

УДК 514.85, 531.383

© *Е. А. Митюшов, Н. Е. Мисюра, С. А. Берестова*

## ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ НА БАЗЕ БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрена задача оптимального управления движением космического аппарата при коррекции его положения в инерциальной системе координат за счет управляющих моментов, получаемых от ускорений инерционных маховиков бесплатформенной инерциальной навигационной системы. Полученное оптимальное управление обеспечивает плавное изменение ориентации космического аппарата, которое рассматривается как движение по кратчайшей траектории в конфигурационном пространстве специальной ортогональной группы  $SO(3)$ . Алгоритм управления реализуется с использованием оригинальной процедуры нелинейной сферической интерполяции кватернионов. Основными исполнительными органами ориентации динамического контура управления бесплатформенной инерциальной навигационной системой при решении задачи оптимального управления были выбраны четыре инерционных маховика (три — по осям космического аппарата, четвертый — по биссектрисе). Результаты моделирования верифицируются путем создания анимации корректирующего движения космического аппарата.

*Ключевые слова:* космические аппараты, бесплатформенные инерциальные навигационные системы, управляющие моменты, плавное движение.

DOI: [10.20537/vm180211](https://doi.org/10.20537/vm180211)

### Введение

Повышенные технические требования, предъявляемые при разработке системы ориентации и управления движением космического аппарата (КА) с целью повышения их надежности и точности, привели к созданию новых научно-технических подходов и построению системы ориентации и управления движением на базе бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС). Эти системы хорошо уже апробированы и показали свою перспективность при создании в РКК «Энергия» транспортных пилотируемых кораблей «Союз-Т/ТМ», грузовых кораблей «Прогресс-М/М1», станции «Мир» и спутников связи «Ямал» [1]. БИНС не имеет подвижных частей, абсолютно бесшумна, механически сравнительно прочна, не требует специального обслуживания, имеет хорошие показатели наработки на отказ (до 80 тыс. часов у некоторых моделей) и малое энергопотребление (десятки ватт). БИНС позволяет разделить управление на два контура: кинематический (построение требуемых опорных базисов) и динамический, описывающий процесс стабилизации в выбранном опорном базисе. В частности, при определении ориентации КА относительно инерциальной системы координат используется широкоугольный звездный датчик для приема изображения звездного неба и его компьютерной обработки. За счет достаточно широкого поля зрения (8 угл. град.) прибор может визировать более 3-х звезд и тем самым определять три угловые координаты.

Динамический контур управления имеет дело с управляющими моментами, воздействующими на КА и вызывающими изменения его угловой скорости вращения. Управляющие моменты создаются либо за счет внешних (реактивных) сил, либо за счет инерционных маховиков [2–4]. Основными исполнительными органами ориентации являются инерционные маховики. При этом возможны различные способы их ориентации относительно строительных осей КА. Наиболее распространенным случаем является использование четырех или шести маховиков. При использовании четырех маховиков три устанавливаются по строительным осям КА, а четвертый (резервный) — по биссектрисе. Возможна и другая схема их установки.

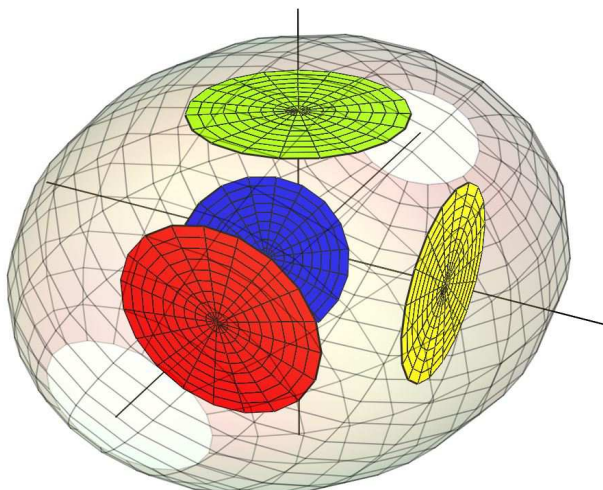


Рис. 1. Схема расположения двигателей-маховиков в КА

Так, в работе [5] рассмотрена альтернативная схема расположения исполнительных органов, содержащая в себе четыре двигателя-маховика, оси вращения которых направлены вдоль боковых ребер правильной четырехугольной пирамиды. В работе [6] рассмотрены две конфигурации системы маховиков, в которых оси вращения расположены параллельно боковым ребрам четырехгранной и правильной шестигранной пирамид. Приведены параметрические зависимости для выбора наиболее рационального расположения системы маховиков на космическом аппарате с точки зрения обеспечения максимально широких возможностей управления его угловой скоростью. Построены области возможных значений кинетического момента системы маховиков с целью оценки возможности их использования в качестве исполнительных органов системы управления малым космическим аппаратом. Рассмотрены возможности каждой из конфигураций системы при отказе одного из маховиков.

В последнее время инерционные движители также находят широкое применение при проектировании роботизированных наземных и подводных самодвижущихся аппаратов [7–11].

## § 1. Динамический контур управления

При отсутствии внешних моментов дифференциальные уравнения движения КА находятся с помощью закона сохранения кинетического момента:

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = 0, \quad \vec{K}_C = \text{const.}$$

В дальнейшем принимается, что четыре двигателя-маховика расположены следующим образом: три — по осям КА, четвертый — по биссектрисе (рис. 1).

В этом случае проекции вектора кинетического момента на главные центральные оси инерции записываются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} K_1 &= Ap(t) + H_1(t) + \frac{1}{\sqrt{3}}H_4(t), \\ K_2 &= Bq(t) + H_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}}H_4(t), \\ K_3 &= Cr(t) + H_3(t) + \frac{1}{\sqrt{3}}H_4(t), \end{aligned}$$

где  $A, B, C$  — моменты инерции КА,  $p(t), q(t), r(t)$  — проекции вектора угловой скорости КА на главные оси,  $H_i = I_i \omega_i$  — кинетические моменты маховиков. Из закона сохранения кинетического момента

$$\begin{aligned} Ap(t) + I_1 \omega_1(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} I_4 \omega_4(t) &= Ap_0, & p(t) &= p_0 - \frac{1}{A} \left( I_1 \omega_1(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} I_4 \omega_4(t) \right), \\ Bq(t) + I_2 \omega_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} I_4 \omega_4(t) &= Bq_0, & \Rightarrow q(t) &= q_0 - \frac{1}{B} \left( I_2 \omega_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} I_4 \omega_4(t) \right), \\ Cr(t) + I_3 \omega_3(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} I_4 \omega_4(t) &= Cr_0, & r(t) &= r_0 - \frac{1}{C} \left( I_3 \omega_3(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} I_4 \omega_4(t) \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $p_0, q_0, r_0$  — угловые скорости КА в начале корректирующего маневра, маховики в начальном положении КА неподвижны, то есть  $\omega_i(0) = 0$  ( $i = 1, \dots, 4$ ).

Путем изменения угловых скоростей двигателей-маховиков обеспечивается управление ориентацией КА.

## § 2. Кинематический контур ориентации

Положение КА определяется функцией единичного кватерниона:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= [\lambda_0(t) \ \lambda_1(t) \ \lambda_2(t) \ \lambda_3(t)]^T, \\ \lambda_0^2(t) + \lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t) + \lambda_3^2(t) &= 1. \end{aligned}$$

Функция  $\lambda(t)$  находится путем сферической нелинейной интерполяции кватернионов:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \left[ \frac{\sin[\vartheta(1-f(t))]}{\sin \vartheta} \right] \lambda^{(1)} + \left[ \frac{\sin[\vartheta f(t)]}{\sin \vartheta} \right] \lambda^{(2)}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ f(t) &= 6 \left( \frac{t}{T} \right)^5 - 15 \left( \frac{t}{T} \right)^4 + 10 \left( \frac{t}{T} \right)^3, \end{aligned}$$

где  $\vartheta = \arccos(\lambda^{(1)} \cdot \lambda^{(2)})$ ,  $\lambda^{(1)} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\lambda^{(2)}$  — кватернион, определяемый положением КА в конце корректирующего маневра,  $T$  — время маневра.

Используемый оригинальный метод интерполяции является обобщением известного метода сферической линейной интерполяции кватернионов [12]. Он позволяет выполнить моделирование корректирующего движения КА в его плавном движении по кратчайшей траектории в конфигурационном пространстве на группе вращений  $SO(3)$ , совпадающей с дугой большого круга единичной гиперсферы  $S^3$ . Для этого находится функциональная матрица поворота [13]:

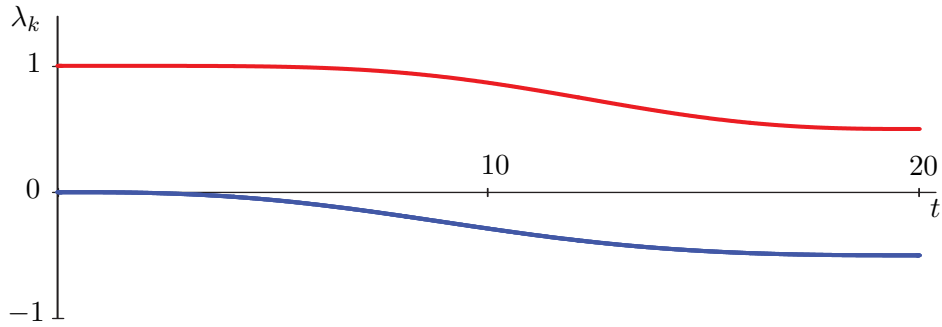
$$Q(t) = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda_2(t)^2 - 2\lambda_3(t)^2 & -2\lambda_0(t)\lambda_3(t) + 2\lambda_1(t)\lambda_2(t) & 2\lambda_0(t)\lambda_2(t) + 2\lambda_1(t)\lambda_3(t) \\ 2\lambda_0(t)\lambda_3(t) + 2\lambda_1(t)\lambda_2(t) & 1 - 2\lambda_1(t)^2 - 2\lambda_3(t)^2 & -2\lambda_0(t)\lambda_1(t) + 2\lambda_3(t)\lambda_2(t) \\ -2\lambda_0(t)\lambda_2(t) + 2\lambda_1(t)\lambda_3(t) & 2\lambda_0(t)\lambda_1(t) + 2\lambda_3(t)\lambda_2(t) & 1 - 2\lambda_2(t)^2 - 2\lambda_1(t)^2 \end{pmatrix};$$

движение каждой точки вращающегося КА в неподвижных осях задается с помощью следующего матричного алгоритма:

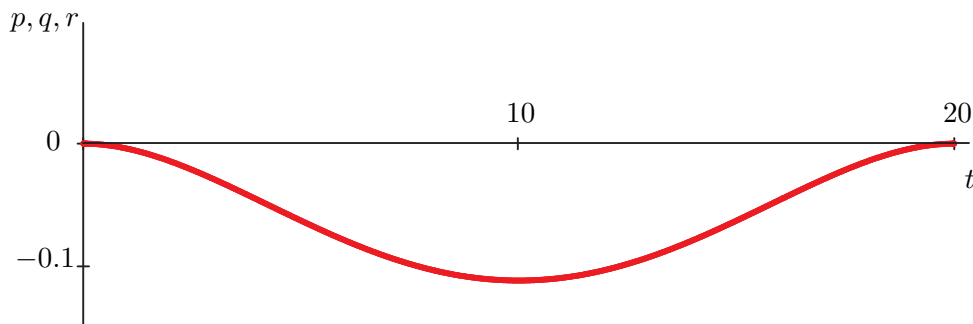
$$r(t) = Q(t)r(t_0).$$

Оптимальное движение КА осуществляется за счет возникновения управляющих моментов от работающих двигателей-маховиков. По известным кинематическим соотношениям [13, 14]

$$\begin{aligned} p(t) &= 2 \left[ \lambda_0(t) \frac{d\lambda_1}{dt} - \lambda_1(t) \frac{d\lambda_0}{dt} + \lambda_3(t) \frac{d\lambda_2}{dt} - \lambda_2(t) \frac{d\lambda_3}{dt} \right], \\ q(t) &= 2 \left[ \lambda_0(t) \frac{d\lambda_2}{dt} - \lambda_2(t) \frac{d\lambda_0}{dt} + \lambda_1(t) \frac{d\lambda_3}{dt} - \lambda_3(t) \frac{d\lambda_1}{dt} \right], \\ r(t) &= 2 \left[ \lambda_0(t) \frac{d\lambda_3}{dt} - \lambda_3(t) \frac{d\lambda_0}{dt} + \lambda_2(t) \frac{d\lambda_1}{dt} - \lambda_1(t) \frac{d\lambda_2}{dt} \right] \end{aligned} \quad (2)$$



**Рис. 2.** Графики изменения координат кватерниона положения КА  $\lambda_0(t)$  (красная линия),  $\lambda_1(t) \equiv \lambda_2(t) \equiv \lambda_3(t)$  (синяя линия)



**Рис. 3.** Графики изменения угловых скоростей КА ( $p(t) \equiv q(t) \equiv r(t)$ )

и уравнениям (1) находятся требуемые законы изменения угловых скоростей  $p(t)$ ,  $q(t)$  и  $r(t)$ .

Процедура оптимального управления зависит от того, какие двигатели-маховики обеспечивают требуемый маневр.

### § 3. Управление при неработающем резервном двигателе-маховике

В этом случае с использованием кинематических уравнений (2) и условия  $\omega_4(t) \equiv 0$  из уравнений (1) находим

$$\omega_1(t) = -\frac{A}{I_1}p(t), \quad \omega_2(t) = -\frac{B}{I_2}q(t), \quad \omega_3(t) = -\frac{C}{I_3}r(t).$$

При значениях параметров:  $A = 10$ ,  $B = 20$ ,  $C = 30$ ,  $I_1 = I_2 = I_3 = 1$ ,  $T = 20$ ,  $\lambda^{(2)} = [0.5 \quad -0.5 \quad -0.5 \quad -0.5]$  соответствующие графики изменений координат кватерниона положения КА, его угловых скоростей и угловых скоростей маховиков представлены на рис. 2–4.

### § 4. Управление при отказе первого двигателя-маховика и замене его резервным

В этом случае из кинематических уравнений (1) и (2) находим

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= -\frac{A}{I_1}p(t) + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{I_4}{I_1}\omega_4(t), \\ \omega_2(t) &= -\frac{B}{I_2}q(t) + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{I_4}{I_2}\omega_4(t), \\ \omega_3(t) &= -\frac{C}{I_3}r(t) + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{I_4}{I_3}\omega_4(t). \end{aligned}$$

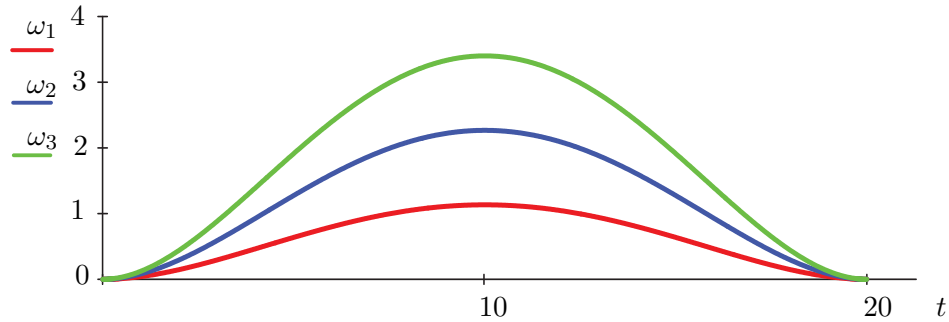


Рис. 4. Графики изменения угловых скоростей маховиков

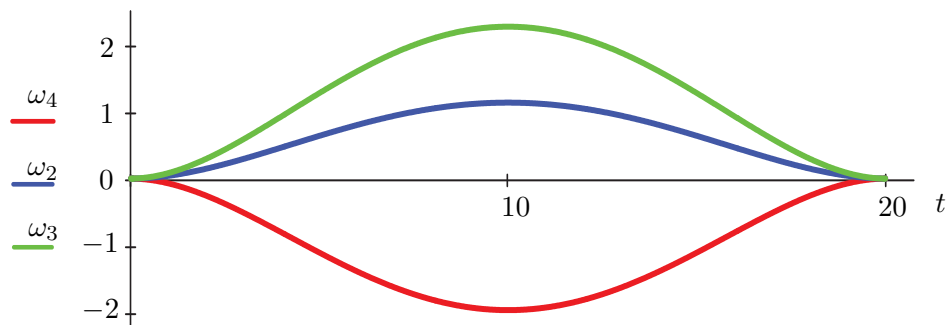


Рис. 5. Графики изменения угловых скоростей маховиков при отказе первого двигателя-маховика и замене его резервным

При тех же значениях параметров законы изменения координат кватерниона положения и угловых скоростей сохраняются. Графики изменения угловых скоростей маховиков представлены на рис. 5.

Результаты моделирования верифицированы путем создания анимации корректирующего движения КА при оптимальном управлении тремя основными двигателями-маховиками [15] и при оптимальном управлении с использованием резервного двигателя-маховика [16].

## Заключение

Выполнено моделирование плавного корректирующего движения КА по кратчайшей траектории в конфигурационном пространстве на группе вращений  $SO(3)$ , совпадающей с дугой большого круга единичной гиперсферы  $S^3$ . Приведены примеры корректирующего движения, при котором КА имеет нулевые скорости и ускорения в начале и конце маневра. Предложенный формализм может быть распространен на управление движением КА при отличной от нуля начальной угловой скорости, а также в орбитальной системе координат.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Севастьянов Н.Н. Концепция построения системы ориентации и управления движением спутника связи «Ямал». Штатная схема функционирования // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 2 (22). С. 85–96. <http://mi.mathnet.ru/rus/vtgu/y2013/i2/p85>
2. Бранец В.Н., Севастьянов Н.Н. Система управления спутника связи «Ямал-100» // Интегрированные навигационные системы: сб. статей VII Санкт-Петербургской Междунар. конф. Санкт-Петербург, 2000. С. 7–11. <http://www.elektropribor.spb.ru/cnf/icins00/rrefs.html>
3. Семенов Ю.П., Севастьянов Н.Н., Бранец В.Н. Российский спутник связи нового поколения «Ямал» // Ракетно-космическая техника: сб. статей РКК «Энергия» им. С. П. Королева (Расчет,

- проектирование, конструирование и испытания космических систем). Королев, 2002. Серия XII. Вып. 1–2. С. 5–6.
4. Севастьянов Н.Н., Бранец В.Н., Котов О.С., Орловский И.В., Платонов В.Н., Черток М.Б. Бортовой комплекс управления спутника связи «Ямал» // Ракетно-космическая техника: сб. статей РКК «Энергия» им. С. П. Королева (Расчет, проектирование, конструирование и испытания космических систем). Королев, 2002. Серия XII. Вып. 1–2. С. 7–15.
  5. Кулик А.С., Фирсов С.Н., Таран А.Н. Использование минимально избыточного блока двигателей-маховиков для угловой ориентации космического аппарата // Авиационно-космическая техника и технология. 2009. № 6 (63). С. 42–47.  
<https://www.khai.edu/csp/nauchportal/Arhiv/AKTT/2009/AKTT609/Kulik.pdf>
  6. Давыдов А.А., Игнатов А.И., Сазонов В.В. Анализ динамических возможностей системы управления малыми космическими аппаратами, построенными на базе двигателей-маховиков // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2005. 047. <http://mi.mathnet.ru/rus/ipmp/y2005/p47>
  7. Килин А.А., Ветчанин Е.В. Управление движением твердого тела в жидкости с помощью двух подвижных масс // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 4. С. 633–645. DOI: [10.20537/nd1504001](https://doi.org/10.20537/nd1504001)
  8. Борисов А.В., Мамаев И.С., Килин А.А., Калинин А.А., Караваев Ю.Л., Клековкин А.В., Ветчанин Е.В. Безвинтовой подводный робот. Заявка на полезную модель 2016144812, 15.11.2016.
  9. Ветчанин Е.В., Тененев В.А., Килин А.А. Оптимальное управление движением в идеальной жидкости тела с винтовой симметрией с внутренними роторами // Компьютерные исследования и моделирование. 2017. Т. 9. № 5. С. 741–759. DOI: [10.20537/2076-7633-2017-9-5-741-759](https://doi.org/10.20537/2076-7633-2017-9-5-741-759)
  10. Борисов А.В., Ветчанин Е.В., Килин А.А. Управление движением трехосного эллипсоида в жидкости с помощью роторов // Математические заметки. 2017. Т. 102. Вып. 4. С. 503–513. DOI: [10.4213/mzml11399](https://doi.org/10.4213/mzml11399)
  11. Борисов А.В., Мамаев И.С., Килин А.А., Караваев Ю.Л. Сферические роботы: механика и управление // Нелинейная динамика машин: сб. трудов IV Междун. школы-конф. молодых ученых. Москва, 2017. С. 477–482. [http://school.dyvis.ru/download/Proceedings\\_SchoolNDM2017.pdf](http://school.dyvis.ru/download/Proceedings_SchoolNDM2017.pdf)
  12. Shoemake K. Animating rotation with quaternion curves // Proceedings of the 12th annual conference on Computer graphics and interactive techniques — SIGGRAPH '85. New York, USA, 1985. P. 245–254. DOI: [10.1145/325334.325242](https://doi.org/10.1145/325334.325242)
  13. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 384 с.
  14. Голубев Ю.Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2013. 039. <http://mi.mathnet.ru/rus/ipmp/y2013/p39>
  15. Математическое моделирование в УрФУ. Управление ориентацией космического аппарата тремя основными двигателями-маховиками. <https://www.youtube.com/watch?v=uCgJuy005Lo>
  16. Математическое моделирование в УрФУ. Управление ориентацией космического аппарата с использованием резервного двигателя маховика. <https://www.youtube.com/watch?v=ugNsZfojclI>

Поступила в редакцию 15.05.2018

Митюшов Евгений Александрович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теоретической механики, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.  
E-mail: [mityushov-e@mail.ru](mailto:mityushov-e@mail.ru)

Мисюра Наталья Евгеньевна, старший преподаватель, кафедра теоретической механики, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.  
E-mail: [n\\_misura@mail.ru](mailto:n_misura@mail.ru)

Берестова Светлана Александровна, д. ф.-м. н., заведующая кафедрой теоретической механики, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.  
E-mail: [s.a.berestova@urfu.ru](mailto:s.a.berestova@urfu.ru)

*E. A. Mityushov, N. E. Misyura, S. A. Berestova*

**Optimal stabilization of spacecraft in an inertial coordinate system based on a strapdown inertial navigation system**

**Citation:** *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 252–259 (in Russian).

*Keywords:* spacecraft, strapdown inertial navigation systems, control moments, smooth motion.

MSC2010: 70Q05, 70M20

DOI: [10.20537/vm180211](https://doi.org/10.20537/vm180211)

We consider the optimal control problem for spacecraft motion during correction of its position in an inertial coordinate system by means of control torques. Control torques arise from the acceleration of inertial flywheels of a strapdown inertial navigation system. We investigate optimal control, which ensures a smooth change in the spacecraft orientation. This smooth corrective motion is described as the motion along the shortest path in the configuration space of a special orthogonal group  $SO(3)$ . The shortest path coincides with the large circle arc of the unit hypersphere  $S^3$ . We also consider a control algorithm using the original procedure of nonlinear spherical interpolation of quaternions. Four inertial flywheels are used as the main executive bodies for orientation of the dynamic control loop of the strapdown inertial navigation system when solving the optimal control problem. Three flywheels are oriented along the axes of the spacecraft. The fourth flywheel is oriented along the bisector. The simulation results are presented. We consider examples for corrective motion in which the spacecraft has zero velocity and acceleration at the beginning and end of the maneuver. We give an animation of the corrective movement of the spacecraft. The proposed formalism can be extended to control the spacecraft motion at an initial angular velocity different from zero, as well as in the orbital coordinate system.

#### REFERENCES

1. Sevast'yanov N.N. The concept of building the system of orientation and motion control of the Yamal communication satellite. The nominal operation scheme, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2013, no. 2 (22), pp. 85–96 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/vtgu/y2013/i2/p85>
2. Branets V., Sevast'yanov N. Control system of Yamal-100 communication satellite, *Integrirovannyye navigatsionnyye sistemy: sbornik statei VII Sankt-Peterburg. mezhdunar. konf.* (Integrated navigation system: proceedings of VII int. conf.), Saint Petersburg, 2000, pp. 7–11 (in Russian).
3. Semenov Yu.P., Sevast'yanov N.N., Branets V.N. New generation of the Russian Yamal communication satellite, *Raketno-kosmicheskaya tekhnika. Raschet, proektirovanie, konstruirovaniye i ispytaniya kosmicheskikh sistem: sbornik statei raketno-kosmicheskoi korporatsii «Energiya» im. S.P. Koroleva* (Rocket and space technology. Calculation, design, construction and testing of space systems: proceedings of S.P. Korolev rocket and space corporation «Energiya»), Korolev, 2002, vol. XII, issue 1–2, pp. 5–6 (in Russian).
4. Sevast'yanov N.N., Branets V.N., Kotov O.S., Orlovskii I.V., Platonov V.N., Chertok M.B. The onboard control complex of Yamal communication satellite, *Raketno-kosmicheskaya tekhnika. Raschet, proektirovanie, konstruirovaniye i ispytaniya kosmicheskikh sistem: sbornik statei raketno-kosmicheskoi korporatsii «Energiya» im. S.P. Koroleva* (Rocket and space technology. Calculation, design, construction and testing of space systems: proceedings of S.P. Korolev rocket and space corporation «Energiya»), Korolev, 2002, vol. XII, issue 1–2, pp. 7–15 (in Russian).
5. Kulik A.S., Firsov S.N., Taran A.N. Usage of minimally redundant reaction wheel block for spacecraft angular orientation, *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya*, 2009, no. 6 (63), pp. 42–47 (in Russian). <https://www.khai.edu/csp/nauchportal/Arhiv/AKTT/2009/AKTT609/Kulik.pdf>
6. Davydov A.A., Ignatov A.I., Sazonov V.V. The analysis of dynamic capabilities of the control systems by the spacecraft built on the basis of the reaction wheels, *Keldysh Institute preprints*, 2005, 047. <http://mi.mathnet.ru/eng/ipmp/y2005/p47>
7. Kilin A.A., Vetchanin E.V. The control of the motion through an ideal fluid of a rigid body by means of two moving masses, *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 4, pp. 633–645 (in Russian). DOI: [10.20537/nd1504001](https://doi.org/10.20537/nd1504001)
8. Borisov A.V., Mamaev I.S., Kilin A.A., Kalinkin A.A., Karavaev Yu.L., Klekovkin A.V., Vetchanin E.V. Screwless underwater robot. The application for a utility model 2016144812, 15.11.2016.
9. Vetchanin E.V., Tenenev V.A., Kilin A.A. Optimal control of the motion in an ideal fluid of a screw-shaped body with internal rotors, *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 5, pp. 741–759. DOI: [10.20537/2076-7633-2017-9-5-741-759](https://doi.org/10.20537/2076-7633-2017-9-5-741-759)
10. Borisov A.V., Vetchanin E.V., Kilin A.A. Control of the motion of a triaxial ellipsoid in a fluid using rotors, *Mathematical Notes*, 2017, vol. 102, issue 3–4, pp. 455–464. DOI: [10.1134/S0001434617090176](https://doi.org/10.1134/S0001434617090176)

11. Borisov A.V., Mamaev I.S., Kilin A.A., Karavaev Yu.L. Spherical robots: mechanics and control, *Nonlinear Dynamics of Machines: Proc. of the 4-th Intern. School-Conf. for Young Scientists*, Moscow, 2017, pp. 477–482 (in Russian). [http://school.dyvis.ru/download/Proceedings\\_SchoolNDM2017.pdf](http://school.dyvis.ru/download/Proceedings_SchoolNDM2017.pdf)
12. Shoemake K. Animating rotation with quaternion curves, *Proceedings of the 12th annual conference on Computer graphics and interactive techniques — SIGGRAPH '85*, New York, USA, 1985, pp. 245–254. DOI: [10.1145/325334.325242](https://doi.org/10.1145/325334.325242)
13. Borisov A.V., Mamaev I.S. *Dinamika tverdogo tela* (Rigid body dynamics), Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2001, 384 p.
14. Golubev Yu.F. Quaternion algebra in rigid body kinematics, *Keldysh Institute preprints*, 2013, 039. <http://mi.mathnet.ru/eng/ipmp/y2013/p39>
15. Mathematical modeling at Ural Federal University. Control of the spacecraft orientation by three main engines-flywheels. <https://www.youtube.com/watch?v=uCgJuy005Lo>
16. Mathematical modeling at Ural Federal University. Control of the spacecraft orientation with the use of a backup flywheel engine. <https://www.youtube.com/watch?v=ugNsZfojclI>

Received 15.05.2018

Mityushov Evgenii Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Theoretical Mechanics, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.

E-mail: [mityushov-e@mail.ru](mailto:mityushov-e@mail.ru)

Misyura Natal'ya Evgen'evna, Senior Lecturer, Department of Theoretical Mechanics, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.

E-mail: [n\\_misura@mail.ru](mailto:n_misura@mail.ru)

Berestova Svetlana Aleksandrovna, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Theoretical Mechanics, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.

E-mail: [s.a.berestova@urfu.ru](mailto:s.a.berestova@urfu.ru)