leqslant X_k \leqslant B_k \quad \text{для всех} \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.4}$$

Покажем, что пределы $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} A_k\ell_k$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} B_k\ell_k$ существуют с вероятностью единица. Действительно, случайные величины $A_{m(p-1)+1}\ell_{m(p-1)+1} + \ldots + A_{mp}\ell_{mp}$, $p = 1, 2, \ldots$, независимы, ограничены и одинаково распределены, поэтому в силу усиленного закона больших чисел Колмогорова с вероятностью единица

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_k\ell_k = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{mp}\sum_{k=1}^{mp} A_k\ell_k = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{mp}\sum_{j=1}^{p}\bigl(A_{m(j-1)+1}\ell_{m(j-1)+1} + \ldots + A_{mj}\ell_{mj}\bigr) =$$
$$= \frac{1}{m} M\bigl(A_1\ell_1 + \ldots + A_m\ell_m\bigr).$$

Подобное равенство выполнено для последовательности $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$. Отсюда, учитывая (2.4), получаем

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} M(A_k\ell_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_k\ell_k \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\ell_k \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\ell_k \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} B_k\ell_k = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} M(B_k\ell_k). \tag{2.5}$$

Из усиленного закона больших чисел также следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \theta_k = M\theta$$

для почти всех $\sigma \in \Sigma$, поэтому из неравенства (2.5) получаем (2.2).

2. Пусть $x_0 \in (K_1, x)$. Положим $u_k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, k_0$, где $k_0 = k_0(x_0)$ — наименьшее из натуральных чисел, таких, что $x_k = X_k = \varphi(\tau_k, x_0) \geqslant x$. Данное значение k_0 существует, так как точка x_0 содержится в области притяжения асимптотически устойчивого решения $\varphi(t) \equiv K$. Определим $u_k = 1 - \dfrac{x}{A_k}$ для всех $k > k_0$, тогда $A_k \leqslant X_k \leqslant B_k$ при всех $k > k_0$; это доказывается так же, как в первом случае. Следовательно, неравенство (2.5) справедливо при выбранном управлении $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_k, \ldots)$, поэтому (2.2) выполнено для почти всех $\sigma \in \Sigma$.

3. Покажем, что утверждение теоремы справедливо при $x_0 \in (K, K_2)$. Пусть $k_1 = k_1(x_0)$ — наименьшее из натуральных чисел, таких что $x_k \leqslant K$ при $u_1 = \ldots = u_k = 1$; в работе [11] показано, что данное число существует с вероятностью единица.

Выберем управление $u_k = 1$ для всех $k = 1, \ldots, k_1 - 1$, $u_{k_1} = 1 - \dfrac{x}{X_{k_1}}$ и $u_k = 1 - \dfrac{x}{A_k}$ для всех $k > k_1$. Тогда из $x_{k_1} = X_{k_1}(1 - \ell_{k_1})$ и неравенства $v_k \leqslant \ell(v_k, u_k) \leqslant u_k$ получаем, что

$$x = X_{k_1}(1 - u_{k_1}) \leqslant x_{k_1} \leqslant X_{k_1}(1 - v_{k_1}) \leqslant K.$$

Дальнейшее доказательство повторяет доказательство первых двух пунктов. □

§ 3. О существовании предела средней временной выгоды

В этом параграфе получены условия, при которых с вероятностью единица существует положительный предел $H(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0)$ и условия, при которых этот предел равен нулю. Последние условия указывают на то, что в результате чрезмерной эксплуатации данная популяция вырождается.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1 и $g'(x) < 0$ при $x \in (L_1, L_2)$, где $K_1 < L_1 < K < L_2$. Тогда для любых $(x, x_0) \in (L_1, K) \times (K_1, K_2)$ при некотором управлении $\bar{u} \in U$ для почти всех $\sigma \in \Sigma$ существует положительный предел*

$$H(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0) = \frac{1}{M\theta} \cdot \lim_{n\to\infty} M(A_n\ell_n) = \frac{1}{M\theta} \cdot \lim_{n\to\infty} M(B_n\ell_n), \tag{3.1}$$

не зависящий от начального значения $x_0 \in (K_1, K_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $\varphi'_x(t,x)$, где $(t,x) \in [0,\infty) \times [L_1, K]$, которая удовлетворяет уравнению $\dot{y} = g'_x(\varphi(t,x))y$ и начальному условию $\varphi'_x(0,x) = 1$ для всех $x \in [L_1, K]$ (см. [15, глава 5, § 23]). Если $x \in (L_1, K)$, то $\varphi(t,x) \in (L_1, K)$, так как (L_1, K) входит в область притяжения решения $\varphi(t) \equiv K$. Поэтому $g'_x(\varphi(t,x)) < 0$ для всех $(t,x) \in [0,\infty) \times (L_1, K)$. Следовательно, при данных значениях (t,x) выполнено неравенство

$$\varphi'_x(t,x) = \exp\int_0^t g'_x(\varphi(t,x))\,dt \leqslant 1. \tag{3.2}$$

В силу теоремы Лагранжа, $\varphi(t,x_2) - \varphi(t,x_1) = \varphi'_x(t,\hat{x})(x_2 - x_1)$ при $x_1 < x_2$, где $\hat{x} \in (x_1, x_2)$, поэтому из (3.2) следует, что $\varphi(t,x_2) - \varphi(t,x_1) \leqslant x_2 - x_1$ для всех $t \in [0,\infty)$, $x_1 < x_2$, $x_1 \in (L_1, K)$, $x_2 \in (L_1, K]$. Из последнего неравенства получаем

$$B_{k+1} - A_{k+1} = \varphi\big(\theta_{k+1}, B_k(1-\ell_k)\big) - \varphi\big(\theta_{k+1}, A_k(1-\ell_k)\big) \leqslant (B_k - A_k)(1-\ell_k)$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$. Поэтому, так как функция $x \mapsto \varphi(t,x)$ возрастающая,

$$0 \leqslant B_k - A_k \leqslant (B_1 - A_1)(1-\ell_1)\ldots(1-\ell_k), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.3}$$

Отметим, что если выполнено условие 2 теоремы 1, то $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\ell_1)\ldots(1-\ell_n) = 0$ с вероятностью единица. Это показано в работе [11] при доказательстве теоремы 1. Таким образом, из (3.3) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}(B_n - A_n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} M\big(B_n\ell_n - A_n\ell_n\big) = 0$ и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\big(B_n\ell_n - A_n\ell_n\big) = 0 \tag{3.4}$$

для почти всех $\sigma \in \Sigma$. Из (2.2) и (3.4) следуют существование предела $H(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0)$ для почти всех $\sigma \in \Sigma$ и равенство (3.1). Управление $\bar{u} \in U$, при котором существует предел $H(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0)$, построено при доказательстве теоремы 1.

Покажем, что если $x > L_1 > 0$, то предел (3.1) положительный. Для этого достаточно показать, что $M(A_1\ell_1) > 0$. Функция $t \mapsto \varphi(t,x)$ возрастающая, если $x \in (K_1, K)$, поэтому $A_1 = \varphi(\theta_1, x) > x$ для любых $\theta_1 \in \Omega_1$ и $MA_1\ell_1 > xM\ell_1$. Покажем теперь, что $M\ell_1 > 0$, если $F_2(0) < 1$. Действительно, если $F_2(0) = \mu_2(v_1 = 0) < 1$, то $\mu_2(v_1 > 0) = \mu_2(\ell_1 > 0) > 0$. Так как $\ell_1 \geqslant 0$, то для математического ожидания выполнено либо неравенство $M\ell_1 > 0$, либо $M\ell_1 = 0$. В последнем случае $\ell_1 = 0$ с вероятностью единица [14, глава 2, § 6], что противоречит условию $\mu_2(\ell_1 = 0) < 1$. □

Замечание 1. Предел (3.1) зависит от выбранного управления $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_k, \ldots) \in U$, которое строим таким образом, чтобы после каждого извлечения количество оставшегося ресурса было не менее, чем $x \in (K_1, K)$. Значение $x = x^*$, при котором средняя временная выгода максимальная, можно найти численными методами.

Замечание 2. Несложно проверить, что для логистического уравнения $\dot{x} = (a - bx)x$ выполнены равенства $K = \dfrac{a}{b}$, $K_1 = 0$, $L_1 = \dfrac{a}{2b}$, $L_2 = K_2 = +\infty$, поэтому положительный предел (3.1) существует с вероятностью единица для любых $(x, x_0) \in \left(\dfrac{a}{2b}, \dfrac{a}{b}\right) \times (0, +\infty)$.

Покажем теперь, что если не ограничивать долю добываемого ресурса, то с течением времени при определенных условиях популяция может исчезнуть и, следовательно, средняя временная выгода от эксплуатации будет равна нулю. В этом случае для долей извлекаемого ресурса выполнено равенство $\ell_k = v_k$ и количество ресурса X_k до сбора в момент τ_k удовлетворяет уравнению

$$X_{k+1} = \varphi\big(\theta_{k+1}, X_k(1 - v_k)\big), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.5}$$

В следующем утверждении получены условия, при которых средняя временная выгода

$$H\big(\bar{\theta}, \bar{\ell}, x_0\big) = H\big(\bar{\theta}, \bar{v}, x_0\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \theta_k} \sum_{k=1}^{n} X_k\big(\bar{\theta}, \bar{v}, x_0\big) v_k$$

для уравнения (0.2) равна нулю для всех $\sigma \in \Sigma$ или с вероятностью единица.

Утверждение 1. *Пусть* $g(0) = 0$. *Тогда:*

1) *если существуют* $C \in (0, 1)$ *и* $\delta > 0$ *такие, что* $\sup\limits_{(\theta,v)\in\Omega} \big|\varphi'_x(\theta, x(1 - v))\big| \leqslant C$ *для всех* $x \in [0, \delta)$, *то* $H\big(\bar{\theta}, \bar{v}, x_0\big) = 0$ *для всех* $\sigma \in \Sigma$, $x_0 \in [0, \delta)$;

2) *если* $M\Big(\ln \sup\limits_{x\in[0,d)} \big|\varphi'_x(\theta, x(1 - v))\big|\Big) < 0$ *при некотором* $d > 0$, *то найдется* $\delta > 0$ *такое, что* $H\big(\bar{\theta}, \bar{v}, x_0\big) = 0$ *для любого* $x_0 \in [0, \delta)$ *с вероятностью единица.*

Доказательство. Отметим, что точка $X_* = 0$ является положением равновесия (неподвижной точкой) уравнения (3.5), поскольку $\varphi(t, 0) = 0$ для всех $t \in [0, +\infty)$. Дальнейшее доказательство повторяет доказательство теорем 1 и 2 работы [16]. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Reed W.J. A stochastic model for the economic management of a renewable animal resource // Mathematical Biosciences. 1974. Vol. 22. P. 313–337. DOI: 10.1016/0025-5564(74)90097-2
2. Glait A. Optimal harvesting in continuous time with stochastic growth // Mathematical Biosciences. 1978. Vol. 41. P. 111–123. DOI: 10.1016/0025-5564(78)90069-X
3. Reed W.J. Optimal escapement levels in stochastic and deterministic harvesting models // Journal of Environmental Economics and Management. 1979. Vol. 6. P. 350–363. DOI: 10.1016/0095-0696(79)90014-7
4. Clark C., Kirkwood G. On uncertain renewable resourse stocks: Optimal harvest policies and the value of stock surveys // Journal of Environmental Economics and Management. 1986. Vol. 13. Issue 3. P. 235–244. DOI: 10.1016/0095-0696(86)90024-0
5. Ryan D., Hanson F.B. Optimal harvesting of a logistic population with stochastic jumps // Journal of Mathematical Biology. 1986. Vol. 24. P. 259–277. DOI: 10.1007/BF00275637
6. Reed W.J., Clarke H.R. Harvest decisions and assert valuation for biological resources exhibiting size-dependent stochastic growth // International Economic Review. 1990. Vol. 31. P. 147–169. DOI: 10.2307/2526634
7. Weitzman M.L. Landing fees vs harvest quotas with uncertain fish stocks // Journal of Environmental Economics and Management. 2002. Vol. 43. P. 325–338. DOI: 10.1006/jeem.2000.1181
8. Kapaun U., Quaas M.F. Does the optimal size of a fish stock increase with environmental uncertainties? // Economics Working Paper. 2012. Vol. 9. P. 1–40. DOI: 10.1007/s10640-012-9606-y
9. Hansen L.G., Jensen F. Regulating fisheries under uncertainty // Resource and Energy Economics. 2017. Vol. 50. P. 164–177. DOI: 10.1016/j.reseneeco.2017.08.001

10. Jensen F., Frost H., Abildtrup J. Fisheries regulation: A survey of the literature on uncertainty, compliance behavior and asymmetric information // Marine Policy. 2017. Vol. 21. P. 167–178. DOI: 10.1016/j.marpol.2017.03.028
11. Родина Л.И. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 1. С. 48–58. DOI: 10.20537/vm180105
12. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 232 с.
13. Родина Л.И. Об инвариантных множествах управляемых систем со случайными коэффициентами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 4. С. 109–121. DOI: 10.20537/vm140409
14. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. 580 с.
15. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: УРСС, 2004. 240 с.
16. Родина Л.И., Тютеев И.И. Об асимптотических свойствах решений разностных уравнений со случайными параметрами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 79–86. DOI: 10.20537/vm160107

Поступила в редакцию 10.04.2018

Родина Людмила Ивановна, д. ф.-м. н., профессор, Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, 600000, Россия, г. Владимир, ул. Горького, 87.
E-mail: LRodina67@mail.ru

L. I. Rodina

Properties of average time profit in stochastic models of harvesting a renewable resource

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 213–221 (in Russian).

Keywords: stochastic models of harvesting, renewable resource, average time profit.

MSC2010: 34A60, 37N35, 49J15, 93B03

DOI: 10.20537/vm180207

We consider models of harvesting a renewable resource given by differential equations with impulse action, which depend on random parameters. In the absence of harvesting the population development is described by the differential equation $\dot{x} = g(x)$, which has the asymptotic stable solution $\varphi(t) \equiv K$, $K > 0$. We assume that the lengths of the intervals $\theta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ between the moments of impulses τ_k are random variables and the sizes of impulse action depend on random parameters v_k, $k = 1, 2, \ldots$. It is possible to exert influence on the process of gathering in such a way as to stop preparation in the case where its share becomes big enough to keep some part of a resource for increasing the size of the next gathering. We construct the control $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_k, \ldots)$, which limits the share of an extracted resource at each instant of time τ_k so that the quantity of the remaining resource, starting with some instant τ_{k_0}, is no less than a given value $x > 0$. We obtain estimates of average time profit from extraction of a resource and present conditions under which it has a positive limit (with probability one). It is shown that in the case of an insufficient restriction on the extraction of a resource the value of average time profit can be zero for all or almost all values of random parameters. Thus, we describe a way of long-term extraction of a resource for the gathering mode in which some part of population necessary for its further restoration constantly remains and there is a limit of average time profit with probability one.

REFERENCES

1. Reed W.J. A stochastic model for the economic management of a renewable animal resource, *Mathematical Biosciences*, 1974, vol. 22, pp. 313–337. DOI: 10.1016/0025-5564(74)90097-2

2. Glait A. Optimal harvesting in continuous time with stochastic growth, *Mathematical Biosciences*, 1978, vol. 41, pp. 111–123. DOI: 10.1016/0025-5564(78)90069-X
3. Reed W.J. Optimal escapement levels in stochastic and deterministic harvesting models, *Journal of Environmental Economics and Management*, 1979, vol. 6, pp. 350–363. DOI: 10.1016/0095-0696(79)90014-7
4. Clark C., Kirkwood G. On uncertain renewable resourse stocks: Optimal harvest policies and the value of stock surveys, *Journal of Environmental Economics and Management*, 1986, vol. 13, issue 3, pp. 235–244. DOI: 10.1016/0095-0696(86)90024-0
5. Ryan D., Hanson F.B. Optimal harvesting of a logistic population with stochastic jumps, *Journal of Mathematical Biology*, 1986, vol. 24, pp. 259–277. DOI: 10.1007/BF00275637
6. Reed W.J., Clarke H.R. Harvest decisions and assert valuation for biological resources exhibiting size-dependent stochastic growth, *International Economic Review*, 1990, vol. 31, pp. 147–169. DOI: 10.2307/2526634
7. Weitzman M.L. Landing fees vs harvest quotas with uncertain fish stocks, *Journal of Environmental Economics and Management*, 2002, vol. 43, pp. 325–338. DOI: 10.1006/jeem.2000.1181
8. Kapaun U., Quaas M.F. Does the optimal size of a fish stock increase with environmental uncertainties? *Economics Working Paper*, 2012, vol. 9, pp. 1–40. DOI: 10.1007/s10640-012-9606-y
9. Hansen L.G., Jensen F. Regulating fisheries under uncertainty, *Resource and Energy Economics*, 2017, vol. 50, pp. 164–177. DOI: 10.1016/j.reseneeco.2017.08.001
10. Jensen F., Frost H., Abildtrup J. Fisheries regulation: A survey of the literature on uncertainty, compliance behavior and asymmetric information, *Marine Policy*, 2017, vol. 21, pp. 167–178. DOI: 10.1016/j.marpol.2017.03.028
11. Rodina L.I. Optimization of average time profit for probability model of the population subject to a craft, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2018, vol. 28, issue 1, pp. 48–58 (in Russian). DOI: 10.20537/vm180105
12. Riznichenko G.Yu. *Lektsii po matematicheskim modelyam v biologii. Chast' 1* (Lectures on mathematical models in biology. Part 1), Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2002, 232 p.
13. Rodina L.I. On the invariant sets of control systems with random coefficients, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, issue 4, pp. 109–121 (in Russian). DOI: 10.20537/vm140409
14. Shiryaev A.N. *Veroyatnost'* (Probability), Moscow: Nauka, 1989, 580 p.
15. Filippov A.F. *Vvedenie v teoriyu differentsial'nykh uravnenii* (Introduction in the theory of the differential equations), Moscow: URSS, 2004, 240 p.
16. Rodina L.I., Tyuteev I.I. About asymptotical properties of solutions of difference equations with random parameters, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 79–86 (in Russian). DOI: 10.20537/vm160107

Received 10.04.2018

Rodina Lyudmila Ivanovna, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Vladimir State University, ul. Gor'kogo, 87, Vladimir, 600000, Russia.
E-mail: LRodina67@mail.ru