УДК 517.988.8

© *В. М. Деундяк, А. В. Лукин*

ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ С АНИЗОТРОПНО ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ КОМПАКТНОГО ТИПА

Рассматривается банахова алгебра $\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p}$ операторов с анизотропно однородными ядрами компактного типа в L_p пространстве на группе $\mathbb{R}^n$. Интерес к операторам из $\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p}$ продиктован их естественной связью с операторами меллиновской свертки, многомерной мультипликативной свертки на группе $\mathbb{R}^n$, а также применимостью при решении задач со сложными особенностями. Описана связь этой алгебры с алгеброй операторов многомерной свертки с компактными коэффициентами посредством изоморфизма подобия. Для операторов из $\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p}$ получен критерий применимости проекционного метода решения операторных уравнений в терминах обратимости некоторого семейства операторов в конусах. Критерий применимости доказывается путем редукции исходного уравнения к уравнению для операторов свертки с компактными коэффициентами. Обоснование применимости проекционного метода основано на существенном использовании новой операторной версии локального принципа А. В. Козака в теории проекционных методов, который в свою очередь является модификацией известного локального метода И. Б. Симоненко в теории фредгольмовости. В работе приводятся иллюстративные примеры уравнений для операторов с анизотропно однородными ядрами компактного типа, в которых для рассматриваемых операторов вычисляется символ, а к уравнениям применяется разработанный проекционный метод.

Ключевые слова: интегральный оператор, однородные ядра, оператор свертки, проекционный метод, компактные коэффициенты.

DOI: 10.20537/vm190202

Введение

Многомерные операторы с однородными ядрами изучались в работах Л. Г. Михайлова, Н. К. Карапетянца, С. Г. Самко, О. Г. Авсянкина и других авторов (см., например, [1–4] и цитированную там литературу). В [5, 6] рассмотрены более широкие классы операторов с однородными и анизотропно однородными ядрами компактного типа. Интерес к операторам с однородными ядрами продиктован, в частности, их естественной связью с операторами меллиновской свертки (см. [7, с. 247]) и многомерной мультипликативной свертки [8, 9], а также применимостью при решении задач со сложными особенностями [10].

Для операторов с $SO(n)$-инвариантными ядрами применимость проекционного метода изучалась О. Г. Авсянкиным [2–4]. В работах А. В. Козака [11, 12] на основе модификации локального метода И. Б. Симоненко [13] разработан общий проекционный метод решения уравнений свертки в пространстве m-мерных вектор-функций $L_p^m(\mathbb{R}^n)$, где $m, n \geqslant 1$. В [14] этот метод обобщен на случай операторов свертки с компактными операторными коэффициентами.

В настоящей работе результат [14] использован для получения критерия применимости проекционного метода решения уравнений для многомерных операторов с анизотропно однородными ядрами компактного типа. Отметим, что данная работа усиливает результаты [15], где получено лишь достаточное условие сходимости приближенного метода решения уравнений для многомерных операторов с анизотропно однородными ядрами компактного типа.

В параграфе 1 настоящей работы описаны операторы с анизотропно однородными ядрами компактного типа. В параграфе 2 формулируется и доказывается основной результат данной работы о проекционном методе. В параграфе 3 приведены примеры применения построенного проекционного метода к решению уравнений для операторов с анизотропно однородными ядрами компактного типа.

§ 1. Операторы с анизотропно однородными ядрами компактного типа

Введем обозначения, которые понадобятся в дальнейшем. Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ — вещественное и комплексное n-мерные пространства, $n \geqslant 1$. Если $\mathfrak{X}$ — банахово пространство, то через $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ обозначим банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов в $\mathfrak{X}$, через $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ — идеал компактных операторов в $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$, а через $I_{\mathfrak{X}}$ — тождественный оператор в $\mathfrak{X}$. Для произвольного изоморфизма $g\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ банаховых пространств равенство

$$\widehat{g}(A) = gAg^{-1}, \quad A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}), \tag{1}$$

задает изоморфизм подобия банаховых алгебр $\widehat{g}\colon \mathcal{L}(\mathfrak{X}) \to \mathcal{L}(\mathfrak{Y})$, причем $\widehat{g}(\mathcal{K}(\mathfrak{X})) = \mathcal{K}(\mathfrak{Y})$.

Пусть $1 \leqslant p < \infty$, w и u — весовые функции на снабженных мерами пространствах X и Y соответственно; $L_p^m(X; w)$, $m \geqslant 1$ — весовое банахово пространство измеримых комплекснозначных m-мерных вектор-функций, суммируемых на X с p-ой степенью, с обычной нормой; $L_p(X; w) = L_p^1(X; w)$; $L_p(X) = L_p(X; 1)$; $L_\infty(X)$ — пространство существенно ограниченных функций.

Через $L_p(X; w) \odot L_p(Y; u) \subset L_p(X \times Y; w \otimes u)$ будем обозначать алгебраическое тензорное произведение пространств $L_p(X; w)$ и $L_p(Y; u)$, состоящее из функций вида $\sum\limits_{i=1}^{l} \varphi_i \psi_i$, где $\varphi_i \in L_p(X; w)$, $\psi_i \in L_p(Y; u)$. Топологическое тензорное произведение $L_p(X; w) \otimes L_p(Y; u)$, являющееся замыканием $L_p(X; w) \odot L_p(Y; u)$, совпадает с $L_p(X \times Y; w \otimes u)$. Топологическое тензорное произведение $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ банаховых алгебр $\mathfrak{A} \subset \mathcal{L}(L_p(X; w))$ и $\mathfrak{B} \subset \mathcal{L}(L_p(Y; u))$, $1 < p < \infty$, определяется как замыкание множества операторов вида $\sum\limits_{i=1}^{l} A_i \otimes B_i$ ($A_i \in \mathfrak{A}$, $B_i \in \mathfrak{B}$) в $\mathcal{L}(L_p(X \times Y; w \otimes u))$. Пусть $\mathcal{U}^+$ — унитализация банаховой алгебры $\mathcal{U}$, $\mathcal{L}(n; \mathcal{U}) = \mathcal{L}(n; \mathbb{C}) \otimes \mathcal{U}$ — банахова алгебра $(n \times n)$-матриц над $\mathcal{U}$. Через $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$, обозначим мультииндекс размера k; $x^{\boldsymbol{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k} \in \mathbb{R}$, где $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$.

Пусть $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_k)$ — мультииндекс, соответствующий разбиению пространства $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k}$, S_{m-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^m$ с центром в нуле, $\mathbb{T}_{\mathbf{n-1}} = S_{n_1-1} \times \cdots \times S_{n_k-1}$. В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, рассмотрим интегральный оператор

$$(W_\varkappa f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varkappa(x, y) f(y)\, dy, \tag{2}$$

где $\varkappa$ удовлетворяет условию анизотропной однородности мультистепени $(-\mathbf{n})$:

$$\begin{gathered}\forall i \in \{1, \ldots, k\} \quad \forall x_{(i)}, y_{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i} \quad \forall \beta_i \in \mathbb{R}_+ : \\ \varkappa(\beta_1 x_{(1)}, \ldots, \beta_k x_{(k)}, \beta_1 y_{(1)}, \ldots, \beta_k y_{(k)}) = \beta_1^{-n_1} \ldots \beta_k^{-n_k} \varkappa(x_{(1)}, \ldots, x_{(k)}, y_{(1)}, \ldots, y_{(k)}).\end{gathered}$$

Ограниченность этого оператора доказана в [6]. Перейдем к полисферическим координатам. Пусть $\mathbb{R}^k_+ = \mathbb{R}_+ \times \cdots \times \mathbb{R}_+$ — положительный конус в $\mathbb{R}^k$ и $(r,\sigma) \in \mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}$ — полисферические координаты точки $x = (x_{(1)}, \ldots, x_{(k)}) \in \mathbb{R}^{n_1} \setminus \{0\} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k} \setminus \{0\}$ (см. [6, с. 6]). Переход к полисферическим координатам индуцирует изоморфизм банаховых пространств

$$\mathbf{q_n}\colon\ L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}; r^{\mathbf{n-1}} \otimes 1).$$

Рассмотрим измеримую функцию l, определенную на $(\mathbb{R}^k_+)^2 \times \mathbb{T}^2_{\mathbf{n-1}}$ и анизотропно однородную мультистепени $(-\mathbf{1})$ по первым $2k$-аргументам:

$$\forall i \in \{1,\ldots,k\}\colon\quad \forall x_i, y_i, \mu_i \in \mathbb{R}_+\colon l(\mu_1 x_1, \ldots, \mu_k x_k, \mu_1 y_1, \ldots, \mu_k y_k, \sigma, \theta) = \\ = \mu_1^{-1} \ldots \mu_k^{-1} l(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k, \sigma, \theta).$$

Отнесем ее к классу $\mathcal{M}'_{\mathbf{n};p}$, если для почти всех $\sigma (\in \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}})$

$$l_{[1]}(\sigma) = \int_{\mathbb{R}^k_+} \int_{\mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}} |l(r,e,\vartheta,\sigma)| r^{\frac{\mathbf{n}}{p}-\mathbf{1}}\, dr\, d\vartheta < \infty,$$

$$l_{[2]}(\sigma) = \int_{\mathbb{R}^k_+} \int_{\mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}} |l(e,r,\sigma,\vartheta)| r^{-\frac{\mathbf{n}}{p}}\, dr\, d\vartheta < \infty,$$

где $e = (1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^k_+$, и $l_{[1]}, l_{[2]} \in L_\infty(\mathbb{T}_{\mathbf{n-1}})$. В [6] показано, что формула

$$(L_l f)(r,\sigma) = \int_{\mathbb{R}^k_+} \int_{\mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}} l(r,\rho,\sigma,\vartheta) f(\rho,\vartheta)\, d\rho\, d\vartheta, \quad l \in \mathcal{M}'_{\mathbf{n};p}, \tag{3}$$

задает оператор L_l из $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}; r^{\mathbf{n-1}} \otimes 1))$. Будем говорить, что измеримая функция α, определенная на $(\mathbb{R}^k_+)^2$ и удовлетворяющая условию анизотропной однородности мультистепени $(-\mathbf{1})$, принадлежит классу $\mathcal{M}_{(\mathbf{n};p)}$, если

$$\int_{\mathbb{R}^k_+} |\alpha(\rho,e)| \rho^{-\frac{\mathbf{n}}{p}-\mathbf{1}}\, d\rho < \infty, \quad e = (1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^k_+.$$

Пусть $\mathfrak{C}'_{\mathbf{n};p}$ — замыкание $\mathcal{M}_{(\mathbf{n};p)} \odot L_\infty(\mathbb{T}^2_{\mathbf{n-1}})$ в $\mathcal{M}'_{\mathbf{n};p}$. Ядра из $\mathfrak{C}'_{\mathbf{n};p}$ называются *ядрами компактного типа* [5,6]. Замкнутую подалгебру операторов из $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}; r^{\mathbf{n-1}} \otimes 1))$, порожденную операторами (3) с ядрами из $\mathfrak{C}'_{\mathbf{n};p}$, обозначим через $\mathfrak{V}'_{\mathbf{n};p}$. Пусть $\mathfrak{C}_{\mathbf{n};p}$ — банахово пространство функций на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, полученное из $\mathfrak{C}'_{\mathbf{n};p}$ переходом к декартовой системе координат посредством изометрического изоморфизма $\widetilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{n}}\colon \mathfrak{C}'_{\mathbf{n};p} \to \mathfrak{C}_{\mathbf{n};p}$, где

$$(\widetilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{n}}\varphi)(x,y) = \varphi\Big(|x_{(1)}|, \ldots, |x_{(k)}|, |y_{(1)}|, \ldots, |y_{(k)}|, \frac{x_{(1)}}{|x_{(1)}|}, \ldots, \frac{x_{(k)}}{|x_{(k)}|}, \\ \frac{y_{(1)}}{|y_{(1)}|}, \ldots, \frac{y_{(k)}}{|y_{(k)}|}\Big) \prod_{j=1}^k \frac{1}{|y_{(j)}|^{n_j-1}}, \quad x_{(i)}, y_{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad i \in \{1,\ldots,k\}. \tag{4}$$

Замкнутую подалгебру операторов из $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n))$, порожденную операторами (2) с ядрами из $\mathfrak{C}_{\mathbf{n};p}$, обозначим через $\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p}$.

Зафиксируем в $L_\infty(\mathbb{T}^2_{\mathbf{n-1}})$ базис и через G_m обозначим подпространство $L_\infty(\mathbb{T}^2_{\mathbf{n-1}})$, порожденное первыми m функциями из этого базиса. Пусть $\mathfrak{C}'_{\mathbf{n};p;m}$ — замыкание $\mathcal{M}_{(\mathbf{n};p)} \odot G_m$ в $\mathcal{M}'_{\mathbf{n};p}$. Ядра из $\mathfrak{C}'_{\mathbf{n};p;m}$ называются *ядрами конечномерного типа*. Замкнутую подалгебру операторов из $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}; r^{\mathbf{n-1}} \otimes 1))$, порожденную операторами (3) с ядрами из $\mathfrak{C}'_{\mathbf{n};p;m}$, обозначим через $\mathfrak{V}'_{\mathbf{n};p;m}$. Пусть $\mathfrak{C}_{\mathbf{n};p;m}$ — класс функций на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, полученный из $\mathfrak{C}'_{\mathbf{n};p;m}$ переходом к декартовой системе координат (см. (4)). Замкнутую подалгебру операторов из $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n))$, порожденную операторами (2) с ядрами из $\mathfrak{C}_{\mathbf{n};p;m}$, обозначим через $\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p;m}$.

Для исследования таких операторов ключевым моментом является сверточное представление алгебры $\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p}$. Через $\mathcal{V}_p = \mathcal{V}(L_p(\mathbb{R}^k))$ обозначим замкнутую подалгебру $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^k))$, порожденную операторами свертки

$$(C_a f)(x) = \int_{\mathbb{R}^k} a(x-y) f(y)\, dy, \quad a \in L_1(\mathbb{R}^k).$$

Сопоставление оператору свертки C_a преобразования Фурье его ядра a задает непрерывный мономорфизм $\theta_p \colon \mathcal{V}_p \to C_0(\mathbb{R}^k)$, где $C_0(\mathbb{R}^k)$ — пространство непрерывных на $\mathbb{R}^k$ комплекснозначных функций, обращающихся в нуль в точке ∞ при одноточечной компактификации пространства $\mathbb{R}^k$ бесконечно удаленной точкой. Введем на $C_{0,p}(\mathbb{R}^k) = \theta_p(\mathcal{V}_p)$ топологию пространства $L_p(\mathbb{R}^k)$-мультипликаторов Фурье, при этом алгебра $C_{0,p}(\mathbb{R}^k)$ *непрерывно вложена и наполнена в* $C_0(\mathbb{R}^k)$ [8]. Пусть $\mathcal{K}_{p;\mathbf{n}} = \mathcal{K}(L_p(\mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}))$, $\mathcal{V}_p^{\mathcal{K}_{p;\mathbf{n}}} = \mathcal{V}_p \otimes \mathcal{K}_{p;\mathbf{n}}$, $C_{0,p}(\mathbb{R}^k; \mathcal{K}_{p;\mathbf{n}})$ — операторный аналог банаховой алгебры $C_{0,p}(\mathbb{R}^k)$, $\Theta_p \colon (\mathcal{V}_p^{\mathcal{K}_{p;\mathbf{n}}})^+ \to$ $\to (C_{0,p}(\mathbb{R}^k; \mathcal{K}_{p;\mathbf{n}}))^+$ — унитализованный изоморфизм ограничения $\theta_p \otimes I$ на образ [6].

В [6] вводится естественный изометрический изоморфизм

$$\mathbf{u_n} \colon L_p(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}; r^{\mathbf{n-1}} \otimes 1) \to L_p(\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}),$$

действующий по правилу

$$(\mathbf{u_n}\varphi)(x_1, \ldots, x_k, \sigma_{(1)}, \ldots, \sigma_{(k)}) = e^{\frac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i} \varphi(e^{x_1}, \ldots, e^{x_k}, \sigma_{(1)}, \ldots, \sigma_{(k)}),$$
$$(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k, \quad \sigma_{(i)} \in S_{n_i - 1}, \quad i \in \{1, \ldots, k\}.$$

При помощи $\mathbf{q_n}$ и $\mathbf{u_n}$ определим изоморфизм

$$\mathbf{v_n} = \mathbf{u_n}\mathbf{q_n} \colon L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}).$$

Конструкция (1) позволяет определить изоморфизмы подобия операторных алгебр:

$$\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}} \colon \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}; r^{\mathbf{n-1}} \otimes 1)) \to \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}})),$$
$$\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}} \colon \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n)) \to \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}})).$$

Ограничения $\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}$ и $\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}$ на $(\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p})^+$ и $(\mathfrak{V}'_{\mathbf{n};p})^+$ задают изоморфизмы подобия $(\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p})^+$ и $(\mathfrak{V}'_{\mathbf{n};p})^+$ на $(\mathcal{V}_p^{\mathcal{K}_{p;\mathbf{n}}})^+$. В [6, с. 12, 15] содержится конструкция символа-изоморфизма

$$\sigma_{\mathbf{n};p} = \Theta_p\, \widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}|_{(\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p})^+} : \ (\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p})^+ \to (C_{0,p}(\mathbb{R}^k; \mathcal{K}_{p;\mathbf{n}}))^+, \tag{5}$$

при этом доказывается, что *обратимость оператора из* $(\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p})^+$ *эквивалентна обратимости его символа.*

§ 2. Проекционный метод

Пусть X — пространство с мерой, $\{P_m\}_{m\geqslant 1} \subset \mathcal{L}(L_p(X))$ — последовательность проекторов, сильно сходящаяся к единичному оператору $I_{L_p(X)}$, и $A \in \mathcal{L}(L_p(X))$. Рассмотрим уравнение

$$Af = g. \tag{6}$$

Проекционным методом называется приближенный метод решения уравнения (6), состоящий в отыскании решения $f_m \in P_m L_p(X)$, $m \in \mathbb{N}$, уравнения

$$P_m A P_m f_m = P_m g$$

(см. [16, с. 90]). Если, начиная с некоторого номера m_0, для любого $g \in L_p(X)$ это уравнение имеет единственное решение f_m, и при m, стремящемся к бесконечности, последовательность $\{f_m\}_{m \geqslant m_0}$ стремится к решению уравнения (6), то говорят, что к оператору A *применим проекционный метод* по системе проекторов $\{P_m\}_{m \geqslant 1}$.

Пусть M — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^k$, *точка* 0 *принадлежит внутренности* $\operatorname{int} M$ *множества* M. Предположим, что *для каждой точки x границы ∂M множества M существует конус K_x с вершиной в x, окрестности u, v точки x и C^1-диффеоморфизм $\varphi\colon u \to v$, для которых $\varphi(x) = x$, $\varphi'(x) = I$ и $\varphi(M \cap u) = K_x \cap v$.* В статье [12] в качестве примеров таких множеств приводятся замкнутое множество с гладкой границей и образ замкнутого многогранника M при C^1-диффеоморфизме.

Определим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^k)$ проектор P_M:

$$(P_M f)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in M, \\ 0, & \text{если } x \notin M. \end{cases} \tag{7}$$

Зафиксируем в $L_p(\mathbb{T}_{\mathbf{n-1}})$ базис из тригонометрических полиномов $\{e_i\}_{i \geqslant 1}$. Определим проектор $Q^m \in \mathcal{L}(L_p(\mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}))$ на m-мерное пространство следующим образом:

$$(Q^m f)(x) = Q^m \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i(x) \right) = \sum_{i=1}^{m} f_i e_i(x), \quad f_i \in \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Определим проекторы

$$H_{K_x} = \widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}^{-1}(P_{K_x} \otimes I), \quad H_{mM} = \widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}^{-1}(P_{mM} \otimes Q^m). \tag{9}$$

Зафиксируем $A \in (\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p})^+$ и $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Основным результатом работы является следующий критерий применимости проекционного метода для оператора A из уравнения (6).

Теорема 1. *К оператору $A \in (\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p})^+$ применим проекционный метод по системе проекторов $\{H_{mM}\}_{m \geqslant 1}$ тогда и только тогда, когда оператор A обратим и для всех $x \in \partial M$ обратимы операторы $H_{K_x} A H_{K_x} \in \mathcal{L}(H_{K_x} L_p(\mathbb{R}^n))$.*

Доказательство теоремы 1 проведем путем редукции к операторам свертки с компактными коэффициентами на основе следующего утверждения из работы [14, с. 57].

Теорема 2. *Если $0 \in \operatorname{int} M$, то к оператору $B \in (\mathcal{V}_p^{\mathcal{K}_{p;\mathbf{n}}})^+$ применим проекционный метод по системе проекторов $\{P_{mM} \otimes Q^m\}_{m \geqslant 1}$ тогда и только тогда, когда оператор B обратим и для всех $x \in \partial M$ обратимы операторы $(P_{K_x} \otimes I) B (P_{K_x} \otimes I) \in \mathcal{L}((P_{K_x} \otimes I) L_p(\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}))$.*

Отметим, что в случае операторов многомерной матричной свертки эта теорема была получена А. В. Козаком [12] на основе модификации локального метода И. Б. Симоненко [13].

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Так как последовательность $\{P_{mM} \otimes Q^m\}_{m \geqslant 1}$ сильно сходится к $I_{L_p(\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}})}$, то и последовательность $\{H_{mM}\}_{m \geqslant 1}$ сильно сходится к $I_{L_p(\mathbb{R}^n)}$. Поскольку ограничение $\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}$ на $(\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p})^+$ задает изоморфизм подобия $(\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p})^+$ на $(\mathcal{V}_p^{\mathcal{K}_{p;\mathbf{n}}})^+$, то

$$B = \widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(A) \in (\mathcal{V}_p^{\mathcal{K}_{p;\mathbf{n}}})^+. \tag{10}$$

Применяя критерий [16, с. 91], получаем, что к оператору B применим проекционный метод по системе проекторов $\{P_{mM} \otimes Q^m\}_{m\geqslant 1}$ тогда и только тогда, когда оператор B обратим, операторы

$$(P_{mM}\otimes Q^m)B(P_{mM}\otimes Q^m)\colon (P_{mM} \otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}) \to (P_{mM} \otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}_{\mathbf{n-1}}) \tag{11}$$

обратимы для всех m, начиная с некоторого номера m_0, и выполняется условие

$$\sup_{m\geqslant m_0} \|((P_{mM} \otimes Q^m)B(P_{mM} \otimes Q^m))^{-1}\| < \infty. \tag{12}$$

Согласно этому же критерию, к оператору A применим проекционный метод по системе проекторов $\{H_{mM}\}_{m\geqslant 1}$ тогда и только тогда, когда оператор A обратим, операторы

$$H_{mM}AH_{mM}\colon\ H_{mM}L_p(\mathbb{R}^n) \to H_{mM}L_p(\mathbb{R}^n) \tag{13}$$

обратимы для всех m, начиная с некоторого номера m_0, и выполняется условие

$$\sup_{m\geqslant m_0} \|(H_{mM}AH_{mM})^{-1}\| < \infty. \tag{14}$$

Так как $\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}$ — изоморфизм подобия, то из равенств (9) и (10) следует, что условия (11) и (13) эквивалентны. Из равенств (9) и (10), а также равенства

$$(\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(C))^{-1} = \widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(C^{-1}), \quad C \in \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n)),$$

следует, что условия (12) и (14) эквивалентны, и операторы A и B обратимы (или нет) одновременно. Следовательно, к оператору A применим проекционный метод по системе проекторов $\{H_{mM}\}_{m\geqslant 1}$ тогда и только тогда, когда к оператору B применим проекционный метод по системе проекторов $\{P_{mM} \otimes Q^m\}_{m\geqslant 1}$.

Из последнего равенства, а также из (9) и (10) следует, что операторы $H_{K_x}AH_{K_x} \in \mathcal{L}(H_{K_x}L_p(\mathbb{R}^n))$ обратимы для произвольного $x \in \partial M$ тогда и только тогда, когда операторы $(P_{K_x}\otimes I)B(P_{K_x}\otimes I) \in (P_{K_x}\otimes I)L_p(\mathbb{R}^k\times\mathbb{T}_{\mathbf{n-1}})$ обратимы для того же значения x. Таким образом, из теоремы 2 вытекает справедливость доказываемого критерия. □

§ 3. Примеры

3.1. Проиллюстрируем применение теоремы 1 к решению уравнения

$$(I + W_\varkappa)f = g \tag{15}$$

в пространстве $L_p(\mathbb{R}^4)$, где g — известная функция из $L_p(\mathbb{R}^4)$, а оператор $W_\varkappa$ имеет вид (2). Предположим, что ядро $\varkappa \in \mathfrak{C}_{(2,2);p}$ оператора $W_\varkappa$ имеет вид

$$\varkappa(x_{(1)}, x_{(2)}, y_{(1)}, y_{(2)}) = \prod_{j=1}^{2}\left(\frac{1}{|y_{(j)}|^2}\left(\frac{|y_{(j)}|}{|x_{(j)}|}\right)^{\frac{2}{p}} e^{-\alpha_j \ln^2 \frac{|x_{(j)}|}{|y_{(j)}|}}\right)\beta\left(\frac{x_{(1)}}{|x_{(1)}|}, \frac{x_{(2)}}{|x_{(2)}|}, \frac{y_{(1)}}{|y_{(1)}|}, \frac{y_{(2)}}{|y_{(2)}|}\right)$$

(см. [6, с. 15]). Тогда

$$((I+W_{\varkappa})f)(x_{(1)},x_{(2)}) = f(x_{(1)},x_{(2)}) + \int_{\mathbb{R}^4} \prod_{j=1}^{2} \left(\frac{1}{|y_{(j)}|^2} \left(\frac{|y_{(j)}|}{|x_{(j)}|} \right)^{\frac{2}{p}} e^{-\alpha_j \ln^2 \frac{|x_{(j)}|}{|y_{(j)}|}} \right)$$

$$\beta\left(\frac{x_{(1)}}{|x_{(1)}|}, \frac{x_{(2)}}{|x_{(2)}|}, \frac{y_{(1)}}{|y_{(1)}|}, \frac{y_{(2)}}{|y_{(2)}|} \right) f(y_{(1)},y_{(2)})\, dy_{(1)}dy_{(2)}, \tag{16}$$

$$\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}_+, \quad \beta\in L_\infty(\mathbb{T}_{(1,1)}\times\mathbb{T}_{(1,1)}), \quad x_{(1)},x_{(2)},y_{(1)},y_{(2)}\in\mathbb{R}^2.$$

Пусть M — единичный круг в $\mathbb{R}^2$ с центром в нуле; K_x — полуплоскость, образованная касательной к M в точке $x\in\partial M$ и содержащая точку 0; $\{e_i\}_{i\geqslant 1}$ — фиксированный тригонометрический базис в $L_p(\mathbb{T}_{(1,1)})$; проекторы P_{mM}, $P_{K_x}\in\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^2))$, $Q^m\in\mathcal{L}(L_p(\mathbb{T}_{(1,1)}))$, H_{K_x} и H_{mM} определяются равенствами (7), (8) и (9). Чтобы к оператору (16) можно было применить проекционный метод, достаточно, чтобы он сам был обратим и для всех $x\in\partial M$ были обратимы операторы $H_{K_x}(I+W_{\varkappa})H_{K_x}\in\mathcal{L}(H_{K_x}L_p(\mathbb{R}^4))$. Отметим, что, используя локальный принцип и символическое исчисление для операторов свертки в конусах [8, с. 310], а также переход к операторам свертки с компактными коэффициентами (см. [6, с. 12]), в терминах обратимости символа можно выразить эффективно проверяемое необходимое и достаточное условие фредгольмовости операторов вида $H_{K_x}(I+W_{\varkappa})H_{K_x}\in\mathcal{L}(H_{K_x}L_p(\mathbb{R}^4))$, которое является необходимым условием обратимости.

Рассмотрим обратимый оператор $I+W_{\varkappa}$ и предположим, что *для всех* $x\in\partial M$ *обратимы операторы* $H_{K_x}(I+W_{\varkappa})H_{K_x}\in\mathcal{L}(H_{K_x}L_p(\mathbb{R}^4))$. Обратимость оператора $I+W_{\varkappa}$ эквивалентна обратимости его символа (см. (5)):

$$\sigma_{(2,2);p}(I+W_{\varkappa})(t_1,t_2)(\mu)(s_1,s_2) = \mu(s_1,s_2) +$$
$$+\frac{\pi}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} e^{-\frac{t_1^2}{4\alpha_1}} e^{-\frac{t_2^2}{4\alpha_2}} \int_{\mathbb{T}_{(1,1)}} \beta(s_1,s_2,\nu_1,\nu_2)\mu(\nu_1,\nu_2)\, d\nu_1 d\nu_2, \quad (t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2, \quad \mu\in L_p(\mathbb{T}_{(1,1)}).$$

Согласно теореме 1, к оператору $I+W_{\varkappa}$ применим проекционный метод по системе проекторов $\{H_{mM}\}_{m\geqslant 1}$, и решение уравнения (15) может быть найдено как предел последовательности решений f_m уравнений

$$H_{mM}(I+W_{\varkappa})H_{mM}f_m = H_{mM}g.$$

Вместо последнего уравнения можно рассматривать его аналог, полученный путем перехода от оператора $I+W_{\varkappa}$ к подобному оператору свертки с компактными коэффициентами. В этом случае проекторы, рассматриваемые в пространстве $L_p(\mathbb{R}^2\times\mathbb{T}_{(1,1)})$, приобретают более естественный вид. Для иллюстрации этого подхода преобразуем оператор $W_{\varkappa}$ к подобному оператору свертки. Пусть

$$\widetilde{\varkappa}(\rho,r,\sigma,\vartheta) = (\widetilde{\mathbf{q}}_{(2,2)}^{-1}\varkappa)(\rho,r,\sigma,\vartheta) =$$
$$= \prod_{j=1}^{2} \left(\frac{1}{|r_j\vartheta_j|^2} \left(\frac{|r_j\vartheta_j|}{|\rho_j\sigma_j|} \right)^{\frac{2}{p}} e^{-\alpha_j \ln^2 \frac{|\rho_j\sigma_j|}{|r_j\vartheta_j|}} \right) \beta\left(\frac{\rho_1\sigma_1}{|\rho_1\sigma_1|}, \frac{\rho_2\sigma_2}{|\rho_2\sigma_2|}, \frac{r_1\vartheta_1}{|r_1\vartheta_1|}, \frac{r_2\vartheta_2}{|r_2\vartheta_2|} \right) r_1 r_2,$$

где $\widetilde{\varkappa}\in\mathfrak{C}'_{(2,2);p}$, а изоморфизм $\widetilde{\mathbf{q}}_{(2,2)}$ определен в (4). Рассмотрим оператор $L_{\widetilde{\varkappa}}\in\mathfrak{V}'_{(2,2);p}$ вида (3) с ядром $\widetilde{\varkappa}$. Из леммы 1.1 работы [6] следует, что $L_{\widetilde{\varkappa}} = \widehat{\mathbf{q}}_{(2,2)}(W_{\varkappa})$, где $\widehat{\mathbf{q}}_{(2,2)}$ — изоморфизм подобия, определяемый изоморфизмом $\mathbf{q}_{(2,2)}$ перехода к полисферическим координатам и конструкцией (1). Пусть $U = \widehat{\mathbf{u}}_{(2,2)}(L_{\widetilde{\varkappa}})$. Из леммы 3.4 статьи [6] следует, что оператор $I+U$ принадлежит $(\mathcal{V}_p^{\mathcal{K}_{p;(2,2)}})^+$. Легко видеть, что оператор U имеет вид

$$(U\varphi)(x,\sigma)=\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{T}_{(1,1)}} e^{-\sum\limits_{i=1}^{2}\alpha_i(x_i-y_i)^2}\beta(\sigma_1,\sigma_2,\vartheta_1,\vartheta_2)\varphi(y_1,y_2,\vartheta_1,\vartheta_2)\,dy_1dy_2d\vartheta_1d\vartheta_2,$$

причем $U=D\otimes T$, где $D\in\mathcal{V}_p$, $T\in\mathcal{K}_{p;(2,2)}$, и

$$(D\lambda)(x_1,x_2)=\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\sum\limits_{i=1}^{2}\alpha_i(x_i-y_i)^2}\lambda(y_1,y_2)\,dy_1dy_2,\quad \lambda\in L_p(\mathbb{R}^2),$$

$$(T\mu)(\sigma_1,\sigma_2)=\int_{\mathbb{T}_{(1,1)}}\beta(\sigma_1,\sigma_2,\vartheta_1,\vartheta_2)\mu(\vartheta_1,\vartheta_2)\,d\vartheta_1d\vartheta_2,\quad \mu\in L_p(\mathbb{T}_{(1,1)}).$$

Рассмотрим переход от оператора $I+U$ к оператору конечномерной свертки в ограниченной области $(P_{mM}\otimes Q^m)(I+U)(P_{mM}\otimes Q^m)$. Подействуем оператором T на каждую функцию e_i базиса из тригонометрических полиномов $\{e_i\}_{i\geqslant 1}$ в пространстве $L_p(\mathbb{T}_{(1,1)})$ и рассмотрим разложение функции $(Te_j)(\sigma)$ по этому же базису:

$$(Te_j)(\sigma)=\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_{ij}e_i(\sigma),\quad \gamma_{ij}\in\mathbb{C}.$$

Рассмотрим естественные изометрические изоморфизмы

$$\tau_m\colon\ \mathbb{C}^m\to Q^mL_p(\mathbb{T}_{(1,1)}),\quad \kappa_m=I\otimes\tau_m\colon\ L_p^m(\mathbb{R}^2)\to(I\otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^2\times\mathbb{T}_{(1,1)}).$$

После несложных преобразований получаем, что

$$\kappa_m^{-1}((P_{mM}\otimes Q^m)U(P_{mM}\otimes Q^m)(\varphi(x,\sigma)))=\\ =\int_{mM}(\gamma_{ij})_{i,j=1}^m e^{-\sum\limits_{i=1}^{2}\alpha_i(x_i-y_i)^2}((I\otimes\tau_m^{-1}Q^m)\varphi)(y_1,y_2)\,dy,$$

где $(\gamma_{ij})_{i,j=1}^m\in\mathcal{L}(m;\mathbb{C})$.

Опишем схему проекционного метода для решения уравнения

$$(I+U)\varphi=\psi \tag{17}$$

в пространстве $L_p(\mathbb{R}^2\times\mathbb{T}_{(1,1)})$. Перейдем от него к редуцированному уравнению в пространстве $(P_{mM}\otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^2\times\mathbb{T}_{(1,1)})$:

$$\begin{gathered}(P_{mM}\otimes Q^m)(I+U)(P_{mM}\otimes Q^m)\varphi_m=(P_{mM}\otimes Q^m)\psi,\\ \psi=e^{\frac{1}{p}(2x_1+2x_2)}g(e^{x_1}\sigma_1,e^{x_2}\sigma_2).\end{gathered} \tag{18}$$

Подействуем на обе части уравнения (18) изоморфизмом κ_m^{-1}, получим следующее уравнение в пространстве $L_p^m(mM)$:

$$(\widetilde{\varphi}_m^j)_{j=1}^m(x_1,x_2)+\int_{mM}(\gamma_{ij})_{i,j=1}^m e^{-\sum\limits_{i=1}^{2}\alpha_i(x_i-y_i)^2}(\widetilde{\varphi}_m^j)_{j=1}^m(y_1,y_2)\,dy_1dy_2=(\widetilde{\psi}^j)_{j=1}^m(x_1,x_2),$$

где $(\widetilde{\varphi}_m^j)_{j=1}^m=(I\otimes\tau_m^{-1})\varphi_m$, $(\widetilde{\psi}^j)_{j=1}^m=(P_{mM}\otimes\tau_m^{-1}Q^m)\psi$. Если операторы

$$(P_{K_x}\otimes I)(I+U)(P_{K_x}\otimes I)$$

обратимы для всех точек $x \in \partial M$, то, согласно теореме 2, к оператору $I+U$ применим проекционный метод по системе проекторов $\{P_{mM} \otimes Q^m\}_{m\geqslant 1}$. Тогда решение уравнения (17) может быть найдено по формуле $\varphi = \lim\limits_{m\to\infty} \kappa_m(\widetilde{\varphi}^j_m)^m_{j=1}$, где $(\widetilde{\varphi}^j_m)^m_{j=1}$ — решение последнего уравнения в пространстве $L^m_p(mM)$.

Теперь вернемся к решению уравнения (15). Подействуем изоморфизмом $\mathbf{v}^{-1}_{(2,2)}$ на обе части уравнения (17). Учитывая равенство

$$I + U = \widehat{\mathbf{v}}_{(2,2)}(I + W_\varkappa),$$

из (17) получаем уравнение, подобное (15)

$$(I + W_\varkappa)(\mathbf{v}^{-1}_{(2,2)}\varphi) = g.$$

Таким образом, функция

$$f = (\mathbf{v}^{-1}_{(2,2)}\varphi)(x_{(1)}, x_{(2)}) = |x_{(1)}|^{-\frac{2}{p}}|x_{(2)}|^{-\frac{2}{p}}\varphi\left(\ln|x_{(1)}|, \ln|x_{(2)}|, \frac{x_{(1)}}{|x_{(1)}|}, \frac{x_{(2)}}{|x_{(2)}|}\right)$$

является решением уравнения (15).

Описанный подход оказывается особенно эффективным для операторов из класса $\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p;m}$ с анизотропно однородными ядрами конечномерного типа $\mathfrak{C}_{\mathbf{n};p;m}$ (см. [17]), так как в этом случае *подобный оператор свертки вырождается в оператор многомерной матричной свертки*, который допускает применение эффективных приближенных и численных методов исследования.

3.2. Рассмотрим применение проекционного метода для решения уравнения (15), где оператор $I + W_\varkappa \in (\mathfrak{V}_{(3,3);p})^+$ имеет более сложную структуру. Приведем пример оператора из алгебры $\mathcal{V}_p^{\mathcal{K}_{p;\mathbf{n}}}$, не являющегося суммой тензорных произведений операторов из алгебр $\mathcal{V}_p$ и $\mathcal{K}_{p;\mathbf{n}}$.

Через $B(X, x, \varepsilon)$ обозначим открытый шар радиуса ε в метрическом пространстве X с центром в точке x. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{10}$ следующую функцию с носителем в шаре $B(\mathbb{R}^{10}, 0, 1/4)$:

$$\widetilde{w}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1/16}{1/16-|x|^2}}, & |x| < \frac{1}{4}, \\ 0, & |x| \geqslant \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Многообразие $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}_{(2,2)} \times \mathbb{T}_{(2,2)}$ является подпространством евклидова пространства $\mathbb{R}^{14} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Рассмотрим естественный гомеоморфизм

$$\varphi\colon B(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}_{(2,2)} \times \mathbb{T}_{(2,2)}, \xi_0, \varepsilon) \to B(\mathbb{R}^{10}, 0, 1/4),$$

где $\xi_0 = (0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}_{(2,2)} \times \mathbb{T}_{(2,2)}$, а $\varepsilon = \varphi^{-1}(\underbrace{0,\ldots,0}_{9}, 1/4)$.

Определим на многообразии $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}_{(2,2)} \times \mathbb{T}_{(2,2)}$ функцию

$$w(\xi) = \begin{cases} \widetilde{w}(\varphi(\xi)), & \xi \in B(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}_{(2,2)} \times \mathbb{T}_{(2,2)}, \xi_0, \varepsilon), \\ 0, & \xi \notin B(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}_{(2,2)} \times \mathbb{T}_{(2,2)}, \xi_0, \varepsilon). \end{cases}$$

Ясно, что эта функция финитна и обращается в нуль за пределами шара $B(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}_{(2,2)} \times \mathbb{T}_{(2,2)}, \xi_0, \varepsilon)$.

Эту функцию можно аппроксимировать функциями вида $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\nu_i\zeta_i$, *где* $\lambda_i \in C_0(\mathbb{R}^2)$, $\nu_i, \zeta_i \in C_0(\mathbb{T}_{(2,2)})$ — *финитные функции.* Используя этот факт, непосредственными вычислениями можно проверить, что *оператор* U *вида*

$$(U\varphi)(\tau_1, t_1) = \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{T}_{(2,2)}} w(\tau_1-\tau_2, t_1, t_2)\varphi(\tau_2, t_2)\,d\tau_2 dt_2 \tag{19}$$

аппроксимируется в пространствах $L_1(\mathbb{R}^2\times\mathbb{T}_{(2,2)})$ *и* $L_\infty(\mathbb{R}^2\times\mathbb{T}_{(2,2)})$ *последовательностями операторов вида*

$$(\widetilde{U}\varphi)(\tau_1, t_1) = \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{T}_{(2,2)}} \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\tau_1-\tau_2)\nu_i(t_1)\zeta_i(t_2)\right)\varphi(\tau_2, t_2)\,d\tau_2 dt_2.$$

Отсюда, применяя интерполяционную теорему Марцинкевича [18, с. 31], можно получить, что $U \in \mathcal{V}_p \otimes \mathcal{K}_{p;(3,3)}$.

Подобный оператору $I+U$ оператор $I+W_\varkappa \in (\mathfrak{V}_{(3,3);p})^+$ имеет вид:

$$((I+W_\varkappa)f)(x_{(1)}, x_{(2)}) = f(x_{(1)}, x_{(2)}) + \int_{\mathbb{R}^6}\prod_{j=1}^{2}\left(\frac{1}{|y_{(j)}|^3}\left(\frac{|y_{(j)}|}{|x_{(j)}|}\right)^{\frac{3}{p}}\right) w\left(\ln\frac{|x_{(1)}|}{|y_{(1)}|}, \ln\frac{|x_{(2)}|}{|y_{(2)}|},\right.$$

$$\left.\frac{x_{(1)}}{|x_{(1)}|}, \frac{x_{(2)}}{|x_{(2)}|}, \frac{y_{(1)}}{|y_{(1)}|}, \frac{y_{(2)}}{|y_{(2)}|}\right) f(y_{(1)}, y_{(2)})\,dy_{(1)}dy_{(2)}, \quad x_{(1)}, x_{(2)}, y_{(1)}, y_{(2)} \in \mathbb{R}^3. \tag{20}$$

Его символ определяется следующим образом:

$$\sigma_{(3,3);p}(I+W_\varkappa)(t)(\xi)(s) = \xi(s) + \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{T}_{(2,2)}} w(\tau, s, \nu)e^{-i\tau t}\xi(\nu)\,d\tau\,d\nu, \quad t\in\mathbb{R}^2,\ \xi\in L_p(\mathbb{T}_{(2,2)}).$$

Опишем схему проекционного метода для решения уравнения (15) с оператором $I+W_\varkappa$ вида (20) в пространстве $L_p(\mathbb{R}^6)$. Пусть $Q^m \in \mathcal{L}(L_p(\mathbb{T}_{(2,2)}))$ — проектор на фиксированный тригонометрический базис в $L_p(\mathbb{T}_{(2,2)})$ (см. (8)). Рассмотрим уравнение (18) с оператором $I+U$ вида (19) в пространстве $(P_{mM}\otimes Q^m)L_p(\mathbb{R}^2\times\mathbb{T}_{(2,2)})$. Если оператор $I+U$ вида (19) обратим и операторы $(P_{K_x}\otimes I)(I+U)(P_{K_x}\otimes I)$ обратимы для всех точек $x\in\partial M$, то, согласно теореме 2, к оператору $I+U$ применим проекционный метод по системе проекторов $\{P_{mM}\otimes Q^m\}_{m\geqslant 1}$. Тогда решение уравнения (17) с оператором $I+U$ вида (19) может быть найдено по схеме, описанной в разделе 3.1. При переходе к уравнению, подобному уравнению (17), с оператором $I+W_\varkappa$ вида (20), получаем решение исходного уравнения (15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Karapetiants N., Samko S. Equations with involutive operators. Boston: Birkhäuser, 2001. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0183-0
2. Авсянкин О.Г. Многомерные интегральные операторы с биоднородными ядрами: проекционный метод и псевдоспектры // Сибирский математический журнал. 2006. Т. 47. № 3. С. 501–513. http://mi.mathnet.ru/smj872
3. Авсянкин О.Г. Проекционный метод для матричных многомерных парных интегральных операторов с однородными ядрами // Владикавказский математический журнал. 2006. Т. 8. Вып. 1. С. 3–10. http://mi.mathnet.ru/vmj111
4. Авсянкин О.Г. Проекционный метод для интегральных операторов с однородными ядрами, возмущенных односторонними мультипликативными сдвигами // Известия вузов. Математика. 2015. № 2. С. 10–17. http://mi.mathnet.ru/ivm8969

5. Деундяк В.М. Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами компактного типа и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами // Математические заметки. 2010. Т. 87. Вып. 5. С. 704–720. https://doi.org/10.4213/mzm8717
6. Деундяк В.М., Мирошникова Е.И. Об ограниченности и фредгольмовости интегральных операторов с анизотропно однородными ядрами компактного типа и переменными коэффициентами // Известия вузов. Математика. 2012. № 7. С. 3–17. http://mi.mathnet.ru/ivm8715
7. Rabinovich V., Roch S., Silbermann B. Limit operators and their applications in operator theory. Basel: Birkhäuser, 2004. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7911-8
8. Симоненко И.Б. Операторы типа свертки в конусах // Математический сборник. 1967. Т. 74 (116). № 2. С. 298–313. http://mi.mathnet.ru/msb4164
9. Деундяк В.М., Мирошникова Е.И. Многомерные мультипликативные свертки и их приложения к теории операторов с однородными ядрами // Труды научной школы И. Б. Симоненко: сб. статей. Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2010. С. 67–78.
10. Rabinovich V., Schulze B.-W., Tarkhanov N. C^*-algebras of singular integral operators in domains with oscillating conical singularities // Manuscripta Mathematica. 2002. Vol. 108. Issue 1. P. 69–90. https://doi.org/10.1007/s002290200255
11. Козак А.В. Локальный принцип в теории проекционных методов // Доклады АН СССР. 1973. Т. 212. № 6. С. 1287–1289.
12. Козак А.В. Локальный принцип в теории проекционных методов // Интегральные и дифференциальные уравнения и их приложения: сб. науч. тр. Элиста: Изд-во КалмГУ, 1983. С. 58–73.
13. Симоненко И.Б. Локальный метод в теории инвариантных относительно сдвига операторов и их огибающих. Ростов-на-Дону: Изд-во ЦВВР, 2007. 120 с.
14. Лукин А.В. Применение локального подхода Симоненко–Козака в теории проекционных методов решения уравнений свертки с операторными коэффициентами // Владикавказский математический журнал. 2016. Т. 18. № 2. С. 55–66. http://mi.mathnet.ru/vmj581
15. Деундяк В.М., Лукин А.В. Приближенный метод решения операторных уравнений свертки на группе $\mathbb{R}^n$ с компактными коэффициентами и приложения // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2013. Вып. 6. С. 5–8.
16. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971. 352 с.
17. Деундяк В.М., Лукин А.В. Приближенный метод решения уравнений для многомерных операторов с анизотропно однородными ядрами компактного типа // Математика и ее приложения. Журнал Ивановского математического общества. 2013. Вып. 1 (10). С. 3–12.
18. Grafakos L. Classical Fourier analysis. New York: Springer, 2008. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09432-8

Поступила в редакцию 17.02.2019

Деундяк Владимир Михайлович, к. ф.-м. н., доцент, Южный федеральный университет, 344006, Россия, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105/42;
Научно исследовательский институт «Спецвузавтоматика», 344002, Россия, г. Ростов-на-Дону, пер. Газетный, 51.
E-mail: vlade@math.rsu.ru

Лукин Александр Васильевич, аспирант, Южный федеральный университет, 344006, Россия, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105/42.
E-mail: alexanderlukin9@gmail.com

V. M. Deundyak, A. V. Lukin

Projection method for solving equations for multidimensional operators with anisotropically homogeneous kernels of compact type

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 2, pp. 153–165 (in Russian).

Keywords: integral operator, homogeneous kernels, convolution operator, projection method, compact coefficients.

MSC2010: 47G10, 45L05, 45P05

DOI: 10.20537/vm190202

We consider the Banach algebra $\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p}$ of operators with anisotropically homogeneous kernels of compact type in L_p-space on the $\mathbb{R}^n$-group. Interest in the operators from $\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p}$ is motivated by their natural connection with the Mellin convolution operators and multidimensional multiplicative convolution operators on the $\mathbb{R}^n$-group, as well as by their applicability to the solution of problems with complex singularities. We describe the relationship of this algebra with the algebra of multidimensional convolution operators with compact coefficients using the similarity isomorphism. For the operators from the $\mathfrak{V}_{\mathbf{n};p}$-algebra we obtain the criterion of applicability of the projection method for solving operator equations in terms of invertibility of some set of operators in cones. We prove the criterion of applicability using the reduction of the original equation to an equation for convolution operators with compact coefficients. The proof of the applicability of the projection method is sufficiently based on the new operator version of the local principle by A. V. Kozak in the theory of projection methods, which is a modification of the well-known local principle by I. B. Simonenko in the theory of the Fredholm property. In this paper, we give illustrative examples of the equations for operators with anisotropically homogeneous kernels of compact type, where we calculate the symbol and apply the developed projection method for these operators.

REFERENCES

1. Karapetiants N., Samko S. *Equations with involutive operators*, Boston: Birkhäuser, 2001. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0183-0
2. Avsyankin O.G. Multidimensional integral operators with bihomogeneous kernels: A projection method and pseudospectra, *Siberian Mathematical Journal*, 2006, vol. 47, issue 3, pp. 410–421. https://doi.org/10.1007/s11202-006-0053-2
3. Avsyankin O.G. The projection method for matrix multidimensional dual integral operators with homogeneous kernels, *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal*, 2006, vol. 8, no. 1, pp. 3–10 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/vmj111
4. Avsyankin O.G. Projection method for integral operators with homogeneous kernels perturbed by one-sided multiplicative shifts, *Russian Mathematics*, 2015, vol. 59, issue 2, pp. 7–13. https://doi.org/10.3103/S1066369X15020024
5. Deundyak V.M. Multidimensional integral operators with homogeneous kernels of compact type and multiplicatively weakly oscillating coefficients, *Mathematical Notes*, 2010, vol. 87, issue 5–6, pp. 672–686. https://doi.org/10.1134/S000143461005007X
6. Deundyak V.M., Miroshnikova E.I. The boundedness and the Fredholm property of integral operators with anisotropically homogeneous kernels of compact type and variable coefficients, *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, issue 7, pp. 1–14. https://doi.org/10.3103/S1066369X12070018
7. Rabinovich V., Roch S., Silbermann B. *Limit operators and their applications in operator theory*, Basel: Birkhäuser, 2004. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7911-8
8. Simonenko I.B. Operators of convolution type in cones, *Mathematics of the USSR–Sbornik*, 1967, vol. 3, no. 2, pp. 279–293. https://doi.org/10.1070/SM1967v003n02ABEH002374
9. Deundyak V.M., Miroshnikova E.I. Multidimensional multiplicative convolutions and their applications to the theory of operators with homogeneous kernels, *Trudy nauchnoi shkoly I. B. Simonenko:*

sbornik statei (Works of the scientific school of I. B. Simonenko: Transactions), Rostov-on-Don: Southern Federal University, 2010, pp. 67–78 (in Russian).
10. Rabinovich V., Schulze B.-W., Tarkhanov N. C^*-algebras of singular integral operators in domains with oscillating conical singularities, *Manuscripta Mathematica*, 2002, vol. 108, issue 1, pp. 69–90. https://doi.org/10.1007/s002290200255
11. Kozak A.V. A local principle in the theory of projection methods, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1973, vol. 14, pp. 1580–1583. https://zbmath.org/?q=an:0306.46058
12. Kozak A.V. A local principle in the projection methods theory, *Integral'nye i differentsial'nye uravneniya i ikh prilozheniya: sbornik nauchnykh trydov* (Integral and differential equations and their applications: Transactions), Elista, 1983, pp. 58–73 (in Russian).
13. Simonenko I.B. *Lokal'nyi metod v teorii invariantnykh otnositel'no sdviga operatorov i ih ogibayushchikh* (The local method in the theory of operators invariant with respect to shifts and their envelopes), Rostov-on-Don: CVVR, 2007.
14. Lukin A.V. Application of Simonenko–Kozak's local principle in the section method theory of solving convolution equations with operator coefficients, *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal*, 2016, vol. 18, no. 2, pp. 55–66 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/vmj581
15. Deundyak V.M., Lukin A.V. Approximate method of solution of the convolution equations on a group $\mathbb{R}^n$ with compact coefficients and applications, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Severo-Kavkazskii Region. Estestvennye Nauki*, 2013, vol. 6, pp. 5–8 (in Russian).
16. Gohberg I.C., Fel'dman I.A. *Convolution equations and projection methods for their solution*, Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 2005.
Original Russian text published in Gokhberg I.C., Fel'dman I.A. *Uravneniya v svertkakh i proektsionnye metody ikh resheniya*, Moscow: Nauka, 1971, 352 p.
17. Deundyak V.M., Lukin A.V. An approximate method for solving the equations for multidimensional operators with anisotropically homogeneous kernels of compact type, *Matematika i Ee Prilozheniya. Zhurnal Ivanovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 2013, issue 1 (10), pp. 3–12 (in Russian).
18. Grafakos L. *Classical Fourier analysis*, New York: Springer, 2008.
https://doi.org/10.1007/978-0-387-09432-8

Received 17.02.2019

Deundyak Vladimir Mikhailovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Southern Federal University, ul. Bolshaya Sadovaya, 105/42, Rostov-on-Don, 344006, Russia;
State Scientific Organization: Research Institute "Spetsvuzavtomatika", per. Gazetnyi, 51, Rostov-on-Don, 344002, Russia.
E-mail: vlade@math.rsu.ru

Lukin Aleksandr Vasil'evich, Post-Graduate Student, Southern Federal University, ul. Bolshaya Sadovaya, 105/42, Rostov-on-Don, 344006, Russia.
E-mail: alexanderlukin9@gmail.com