УДК 519.816

© *В. И. Ухоботов, И. С. Стабулит, К. Н. Кудрявцев*

СРАВНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ ТРЕУГОЛЬНОГО ВИДА

Проблема сравнения нечетких чисел возникает во многих прикладных задачах. Существуют разные подходы к решению этой проблемы, которые определяются спецификами рассматриваемых задач. Предлагаемый в настоящей статье подход к сравнению нечетких чисел состоит в следующем. Вначале строится правило сравнения действительного числа с множеством α-уровня нечеткого числа. Затем с помощью процедуры усреднения по α строится правило сравнения действительного числа с нечетким числом. С использованием процедуры разделения двух нечетких чисел с помощью действительного числа вводится правило сравнения нечетких чисел. На основании развитого подхода предлагается правило дефазификации нечеткого числа. В качестве примера рассмотрены нечеткие числа треугольного вида.

Ключевые слова: сравнение нечетких чисел, дефазификация, треугольные нечеткие числа.

DOI: 10.20537/vm190205

Введение

В задачах, в которых исследуются экономические и социальные процессы, информация об исследуемых объектах носит, как правило, расплывчатый, нечеткий характер. Для исследования таких задач успешно применяется аппарат теории нечетких множеств. После опубликования Л. Заде своей работы по нечетким множествам [1] вышло большое количество работ, в которых как развиваются отдельные разделы этой теории [2–4], так и рассматриваются вопросы применения ее к исследованию разнообразных задач [5–8].

В задачах принятия решения и игровых задачах [9–12] возможна ситуация, когда присутствуют неопределенности, задаваемые нечеткими множествами, а значение целевого функционала является нечетким числом, которое зависит как от выбранной лицом принимающим решением стратегии, так и от реализовавшейся неопределенности. Возникает проблема действия с нечеткими числами [13–15] и их сравнения.

К настоящему времени предложено достаточно большое количество различных методов сравнения нечетких чисел [16–21]. Однако ни один из них не является универсальным.

В данной работе продолжаются исследования [10, 11, 19–21].

§ 1. Описание правила сравнения нечетких чисел

Пусть задана функция $\mu_A\colon \mathbb{R} \to [0;1]$. Нечетким числом A называется [1] совокупность пар $(x, \mu_A(x))$, $x \in \mathbb{R}$. Функция μ_A называется функцией принадлежности нечеткого числа A.

Для каждого числа $\alpha \in [0;1]$ множество

$$A(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}\colon \mu_A(x) \geqslant \alpha\}$$

называется множеством α-уровня нечеткого числа A.

Множества α-уровня удовлетворяют следующим свойствам:

$$\begin{gathered} A(0) = \mathbb{R}; \\ 0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1 \Rightarrow A(\alpha_2) \subset A(\alpha_1); \\ 0 < \alpha \leqslant 1 \Rightarrow \bigcap_{0<t\leqslant 1} A(t) = A(\alpha). \end{gathered} \tag{1.1}$$

Пусть при каждом $\alpha \in [0;1]$ определено множество $A(\alpha) \subset \mathbb{R}$. Если совокупность этих множеств удовлетворяет свойствам (1.1), то она является семейством множеств α-уровня нечеткого числа A, функция принадлежности которого равна

$$\mu_A(x) = \sup\left\{\alpha \in [0;1] \colon x \in A(\alpha)\right\}.$$

Далее будем рассматривать нечеткие числа, у которых при любом $0 < \alpha \leqslant 1$ множества α-уровня являются отрезками

$$A(\alpha) = [g_A(\alpha), G_A(\alpha)] \subset \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Считаем, что функции $g_A \colon (0,1] \to \mathbb{R}$ и $G_A \colon (0,1] \to \mathbb{R}$ удовлетворяют следующим свойствам:

$$\begin{gathered} g_A(\alpha_1) \leqslant g_A(\alpha_2) < G_A(\alpha_2) \leqslant G_A(\alpha_1) \text{ при любых } 0 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 < 1, \\ \lim_{t\to\alpha-0} g_A(t) = g_A(\alpha), \quad \lim_{t\to\alpha-0} G_A(t) = G_A(\alpha) \text{ при любом } 0 < \alpha \leqslant 1. \end{gathered} \tag{1.3}$$

При выполнении этих условий отрезки (1.2) удовлетворяют свойствам (1.1). Отметим, что из условий (1.3) следует, что $g_A(1) \leqslant G_A(1)$.

Для заданного нечеткого числа A построим нечеткое число $D(A)$, лингвистическое описание которого имеет вид $D(A) =$«число $y \in \mathbb{R}$ меньше или равно нечеткому числу A». Для этого при фиксированных $y \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in (0,1]$ введем меру $\gamma(\alpha, y) \in [0,1]$ того факта, что число $y \in \mathbb{R}$ меньше или равно отрезку $[g_A(\alpha), G_A(\alpha)]$, который является множеством α-уровня нечеткого числа A. Положим

$$\gamma(\alpha, y) = \begin{cases} 1, & \text{при } \ y \leqslant g_A(\alpha); \\ \dfrac{G_A(\alpha) - y}{G_A(\alpha) - g_A(\alpha)}, & \text{при } \ g_A(\alpha) < y < G_A(\alpha); \\ 0, & \text{при } \ G_A(\alpha) \leqslant y. \end{cases} \tag{1.4}$$

Отметим, что при $g_A(\alpha) < y < G_A(\alpha)$ число $\gamma(\alpha, y)$ задает долю тех чисел из отрезка $[g_A(\alpha), G_A(\alpha)]$, которые больше или равны числу $y \in \mathbb{R}$. Если $y = g_A(1) = G_A(1)$, то полагаем $\gamma(\alpha, y) = 1$.

Определим функцию принадлежности нечеткого числа $D(A)$ следующей формулой:

$$\mu_{D(A)}(y) = \int_0^1 \gamma(\alpha, y)\, d\alpha. \tag{1.5}$$

Существование интеграла в (1.5) предполагаем.

Аналогично построим нечеткое число $F(A)$, лингвистическое описание которого имеет вид $F(A) =$«число $y \in \mathbb{R}$ больше или равно нечеткому числу A». Меру $\beta(\alpha, y) \in [0,1]$, при $y \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in (0,1]$, того факта, что число $y \in \mathbb{R}$ больше или равно отрезку $[g_A(\alpha), G_A(\alpha)]$, зададим формулой $\beta(\alpha, y) = 1 - \gamma(\alpha, y)$. Аналогично (1.5) определим функцию принадлежности нечеткого числа $F(A)$. Получим

$$\mu_{F(A)}(y) = 1 - \mu_{D(A)}(y). \tag{1.6}$$

Далее, рассмотрим нечеткое число $L(A)$, лингвистическое описание которого имеет вид $L(A)$ =«число $y \in \mathbb{R}$ меньше или равно нечеткому числу A и число $y \in \mathbb{R}$ больше или равно нечеткому числу A». Это нечеткое число $L(A)$ является пересечением нечетких чисел $D(A)$ и $F(A)$. Поэтому [1] его функция принадлежности равна

$$\mu_{L(A)}(y) = \min\left\{\mu_{D(A)}(y), \mu_{F(A)}(y)\right\}. \tag{1.7}$$

Из формулы (1.4) следует, что $\gamma(\alpha, y_2) \leqslant \gamma(\alpha, y_1)$ при всех $y_1 < y_2$ и $\alpha \in (0, 1]$. Отсюда и из формул (1.5) и (1.6) получим, что

$$\mu_{D(A)}(y_1) \geqslant \mu_{D(A)}(y_2), \quad \mu_{F(A)}(y_1) \leqslant \mu_{F(A)}(y_2) \quad \text{при} \quad y_1 < y_2.$$

Используя эти свойства монотонности, из (1.7) можно получить, что если

$$\mu_{D(A)}(y_A) = \mu_{F(A)}(y_A) \tag{1.8}$$

в некоторой точке $y_A \in \mathbb{R}$, то

$$\mu_{L(A)}(y_A) \geqslant \mu_{L(A)}(y) \quad \text{при всех} \quad y \in \mathbb{R}.$$

Поэтому, применяя метод максимума в процедуре дефазификации [22, с. 87] нечеткого числа $L(A)$, получим действительное число y_A. Два нечетких числа A и B можно сравнивать, например, с помощью действительных чисел y_A и y_B, считая, что нечеткое число A меньше или равно нечеткого числа B тогда и только тогда, когда $y_A \leqslant y_B$.

Подставив в формулу (1.8) равенство (1.6), получим что

$$\mu_{D(A)}(y_A) = \frac{1}{2}. \tag{1.9}$$

Из равенства (1.9) следует, что если точка y_A удовлетворяет (1.8), то она является поперечной точкой нечеткого числа $D(A)$ [22, с. 57]. В этой точке индекс нечеткости нечеткого числа $D(A)$ принимает максимальное значение [22, с. 60].

Опишем теперь другой подход к сравнению нечетких чисел A и B. Рассмотрим нечеткое число $G = G(A, B)$, лингвистическое описание которого имеет вид G =«число $y \in \mathbb{R}$ меньше или равно нечеткому числу A и число $y \in \mathbb{R}$ больше или равно нечеткому числу B». Это нечеткое число G является пересечением нечетких чисел $D(A)$ и $F(B)$. Поэтому его функция принадлежности

$$\mu_{G(A,B)}(y) = \min\left\{\mu_{D(A)}(y), \mu_{F(B)}(y)\right\} = \min\left\{\mu_{D(A)}(y), 1 - \mu_{D(B)}(y)\right\}.$$

В качестве меры $d(A \geqslant B)$ того, что нечеткое число A больше или равно нечеткому числу B можно взять

$$d(A \geqslant B) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \min\left\{\mu_{D(A)}(y), \mu_{F(B)}(y)\right\}. \tag{1.10}$$

Если $d(A \geqslant B) \geqslant d(B \geqslant A)$, то считаем, что нечеткое число A больше или равно нечеткому числу B.

§ 2. Сравнение треугольных нечетких чисел

Рассмотрим случай треугольного нечеткого числа $A = (a, b, c)$, у которого функция принадлежности $\mu_A\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ имеет следующий вид [22, с. 81]:

$$\mu_A = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leqslant a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{при} \quad a < x \leqslant b; \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & \text{при} \quad b < x \leqslant c; \\ 0, & \text{при} \quad x > c. \end{cases}$$

Здесь $a < b < c$ — заданные действительные числа.

Из этих формул следует, что множества α-уровня $A(\alpha)$ являются отрезками, имеющими вид $[g_A(\alpha), G_A(\alpha)]$, где

$$g_A(\alpha) = a + (b-a)\alpha, \qquad G_A(\alpha) = c - (c-b)\alpha \quad \text{при} \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

Отсюда и из формул (1.4) получим, что

$$\begin{gathered} \gamma(\alpha, y) = 1 \quad \text{при} \quad y \leqslant a + (b-a)\alpha; \qquad \gamma(\alpha, y) = 0 \quad \text{при} \quad c - (c-b)\alpha \leqslant y; \\ \gamma(\alpha, y) = \frac{c - (c-b)\alpha - y}{(c-a)(1-\alpha)} \quad \text{при} \quad a + (b-a)\alpha < y < c - (c-b)\alpha. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Лемма 1. *Если $y \leqslant a$, то $\gamma(\alpha, y) = 1$ при всех $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Если $a < y \leqslant b$, то*

$$\gamma(\alpha, y) = \frac{c - y - (c-b)\alpha}{(c-a)(1-\alpha)} \text{ при } 0 \leqslant \alpha < \frac{y-a}{b-a} \text{ и } \gamma(\alpha, y) = 1 \text{ при } \frac{y-a}{b-a} \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{2.2}$$

Если $b < y \leqslant c$, то

$$\gamma(\alpha, y) = \frac{c - y - (c-b)\alpha}{(c-a)(1-\alpha)} \text{ при } 0 \leqslant \alpha < \frac{c-y}{c-b} \text{ и } \gamma(\alpha, y) = 0 \text{ при } \frac{c-y}{c-b} \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{2.3}$$

Если $c < y$, то $\gamma(\alpha, y) = 0$ при всех $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Доказательство. Если $y \leqslant a$, то неравенство $y \leqslant a + (b-a)\alpha$ выполнено при всех $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Поэтому $\gamma(\alpha, y) = 1$ при всех $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Если $a < y \leqslant b$, то неравенство $y \leqslant a + (b-a)\alpha$ выполнено при всех $\frac{y-a}{b-a} \leqslant \alpha \leqslant 1$, а неравенства $a + (b-a)\alpha < y < c - (c-b)\alpha$ выполнены при всех $0 \leqslant \alpha < \frac{y-a}{b-a}$. Поэтому из (2.1) следует (2.2).

Если $b < y \leqslant c$, то неравенство $a + (b-a)\alpha < y$ выполнено при всех $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, а неравенство $y < c - (c-b)\alpha$ выполнено при всех $0 \leqslant \alpha < \frac{c-y}{c-b}$. А значит, из (2.1) следует (2.3).

Если $c < y$, то неравенство $c - (c-b)\alpha < y$ выполнено при всех $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Поэтому из (2.1) получим, что $\gamma(\alpha, y) = 0$ при всех $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. $\square$

Используя эту лемму вычисляем функцию $\mu_{D(A)}(y)$, определяемую формулой (1.5). Вначале отметим, что при любом числе $0 \leqslant \delta < 1$

$$\int_0^\delta \frac{c - y - (c-b)\alpha}{(c-a)(1-\alpha)}\, d\alpha = \frac{c-b}{c-a}\,\delta - \frac{b-y}{c-a}\ln(1-\delta). \tag{2.4}$$

Теорема 1. *Функция принадлежности нечеткого числа $D(A)$ равна*

$$\mu_{D(A)}(y) = 1 \quad \textit{при} \quad y \leqslant a;$$
$$\mu_{D(A)}(y) = \frac{c-y}{c-a} - \frac{b-y}{c-a}\ln\frac{b-y}{b-a} \quad \textit{при} \quad a < y \leqslant b; \tag{2.5}$$
$$\mu_{D(A)}(b) = \frac{c-b}{c-a};$$
$$\mu_{D(A)}(y) = \frac{c-y}{c-a} - \frac{b-y}{c-a}\ln\frac{y-b}{c-b} \quad \textit{при} \quad b < y < c; \tag{2.6}$$
$$\mu_{D(A)}(y) = 0 \quad \textit{при} \quad c \leqslant y.$$

Доказательство следует из леммы 1 и из формулы (2.4). □

Отметим, что

$$\lim_{y\to b-0}\mu_{D(A)}(y) = \lim_{y\to b+0}\mu_{D(A)}(y) = \frac{c-b}{c-a}.$$

Поэтому функция $\mu_{D(A)}(y)$ является непрерывной при $y \in \mathbb{R}$. Она строго убывает при $a \leqslant y \leqslant c$, является вогнутой при $a \leqslant y \leqslant b$ и выпуклой при $b \leqslant y \leqslant c$ (см. рис. 1–3).

Рассмотрим уравнение

$$\mu_{D(A)}(y) = \frac{1}{2}. \tag{2.7}$$

Если $\dfrac{a+c}{2} = b$, то решение y_A этого уравнения равно $y_A = b$ (см. рис. 1).

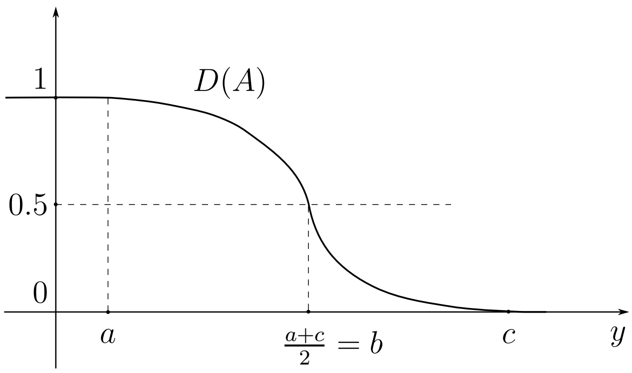

Рис. 1. $\mu_{D(A)}(y)$ при условии $\frac{a+c}{2} = b$

Пусть

$$b > \frac{a+c}{2}.$$

Тогда $\dfrac{c-b}{c-a} < \dfrac{1}{2}$. В этом случае $y_A < b$ (см. рис. 2). Используя формулу (2.5), запишем уравнение (2.7) в явном виде

$$\frac{c-y}{c-a} - \frac{b-y}{c-a}\ln\frac{b-y}{b-a} = \frac{1}{2}.$$

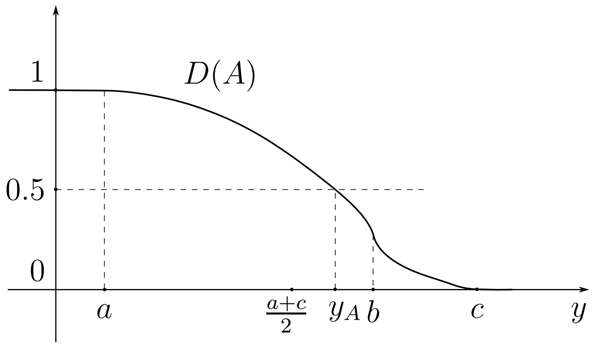

Рис. 2. $\mu_{D(A)}(y)$ при условии $\frac{a+c}{2} < b$

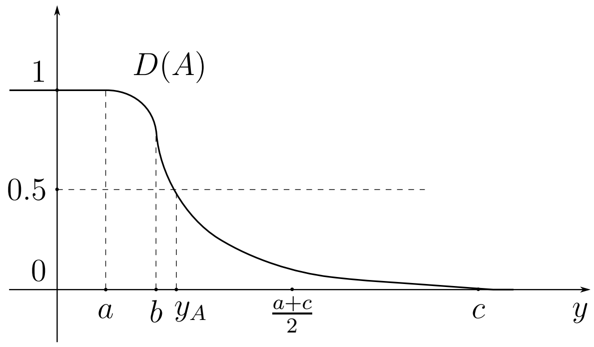

Рис. 3. $\mu_{D(A)}(y)$ при условии $\frac{a+c}{2} > b$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{b-a}{c-a}\left(\frac{b-y}{b-a} - \frac{b-y}{b-a}\ln\frac{b-y}{b-a}\right) = \frac{1}{2} - \frac{c-b}{c-a},$$

или

$$\frac{b-a}{c-a}\left(\frac{b-y}{b-a} - \frac{b-y}{b-a}\ln\frac{b-y}{b-a}\right) = \frac{b-\frac{a+c}{2}}{c-a}.$$

Обозначим

$$\frac{b-y}{b-a} = t \in (0,1] \tag{2.8}$$

и подставим в предыдущее уравнение. Получим

$$f(t) = \frac{b-\frac{a+c}{2}}{b-a}, \qquad \text{где} \quad f(t) = t - t\ln t. \tag{2.9}$$

График функции $f(t)$ изображен на рис. 4. Функция $f(t)$ строго возрастает при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Следовательно, существует обратная к ней функция $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$. Поэтому из (2.8) и (2.9) получим, что

$$y_A = b - (b-a)\varphi\left(\frac{b-\frac{a+c}{2}}{b-a}\right). \tag{2.10}$$

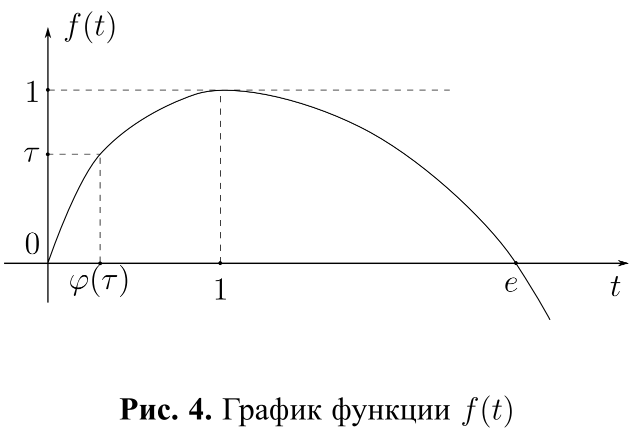

Рис. 4. График функции $f(t)$

Пусть $b < \dfrac{a+c}{2}$, тогда $\dfrac{c-b}{c-a} > \dfrac{1}{2}$. В этом случае $y_A > b$ (см. рис. 3). Используя формулу (2.6), запишем уравнение (2.7) в явном виде

$$\frac{c-y}{c-a} - \frac{b-y}{c-a}\ln\frac{y-b}{c-b} = \frac{1}{2},$$

или

$$\frac{c-b}{c-a} - \frac{c-b}{c-a}\frac{y-b}{c-b} + \frac{c-b}{c-a}\frac{y-b}{c-b}\ln\frac{y-b}{c-b} = \frac{1}{2}.$$

Преобразуем уравнение к виду

$$-\frac{c-b}{c-a}\frac{y-b}{c-b} + \frac{c-b}{c-a}\frac{y-b}{c-b}\ln\frac{y-b}{c-b} = \frac{1}{2} - \frac{c-b}{c-a}$$
$$-\frac{c-b}{c-a}\frac{y-b}{c-b} + \frac{c-b}{c-a}\frac{y-b}{c-b}\ln\frac{y-b}{c-b} = \frac{-\frac{a+c}{2}+b}{c-a}$$
$$\frac{y-b}{c-b} - \frac{y-b}{c-b}\ln\frac{y-b}{c-b} = \frac{\frac{a+c}{2}-b}{c-b}.$$

Обозначив

$$t = \frac{y-b}{c-b} \in (0,1], \tag{2.11}$$

получим уравнение

$$f(t) = \frac{\frac{a+c}{2}-b}{c-b}, \tag{2.12}$$

где $f(t)$ определено в (2.9). Из (2.11) и (2.12) получим, что

$$y_A = b + (c-b)\varphi\left(\frac{\frac{a+c}{2}-b}{c-b}\right). \tag{2.13}$$

Далее, используя (2.10) и (2.13), запишем решение уравнения (2.7):

а) пусть $b > \dfrac{a+c}{2} \Leftrightarrow (b-a)-(c-b) > 0$, тогда

$$y_A = b - (b-a)\varphi\left(\frac{b-\frac{a+c}{2}}{b-a}\right) = b - (b-a)\varphi\left(\frac{(b-a)-(c-b)}{2(b-a)}\right);$$

б) пусть $b = \dfrac{a+c}{2}$, тогда $y_A = b$;

в) пусть $b < \dfrac{a+c}{2} \Leftrightarrow -(b-a)+(c-b) > 0$, тогда

$$y_A = b + (c-b)\varphi\left(\frac{\frac{a+c}{2}-b}{c-b}\right) = b + (c-b)\varphi\left(\frac{-(b-a)+(c-b)}{2(c-b)}\right).$$

Замечание 1. Заметим, что решения уравнений (2.9) и (2.12) легко могут быть получены с помощью численных методов.

Пример 1. Сравним два треугольных нечетких числа $A = (10, 40, 60)$ и $B = (20, 50, 55)$, графики которых приведены на рис. 5. Здесь $y_A = 38.8194$, $y_B = 45.7785$. Так как $y_A \leqslant y_B$, то $A \leqslant B$.

Пример 2. Рассмотрим пример ранжирования четырех треугольных нечетких чисел. Пусть заданы числа $A = (20, 70, 80)$, $B = (85, 90, 100)$, $C = (10, 20, 110)$ и $D = (55, 60, 90)$ (см. рис. 6).

Сравнивая полученные значения $y_A = 63.38$, $y_B = 90.67$, $y_C = 33.97$ и $y_D = 64.22$, ранжируем рассматриваемые треугольные нечеткие числа в следующем порядке

$$C \leqslant A \leqslant D \leqslant B.$$

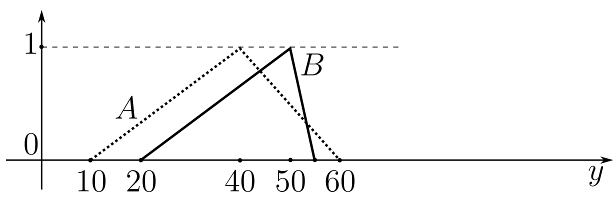

Рис. 5. Сравнение двух треугольных нечетких чисел

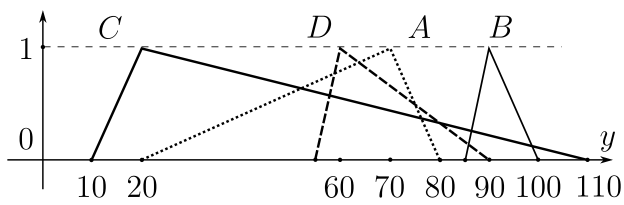

Рис. 6. Ранжирование четырех треугольных нечетких чисел

Рассмотрим теперь применение второго предложенного подхода к сравнению треугольных нечетких чисел. А именно, пусть заданы два треугольных числа $A = (a_1, b_1, c_1)$ и $B = (a_2, b_2, c_2)$.

В силу непрерывности функции принадлежности нечеткого числа $D(A)$ и (1.6), формула (1.10) примет вид

$$d(A \geqslant B) = \max_{y \in \mathbb{R}} \min \left\{ \mu_{D(A)}(y), \mu_{F(B)}(y) \right\}. \tag{2.14}$$

Напомним также, что для любого нечеткого треугольного числа $C = (a, b, c)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \mu_{D(C)}(y) &= 1 \quad \text{при} \quad y \leqslant a; \\ \mu_{D(C)}(y) &= 0 \quad \text{при} \quad c \leqslant y. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Обозначим

$$u(y) = \min \left\{ \mu_{D(A)}(y), \mu_{F(B)}(y) \right\}. \tag{2.16}$$

При вычислении значения $d(A \geqslant B)$ возможны 3 случая.

Случай 1. Если $c_1 \leqslant a_2$, то из (1.6) и (2.15) следует, что в любой точке $y \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $u(y) = 0$. Отсюда, согласно (2.16) и (2.14), получим $d(A \geqslant B) = 0$.

Случай 2. Если $c_2 \leqslant a_1$, то из (1.6) и (2.15) следует, что в любой точке $y \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $u(y) = 1$. Из чего, согласно (2.16) и (2.14), следует, что $d(A \geqslant B) = 1$.

Случай 3. Если $a_1 < c_2$ и $a_2 < c_1$, то (см. рис. 7) функция $\mu_{D(A)}(y)$ монотонно убывает, а функция $\mu_{F(B)}(y)$ монотонно возрастает на промежутке $[\xi_1, \xi_2]$, где

$$\xi_1 = \max\{a_1, a_2\}, \qquad \xi_2 = \min\{c_1, c_2\}.$$

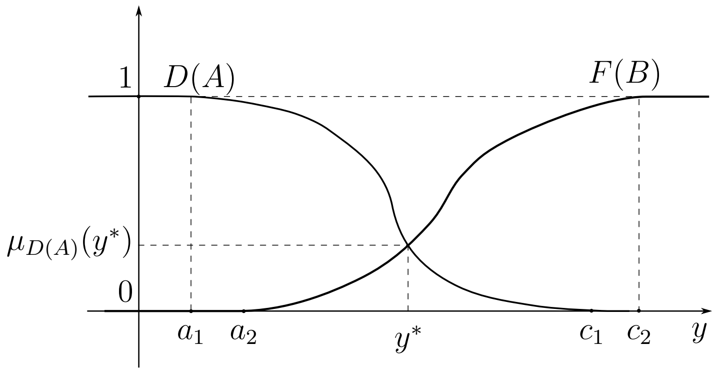

Рис. 7. $\mu_{D(A)}(y)$ и $\mu_{F(B)}(y)$ при условиях $a_1 < c_2$ и $a_2 < c_1$

Из этого следует, что $\max u(y)$ на промежутке $[\xi_1, \xi_2]$ достигается в точке y^*, являющейся решением уравнения

$$\mu_{D(A)}(y) = \mu_{F(B)}(y),$$

или, с учетом (1.6), уравнения

$$\mu_{D(A)}(y) + \mu_{D(B)}(y) = 1. \tag{2.17}$$

В силу того что правая часть уравнения (2.17) является монотонно возрастающей на промежутке $[\xi_1, \xi_2]$ функцией, и при этом $\mu_{D(A)}(\xi_1) + \mu_{D(B)}(\xi_1) < 1$, а $\mu_{D(A)}(\xi_2) + \mu_{D(B)}(\xi_2) > 1$, уравнение (2.17) имеет на отрезке $[\xi_1, \xi_2]$ единственное решение, которое легко может быть найдено численными методами.

Замечание 2. Заметим, что из (1.6) сразу следует равенство

$$d(B \geqslant A) = 1 - d(A \geqslant B).$$

Поэтому, для сравнения двух треугольных нечетких чисел, достаточно вычислить только величину $d(A \geqslant B)$. *Если* $d(A \geqslant B) \geqslant \dfrac{1}{2}$, *то треугольное нечеткое число* A *больше или равно треугольного нечеткого числа* B. Будем обозначать этот факт как $A \geqslant B$.

В заключение покажем, что оба предложенных способа сравнения треугольных нечетких чисел обладают свойством транзитивности. Для первого способа, основанного на дефазификации и последующем сравнении действительных (четких) чисел, транзитивность следует из транзитивности операции сравнения действительных чисел. Для второго подхода транзитивность устанавливается следующей леммой.

Лемма 2. *Для любых треугольных нечетких чисел* A, B *и* C *имеет место импликация*

$$[A \geqslant B] \wedge [B \geqslant C] \Rightarrow [A \geqslant C].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу того, что справедливы следующие три цепочки импликаций

$$[A \geqslant B] \Rightarrow \left[d(A \geqslant B) \geqslant \frac{1}{2}\right],$$

$$[B \geqslant C] \Rightarrow \left[d(B \geqslant C) \geqslant \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \left[1 - d(B \geqslant C) \leqslant \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \left[d(C \geqslant B) \leqslant \frac{1}{2}\right],$$

$$\left[d(A \geqslant C) \geqslant \frac{1}{2}\right] \Rightarrow [A \geqslant C],$$

для доказательства леммы достаточно установить справедливость импликации

$$\left[d(A \geqslant B) \geqslant \frac{1}{2}\right] \wedge \left[d(C \geqslant B) \leqslant \frac{1}{2}\right] \Rightarrow d(A \geqslant C) \geqslant \frac{1}{2}. \tag{2.18}$$

Обозначим через $\hat{y}$ решение уравнения $\mu_{F(B)}(y) = \dfrac{1}{2}$. Из $d(A \geqslant B) \geqslant \dfrac{1}{2}$ и монотонного неубывания функции $\mu_{F(B)}(y)$ следует, что для y_2 — решения уравнения

$$\mu_{D(A)}(y) = \mu_{F(B)}(y)$$

имеют место неравенства

$$y_2 \geqslant \hat{y} \tag{2.19}$$

и

$$\mu_{D(A)}(y_2) \geqslant \frac{1}{2}. \tag{2.20}$$

Аналогично, из $d(C \geqslant B) \leqslant \dfrac{1}{2}$ и монотонного неубывания $\mu_{F(B)}(y)$ получаем, что для y_1 — решения уравнения

$$\mu_{D(C)}(y) = \mu_{F(B)}(y)$$

выполняется неравенство

$$y_1 \leqslant \hat{y}, \tag{2.21}$$

и

$$\mu_{D(C)}(y_1) \leqslant \frac{1}{2}. \tag{2.22}$$

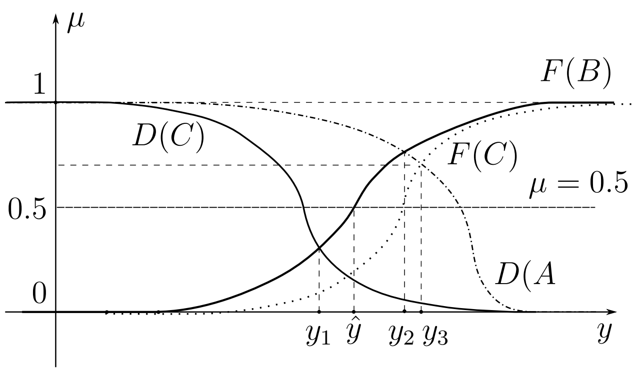

Рис. 8.

Заметим, что в силу (1.6) и $0 \leqslant \mu_{D(B)}(y) \leqslant 1$, графики функций $\mu_{D(C)}(y)$ и $\mu_{F(C)}(y)$ симметричны относительно прямой $\mu = \dfrac{1}{2}$ (см. рис. 8). Отсюда и из (2.22) следует, что

$$\mu_{F(C)}(y_1) \geqslant \frac{1}{2}. \tag{2.23}$$

Обозначим теперь через y_3 решение уравнения

$$\mu_{D(A)}(y) = \mu_{F(C)}(y).$$

Если $y_3 \geqslant y_1$, то, с учетом монотонности $\mu_{F(C)}(y)$ и (2.23), справедлива цепочка импликаций

$$[y_3 \geqslant y_1] \Rightarrow \left[\mu_{F(C)}(y_3) \geqslant \mu_{F(C)}(y_1)\right] \Rightarrow \left[\mu_{F(C)}(y_3) \geqslant \frac{1}{2}\right]. \tag{2.24}$$

Если же $y_3 < y_1$, то, согласно (2.21), (2.19), а также с учетом монотонности $\mu_{D(A)}(y)$ и (2.20), имеет место цепочка импликаций

$$[y_3 < y_1] \quad \Rightarrow \quad [y_3 < y_2] \quad \Rightarrow \quad \left[\mu_{D(A)}(y_3) \geqslant \mu_{D(A)}(y_2)\right] \quad \Rightarrow \quad \left[\mu_{D(A)}(y_3) \geqslant \frac{1}{2}\right]. \tag{2.25}$$

Объединяя (2.24) и (2.25), получаем справедливость (2.18). □

§ 3. Заключение

В заключение отметим, что к настоящему времени предложено достаточно большое число способов сравнения нечетких чисел. Однако ни один из них не является универсальным. При решении различных прикладных задач, выбирая разные способы сравнения нечетких чисел, можно получить разные (и даже противоположные) результаты. Однако, никакой обоснованной методики выбора метода сравнения нечетких чисел до сих пор не предложено. В статье были предложены два новых способа сравнения нечетких чисел, которые могут применяться к ряду задач. Так, например, первый предложенный способ может быть эффективно использован при поиске решений биматричных игр с выигрышами, заданными нечеткими треугольными числами [10, 11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Information and Control. 1965. Vol. 8. No. 3. P. 338–353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X
2. Zadeh L.A. Fuzzy logic // Computer. 1988. Vol. 21. No. 4. P. 83–93. https://doi.org/10.1109/2.53
3. Zimmermann H.J. Fuzzy set theory — and its applications. Dordrecht: Springer, 2001. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0646-0
4. Kosko B. Fuzzy systems as universal approximators // IEEE Transactions on Computers. 1994. Vol. 43. No. 11. P. 1329–1333. https://doi.org/10.1109/12.324566
5. Li L., Lai K.K. A fuzzy approach to the multiobjective transportation problem // Computers and Operations Research. 2000. Vol. 27. No. 1. P. 43–57. https://doi.org/10.1016/S0305-0548(99)00007-6
6. Chen C.-T., Lin C.-T., Huang S.-F. A fuzzy approach for supplier evaluation and selection in supply chain management // International Journal of Production Economics. 2006. Vol. 102. No. 2. P. 289–301. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2005.03.009
7. Bahri O., Talbi E.-G., Amor N.B. A generic fuzzy approach for multi-objective optimization under uncertainty // Swarm and Evolutionary Computation. 2018. Vol. 40. P. 166–183. https://doi.org/10.1016/j.swevo.2018.02.002
8. Korzhov A.V., Korzhova M.E. A method of accounting for fuzzy operational factors influencing 6 (10) kV power cable insulation longevity // 2016 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). IEEE, Chelyabinsk, 2016. P. 1–4. https://doi.org/10.1109/ICIEAM.2016.7911429

9. Larbani M. Non cooperative fuzzy games in normal form: A survey // Fuzzy Sets and Systems. 2009. Vol. 160. No. 22. P. 3184–3210. https://doi.org/10.1016/j.fss.2009.02.026
10. Kudryavtsev K.N., Stabulit I.S., Ukhobotov V.I. A bimatrix game with fuzzy payoffs and crisp game // CEUR Workshop Proceedings. 2017. Vol. 1987. P. 343–349.
11. Kudryavtsev K.N., Stabulit I.S., Ukhobotov V.I. One approach to fuzzy matrix games // CEUR Workshop Proceedings. 2018. Vol. 2098. P. 228–238.
12. Verma T., Kumar A. Ambika methods for solving matrix games with Atanassov's intuitionistic fuzzy payoffs // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2018. Vol. 26. No. 1. P. 270–283. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2017.2651103
13. Dutta P., Boruah H., Ali T. Fuzzy arithmetic with and without using α-cut method: A comparative study // International Journal of Latest Trends in Computing. 2011. Vol. 2. No. 1. P. 99–107.
14. Bansal A. Trapezoidal fuzzy numbers (a, b, c, d): arithmetic behavior // International Journal of Physical and Mathematical Sciences. 2011. Vol. 2. No. 1. P. 39–44.
15. Галлямов Е.Р., Ухоботов В.И. Компьютерная реализация операций с нечеткими числами // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Вычислительная математика и информатика. 2014. Т. 3. № 3. С. 97–108. https://doi.org/10.14529/cmse140306
16. Yager R.R. A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval // Information Sciences. 1981. Vol. 24. No. 2. P. 143–161. https://doi.org/10.1016/0020-0255(81)90017-7
17. Ibáñez L.M.C., Muñoz A.G. A subjective approach for ranking fuzzy numbers // Fuzzy Sets and Systems. 1989. Vol. 29. No. 2. P. 145–153. https://doi.org/10.1016/0165-0114(89)90188-7
18. Chen S.-J., Hwang C.-L. Fuzzy multiple attribute decision making methods // Fuzzy multiple attribute decision making. Berlin–Heidelberg: Springer, 1992. P. 289–486. https://doi.org/10.1007/978-3-642-46768-4_5
19. Ухоботов В.И., Щичко П.В. Об одном подходе к сравнению нечетких чисел // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2011. Вып. 10. С. 54–62. http://mi.mathnet.ru/vyuru185
20. Ухоботов В.И., Михайлова Е.С. Об одном подходе к сравнению нечетких чисел в задачах принятия решений // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Физика. 2015. Т. 7. № 1. С. 32–37. http://mi.mathnet.ru/vyurm208
21. Ухоботов В.И., Михайлова Е.С. О сравнении нечетких чисел в задачах принятия решений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 87–94. https://doi.org/10.20537/vm160108
22. Ухоботов В.И. Избранные главы теории нечетких множеств: учебное пособие. Челябинск: Изд-во Челябинского гос. ун-та, 2011. 245 с.

Поступила в редакцию 21.03.2019

Ухоботов Виктор Иванович, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454001, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.
E-mail: ukh@csu.ru

Стабулит Ирина Станиславовна, старший преподаватель, кафедра вычислительной математики и высокопроизводительных вычислений, Южно-Уральский государственный университет, 454080, Россия, г. Челябинск, пр. Ленина, 76.
E-mail: irisku76@mail.ru

Кудрявцев Константин Николаевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра вычислительной математики и высокопроизводительных вычислений, Южно-Уральский государственный университет, 454080, Россия, г. Челябинск, пр. Ленина, 76.
E-mail: kudrkn@gmail.com

V. I. Ukhobotov, I. S. Stabulit, K. N. Kudryavtsev

Comparison of triangular fuzzy numbers

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 2, pp. 197–210 (in Russian).

Keywords: comparison of fuzzy numbers, defuzzification, triangular fuzzy numbers.

MSC2010: 03B52, 68T37

DOI: 10.20537/vm190205

Difficulties in comparing fuzzy numbers occur in many applied problems. There are different approaches to dealing with the above difficulties. These approaches are determined by the specificity of the problems under consideration. The approach proposed in this article for comparing fuzzy numbers is as follows. First, a rule is constructed for comparing a real number with the α-level set of a fuzzy number. Then, using the procedure of averaging over α, a rule is constructed for comparing a real number with a fuzzy number. By means of the procedure for separating two fuzzy numbers with the help of a real number, a rule for comparing fuzzy numbers is introduced. Based on the developed approach, the rule for defuzzification of fuzzy numbers is proposed. As an example, triangular fuzzy numbers are considered.

REFERENCES

1. Zadeh L.A. Fuzzy sets, *Information and Control*, 1965, vol. 8, no. 3, pp. 338–353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X
2. Zadeh L.A. Fuzzy logic, *Computer*, 1988, vol. 21, no. 4, pp. 83–93. https://doi.org/10.1109/2.53
3. Zimmermann H.-J. *Fuzzy set theory — and its applications*, Dordrecht: Springer, 2001. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0646-0
4. Kosko B. Fuzzy systems as universal approximators, *IEEE Transactions on Computers*, 1994, vol. 43, no. 11, pp. 1329–1333. https://doi.org/10.1109/12.324566
5. Li L., Lai K.K. A fuzzy approach to the multiobjective transportation problem, *Computers and Operations Research*, 2000, vol. 27, no. 1, pp. 43–57. https://doi.org/10.1016/S0305-0548(99)00007-6
6. Chen C.-T., Lin C.-T., Huang S.-F. A fuzzy approach for supplier evaluation and selection in supply chain management, *International Journal of Production Economics*, 2006, vol. 102, no. 2, pp. 289–301. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2005.03.009
7. Bahri O., Talbi E.-G., Amor N.B. A generic fuzzy approach for multi-objective optimization under uncertainty, *Swarm and Evolutionary Computation*, 2018, vol. 40, pp. 166–183. https://doi.org/10.1016/j.swevo.2018.02.002
8. Korzhov A.V., Korzhova M.E. A method of accounting for fuzzy operational factors influencing 6 (10) kV power cable insulation longevity, *2016 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM)*, IEEE, Chelyabinsk, 2016, pp. 1–4. https://doi.org/10.1109/ICIEAM.2016.7911429
9. Larbani M. Non cooperative fuzzy games in normal form: A survey, *Fuzzy Sets and Systems*, 2009, vol. 160, no. 22, pp. 3184–3210. https://doi.org/10.1016/j.fss.2009.02.026
10. Kudryavtsev K.N., Stabulit I.S., Ukhobotov V.I. A bimatrix game with fuzzy payoffs and crisp game, *CEUR Workshop Proceedings*, 2017, vol. 1987, pp. 343–349.

11. Kudryavtsev K.N., Stabulit I.S., Ukhobotov V.I. One approach to fuzzy matrix games, *CEUR Workshop Proceedings*, 2018, vol. 2098, pp. 228–238.
12. Verma T., Kumar A. Ambika methods for solving matrix games with Atanassov's intuitionistic fuzzy payoffs, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 270–283. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2017.2651103
13. Dutta P., Boruah H., Ali T. Fuzzy arithmetic with and without using α-cut method: A comparative study, *International Journal of Latest Trends in Computing*, 2011, vol. 2, no. 1, pp. 99–107.
14. Bansal A. Trapezoidal fuzzy numbers (a, b, c, d): arithmetic behavior, *International Journal of Physical and Mathematical Sciences*, 2011, vol. 2, no. 1, pp. 39–44.
15. Gallyamov E.R., Ukhobotov V.I. Computer implementation of operations with fuzzy numbers, *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya "Vychislitelnaya Matematika i Informatika"*, 2014, vol. 3, no. 3, pp. 97–108 (in Russian). https://doi.org/10.14529/cmse140306
16. Yager R.R. A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval, *Information Sciences*, 1981, vol. 24, no. 2, pp. 143–161. https://doi.org/10.1016/0020-0255(81)90017-7
17. Ibáñez L.M.C., Muñoz A.G. A subjective approach for ranking fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 1989, vol. 29, no. 2, pp. 145–153. https://doi.org/10.1016/0165-0114(89)90188-7
18. Chen S.-J., Hwang C.-L. Fuzzy multiple attribute decision making methods, *Fuzzy multiple attribute decision making*, Berlin–Heidelberg: Springer, 1992, pp. 289–486. https://doi.org/10.1007/978-3-642-46768-4_5
19. Ukhobotov V.I., Shchichko P.V. An approach to ranking fuzzy numbers, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2011, issue 10, pp. 54–62 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/vyuru185
20. Ukhobotov V.I., Mikhailova E.S. An approach to the comparison of fuzzy numbers in decision-making problems, *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.*, 2015, vol. 7, no. 1, pp. 32–37 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/vyurm208
21. Ukhobotov V.I., Mikhailova E.S. Comparison of fuzzy numbers in decision-making problems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 87–94 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm160108
22. Ukhobotov V.I. *Izbrannye glavy teorii nechetkikh mnozhestv: uchebnoe posobie* (The selected chapters of the theory of fuzzy sets: study guide), Chelyabinsk: Chelyabinsk State University, 2011.

Received 21.03.2019

Ukhobotov Viktor Ivanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Control Theory and Optimization, Chelyabinsk State University, ul. Brat'ev Kashirinykh, 129, Chelyabinsk, 454001, Russia.
E-mail: ukh@csu.ru

Stabulit Irina Stanislavovna, Senior Lecturer, Department of Computational Mathematics and High-Performance Computing, South Ural State University, pr. Lenina, 76, Chelyabinsk, 454080, Russia.
E-mail: irisku76@mail.ru

Kudryavtsev Konstantin Nikolaevich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Computational Mathematics and High-Performance Computing, South Ural State University, pr. Lenina, 76, Chelyabinsk, 454080, Russia.
E-mail: kudrkn@gmail.com