

УДК 532.5.032, 539.311

© *А. О. Казакова***ОБ АНАЛОГИИ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛОСКИМИ ЗАДАЧАМИ МЕХАНИКИ  
В КОЛЬЦЕ**

В статье рассматривается аналогия между двумя плоскими задачами механики сплошных сред: гидродинамическая задача о движении вязкой жидкости, заключенной между двумя вращающимися цилиндрами, и плоская задача теории упругости в напряжениях, создаваемых в трубе постоянным нормальным внешним давлением. В обеих задачах область решения — кольцо; в рамках настоящей работы рассмотрены два случая: концентрическое и эксцентрическое кольцо. В первой части статьи проведено построение аналогии для случая концентрического кольца, показано, что в этом случае решения рассматриваемых задач выражаются функциями одного и того же вида. Во второй части статьи представлена попытка построения прямой аналогии для случая эксцентрического кольца и обозначены возникающие проблемы. Исследование в третьей части статьи направлено на установление напряженного состояния в эксцентрическом кольце, соответствующего бигармонической функции напряжений, построенной по аналогии с изученной гидродинамической задачей с учетом условий однозначности смещений. В результате проведенного исследования можно сделать вывод о том, что аналогия между рассматриваемыми задачами может быть установлена, но только с учетом механических особенностей каждой из них. При этом в случае концентрического кольца наблюдается прямая аналогия.

*Ключевые слова:* вязкая жидкость, плоская задача теории упругости, кольцевая область, биполярные координаты, функция тока, функция напряжений.

DOI: [10.20537/vm190206](https://doi.org/10.20537/vm190206)

Гидродинамика и теория упругости — два больших раздела механики сплошных сред, и многие математические модели этих разделов описываются одинаковыми уравнениями. В настоящей статье предлагается возможность проведения аналогии между двумя плоскими задачами механики сплошных сред: гидродинамической задачи о движении вязкой жидкости, заключенной между двумя вращающимися цилиндрами, и плоской задачи теории упругости в напряжениях, создаваемых в трубе постоянным нормальным внешним давлением. В обеих задачах область решения — кольцо; в рамках настоящей работы рассмотрены два случая: концентрическое и эксцентрическое круговое кольцо. Математические модели обеих указанных задач описываются бигармоническим уравнением: для функции тока в гидродинамической задаче и для функции напряжений Эри в задаче теории упругости; граничные условия, как показано в настоящей статье, также эквивалентны. Поэтому была выдвинута гипотеза о возможности установить аналогию между этими задачами и их решениями. Однако в ходе исследования выяснилось, что между математическими моделями рассматриваемых задач есть некоторые различия, порождаемые их механическими особенностями. В частности, при решении задачи теории упругости для кольца необходимо учитывать, что в случае двусвязной области бигармоническая функция напряжений должна удовлетворять трем условиям однозначности смещений.

Насколько нам известно, подобное исследование рассматриваемой аналогии не встречается в научных публикациях. Однако обе рассматриваемые задачи в настоящее время достаточно хорошо изучены. Вопросам движения тел в вязкой жидкости, в том числе

определению порождаемого этим движением поля скоростей жидкости, посвящено большое количество классических и современных научных работ. В качестве примера можно привести, в частности, работы [1–8]. Отдельно можно выделить работы [9–12], посвященные решению задачи о течении вязкой жидкости между двумя вращающимися круговыми цилиндрами. Результаты, представленные в настоящей работе относительно гидродинамической задачи, согласуются с результатами, полученными ранее в классических трудах [10, 11]. Решениям задач плоской теории упругости в различных областях также посвящены многочисленные работы, в том числе классические труды известных математиков (например, [13–18]), а также современные научные публикации (например, [19–22]). В настоящей работе проведено сравнение результатов, полученных для плоской задачи теории упругости по аналогии с гидродинамической задачей, с результатами, полученными ранее в работе [18]. Проведенное сравнение повлекло за собой необходимость проведения дополнительного исследования и позволило получить один из основных результатов настоящей работы: вывод о том, что аналогия между рассматриваемыми задачами может быть установлена только с учетом механических особенностей каждой из них. Численные решения рассматриваемых задач предлагаются, например, в работах [23–28].

Построение аналогии в настоящей статье предлагается начать со случая концентрического кольца и сравнить полученное решение с известными частными решениями задачи теории упругости. Дальнейшее исследование направлено на установление напряженного состояния в эксцентрическом кольце, соответствующего бигармонической функции напряжений, построенной по аналогии с изученной гидродинамической задачей с учетом условий однозначности смещений [29].

## § 1. Аналогия между гидродинамической задачей и задачей теории упругости в случае концентрического кольца

**1.1. Гидродинамическая задача.** Рассмотрим задачу о движении вязкой жидкости между двумя вращающимися концентрично расположенными круговыми цилиндрами (рис. 1). Пусть  $a$  — радиус внутреннего цилиндра (вращается с угловой скоростью  $\omega_a$ ),  $b$  — радиус внешнего цилиндра (вращается с угловой скоростью  $\omega_b$ ). Задача рассматривается в полярных координатах  $(r, \theta)$ . Граничные условия имеют вид

$$V_\theta|_{r=a} = -\frac{\partial\Psi}{\partial r}\Big|_{r=a} = \omega_a a, \quad V_\theta|_{r=b} = -\frac{\partial\Psi}{\partial r}\Big|_{r=b} = \omega_b b, \quad (1.1)$$

где  $V_\theta$  — линейная скорость точек жидкости,  $\Psi$  — бигармоническая функция тока.

Решение задачи описано, например, в [30, с. 132–135], где показано, что скорость  $V_\theta$  зависит только от  $r$  и в наших обозначениях имеет вид

$$V_\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r},$$

где

$$C_1 = \frac{\omega_b b^2 - \omega_a a^2}{b^2 - a^2}, \quad C_2 = \frac{(\omega_a - \omega_b) a^2 b^2}{b^2 - a^2}. \quad (1.2)$$

Так как  $V_\theta = -\frac{\partial\Psi}{\partial r}$ , то можно получить соответствующий (1.1) вид функции тока (она, очевидно, также зависит только от  $r$ ):

$$\Psi = -\frac{C_1}{2} r^2 - C_2 \ln r + C_3, \quad (1.3)$$

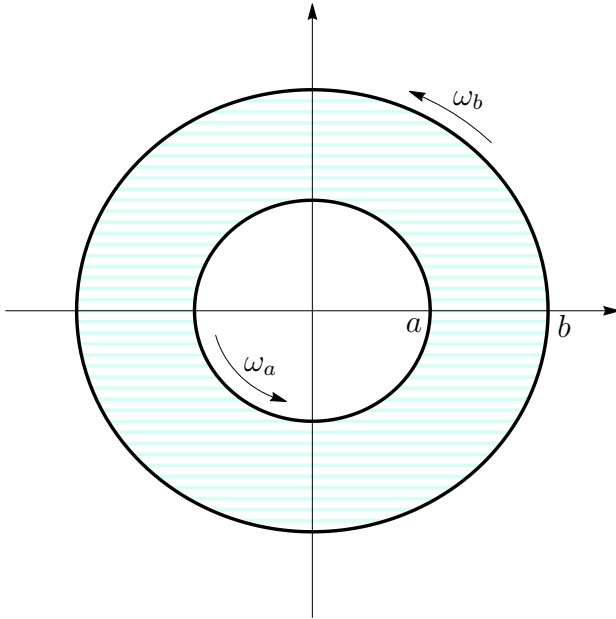


Рис. 1. Жидкость заключена между двумя концентрическими вращающимися цилиндрами

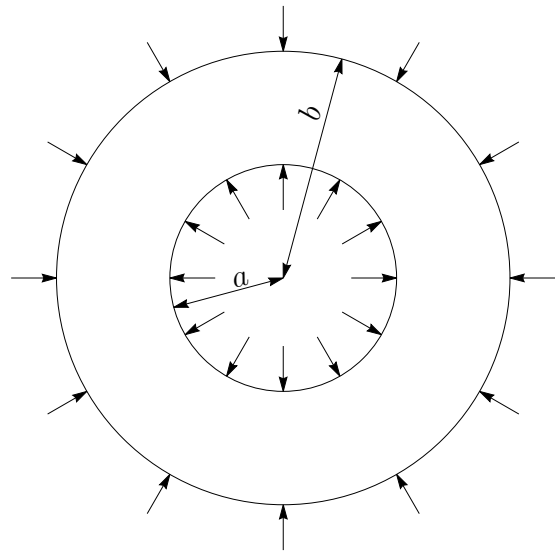


Рис. 2. Концентрическая труба под равномерным внешним и внутренним давлением

где  $C_3$  — произвольная константа, не влияющая на поле скоростей жидкости.

**1.2. Задача Ламе.** Можно заметить, что решение (1.3), (1.2) полностью соответствует решению задачи теории упругости о круговом кольце, находящемся под равномерным внешним и внутренним нормальным давлениями (задача Ламе, рис. 2), граничные условия которой имеют вид

$$\sigma_r|_{r=a} = -p_a, \quad \sigma_r|_{r=b} = -p_b. \quad (1.4)$$

Нормальное напряжение  $\sigma_r$  выражается через бигармоническую функцию напряжений  $\Phi$  по формуле

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad (1.5)$$

но в силу осесимметричности данной задачи функция  $\Phi$  зависит только от  $r$ , поэтому выражение (1.5) принимает вид:  $\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}$ .

Решение рассматриваемой задачи описано, например, в [16, с. 85–87], и функция напряжений имеет вид

$$\Phi = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{2(b^2 - a^2)} r^2 + \frac{(p_b - p_a) a^2 b^2}{b^2 - a^2} \ln r + C,$$

то есть полностью совпадает с решением (1.3), (1.2) гидродинамической задачи, если в нем заменить  $\omega_a$  на  $p_a$  и  $\omega_b$  на  $p_b$ .

**1.3. Переход от граничных условий гидродинамической задачи к граничным условиям задачи теории упругости.** Поскольку  $V_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$ , а  $\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}$  (для осесимметричной задачи), то от условий (1.1) можно перейти к условиям вида (1.4) следующим образом, выполнив переобозначение (вместо функции напряжений записываем функцию тока):

$$\sigma_r|_{r=a} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{1}{a} (-\omega_a a) = -\omega_a,$$

$$\sigma_r|_{r=b} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \Big|_{r=b} = \frac{1}{b} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=b} = \frac{1}{b} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_{r=b} = \frac{1}{b} (-\omega_b b) = -\omega_b.$$

То есть получены граничные условия, эквивалентные (1.4):  $\sigma_r|_{r=a} = -\omega_a$ ,  $\sigma_r|_{r=b} = -\omega_b$ .

Таким образом, гидродинамическая задача о движении вязкой жидкости, заключенной между двумя равномерно вращающимися концентрично расположенными круговыми цилиндрами, эквивалентна плоской задаче теории упругости о напряженном состоянии кругового кольца, находящегося под действием равномерно распределенной по контурам нормальной нагрузки. Для получения аналогии следует в качестве нормальных граничных нагрузок  $p_a$  и  $p_b$  в задаче теории упругости положить угловые скорости  $\omega_a$  и  $\omega_b$  вращающихся цилиндров гидродинамической задачи. При этом компоненты тензора напряжений, соответствующего функции (1.3), (1.2), примут вид:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{(p_b - p_a) a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2},$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{(p_b - p_a) a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) = 0,$$

что совпадает с тензором напряжений задачи Ламе.

## § 2. Аналогия между гидродинамической задачей и задачей теории упругости в случае эксцентрического кольца

**2.1. Гидродинамическая задача (о поле скоростей жидкости между двумя вращающимися эксцентрично расположенными цилиндрами).** Рассмотрим задачу о движении вязкой жидкости между двумя вращающимися эксцентрично расположенными круговыми цилиндрами (рис. 3). Пусть  $\rho_0$  — радиус внутреннего цилиндра (вращается с угловой скоростью  $\omega_0$ ),  $\rho_1$  — радиус внешнего цилиндра (вращается с угловой скоростью  $\omega_1$ ), расстояние между центрами цилиндров равно  $\Delta x$ . Угловые скорости считаются положительными при вращении против часовой стрелки.

Задача рассматривается в биполярных координатах  $(\xi, \eta)$ , связь которых с декартовыми координатами определяется формулой

$$x + iy = ai \operatorname{ctg} \left( \frac{\xi + i\eta}{2} \right), \quad (2.1)$$

или, если отделить вещественную и мнимую части,

$$x = \frac{a \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad y = \frac{a \sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad (2.2)$$

где  $a$  — параметр биполярных координат.

Задача сводится к определению бигармонической функции тока  $\Psi$  внутри области, ограниченной двумя окружностями: внешней  $\eta = \eta_1$  радиуса  $\rho_1$  и внутренней  $\eta = \eta_0$  радиуса  $\rho_0$ , расстояние между центрами которых равно  $\Delta x$ . Из (2.1) следуют равенства:

$$\rho_1 = \frac{a}{\operatorname{sh} \eta_1}, \quad \rho_0 = \frac{a}{\operatorname{sh} \eta_0}, \quad \Delta x = a \operatorname{cth} \eta_1 - a \operatorname{cth} \eta_0.$$

Разрешая их относительно  $a$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_0$ , можно получить следующие выражения для указанных параметров через заданные в задаче  $\rho_0$ ,  $\rho_1$ ,  $\Delta x$ :

$$a = \frac{\sqrt{(\Delta x^2 - \rho_1^2 - \rho_0^2)^2 - 4\rho_1^2 \rho_0^2}}{2\Delta x}, \quad \eta_1 = \ln \frac{\sqrt{a^2 + \rho_1^2} + a}{\rho_1}, \quad \eta_0 = \ln \frac{\sqrt{a^2 + \rho_0^2} + a}{\rho_0}.$$

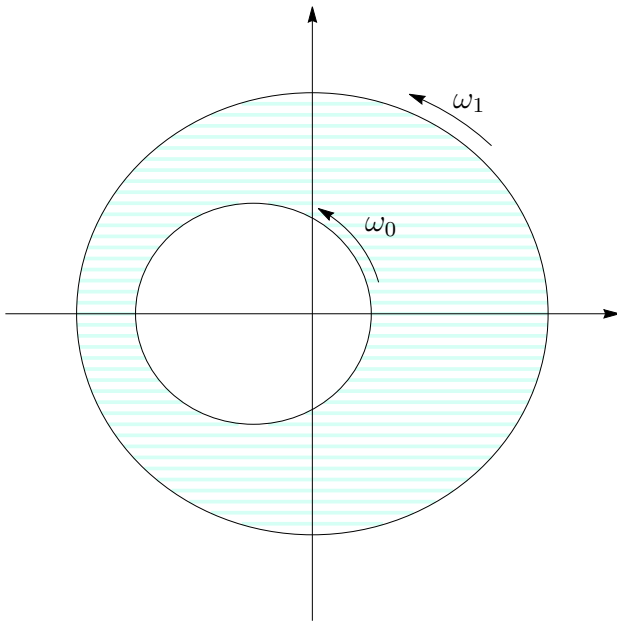


Рис. 3. Жидкость заключена между двумя эксцентрическими вращающимися цилиндрами

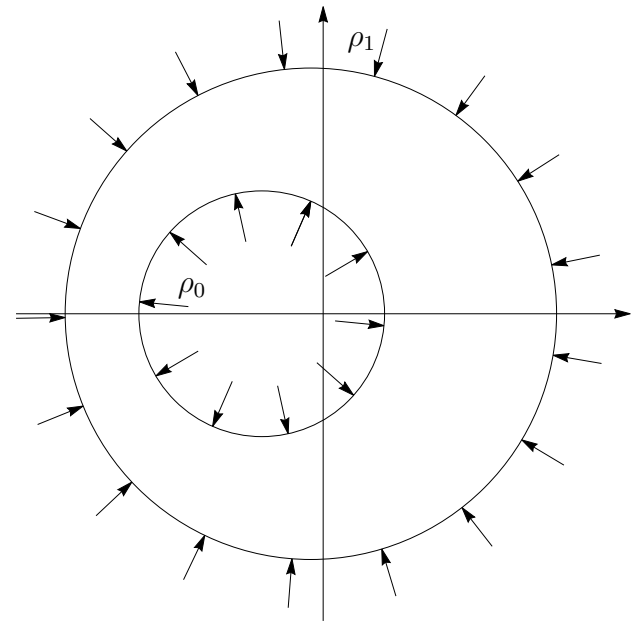


Рис. 4. Эксцентрическая труба под равномерным внешним и внутренним давлением

В [12] показано, что бигармоническая функция тока может быть задана в виде (по аналогии с результатами, полученными в [10]):

$$\Psi = N(\eta) + \frac{M(\eta)}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \quad N(\eta) = A\eta - F \operatorname{ch} 2\eta - G \operatorname{sh} 2\eta, \quad (2.3)$$

$$M(\eta) = B \operatorname{sh} \eta + C \operatorname{ch} \eta + E\eta \operatorname{sh} \eta + F \operatorname{ch} \eta \operatorname{ch} 2\eta + G \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} 2\eta.$$

Граничные условия рассматриваемой задачи:

$$\Psi|_{\eta=\eta_0} = \text{const} \Rightarrow M(\eta_0) = 0, \quad \Psi|_{\eta=\eta_1} = \text{const} \Rightarrow M(\eta_1) = 0,$$

$$H \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} = \omega_0 \rho_0 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} = \omega_0 \rho_0 a, \quad (2.4)$$

$$H \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_1} = \omega_1 \rho_1 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_1} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_1} = \omega_1 \rho_1 a.$$

Здесь  $H = (\operatorname{ch} \eta - \cos \xi) / a$  – первый дифференциальный параметр биполярной системы координат, характеризующий масштаб преобразования (2.1).

Из условий (2.4) определяются 6 неизвестных коэффициентов функции  $\Psi$ :

$$A = a \operatorname{cth} \beta \frac{(U_1 \operatorname{ch} \eta_1 - U_0 \operatorname{ch} \eta_0) \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta - (U_1 \operatorname{sh} \eta_1 - U_0 \operatorname{sh} \eta_0) (\beta + \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta)}{\beta (\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta - 1) - \operatorname{sh} \beta (\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} \beta)},$$

$$E = a \frac{(U_1 \operatorname{sh} \eta_1 - U_0 \operatorname{sh} \eta_0) \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta + (U_1 \operatorname{ch} \eta_1 - U_0 \operatorname{ch} \eta_0) (1 - \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta)}{\beta (\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta - 1) - \operatorname{sh} \beta (\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} \beta)}, \quad (2.5)$$

$$C = \frac{\operatorname{sh} \eta_0}{2} (E \operatorname{sh} \eta_0 + A \operatorname{ch} \eta_0 + aU_0) + \frac{\operatorname{sh} \eta_1}{2} (E \operatorname{sh} \eta_1 + A \operatorname{ch} \eta_1 + aU_1),$$

$$B = -E\eta_0 - \operatorname{ch} \eta_0 (E \operatorname{sh} \eta_0 + A \operatorname{ch} \eta_0 + aU_0), \quad F = -\frac{A \operatorname{sh} \alpha}{2 \operatorname{ch} \beta}, \quad G = \frac{A \operatorname{ch} \alpha}{2 \operatorname{ch} \beta},$$

где введены обозначения:  $\alpha = \eta_0 + \eta_1$ ,  $\beta = \eta_1 - \eta_0$ .

Таким образом, получена функция тока  $\Psi(\xi, \eta)$ , выражающая решение обобщенной задачи Жуковского–Чаплыгина. Тогда для компонент скорости будут справедливы следующие выражения:

$$u = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right), \quad v = - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right).$$

**2.2. Задача теории упругости (об эксцентрической трубе, находящейся под равномерным внешним и внутренним давлением).** Граничные условия задачи (рис. 4):

$$\sigma_\eta|_{\eta=\eta_0} = -p_0, \quad \sigma_\eta|_{\eta=\eta_1} = -p_1, \quad \tau_{\eta\xi}|_{\eta=\eta_0} = \tau_{\eta\xi}|_{\eta=\eta_1} = 0. \quad (2.6)$$

Выражения для напряжений через бигармоническую функцию напряжений  $\Phi$  в криволинейных координатах имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_\eta &= H \frac{\partial}{\partial \xi} \left( H \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) - H \frac{\partial H}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, & \sigma_\xi &= H \frac{\partial}{\partial \eta} \left( H \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) - H \frac{\partial H}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \\ \tau_{\eta\xi} &= -H \frac{\partial^2 (H\Phi)}{\partial \eta \partial \xi} + H\Phi \frac{\partial^2 H}{\partial \eta \partial \xi}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Решение рассматриваемой задачи дано в [18], и функция напряжений в наших обозначениях имеет вид

$$\Phi = aJ\eta + a(A \cosh(2\eta) + B + C \sinh(2\eta)) \frac{\cos \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad (2.8)$$

то есть в отличие от функции тока (2.3) не содержит слагаемых с  $\frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi}$  и  $\frac{\eta \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi}$ . Постоянные, входящие в (2.8), определяются из граничных условий (2.6) и имеют вид:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{\Delta} (p_1 - p_0) \sinh \alpha, & B &= \frac{a}{\Delta} [(p_0 \sinh 2\eta_1 - p_1 \sinh 2\eta_0) \cosh \beta - (p_1 + p_0) \sinh \beta], \\ C &= \frac{a}{\Delta} (p_0 - p_1) \cosh \alpha, & J &= \frac{2a}{\Delta} (p_0 - p_1) \cosh \beta, & \Delta &= -2 \sinh \beta (\sinh^2 \eta_1 + \sinh^2 \eta_0). \end{aligned} \quad (2.9)$$

**2.3. Переход от граничных условий гидродинамической задачи к граничным условиям задачи теории упругости.** Перейдем от граничных условий (2.4) гидродинамической задачи к граничным условиям (2.6) задачи теории упругости:

$$\sigma_\eta|_{\eta=\eta_0} = \left( H \frac{\partial}{\partial \xi} \left( H \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) - H \frac{\partial H}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=\eta_0}.$$

Раскроем производную произведения  $H \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$  и сделаем переобозначение (вместо функции напряжений запишем функцию тока):

$$\sigma_\eta|_{\eta=\eta_0} = \left( H \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + H^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - H \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=\eta_0}.$$

Найдем производные функции тока по  $\xi$  и их граничные значения:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = -\frac{M(\eta) \sin \xi}{(\cosh \eta - \cos \xi)^2}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} = -\frac{M(\eta)}{(\cosh \eta - \cos \xi)^2} \left( \cos \xi - \frac{2 \sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi} \right).$$

Так как, согласно (2.4),  $M(\eta_0) = 0$ , то  $\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \Big|_{\eta=\eta_0} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} \Big|_{\eta=\eta_0} = 0$ , поэтому

$$\sigma_\eta \Big|_{\eta=\eta_0} = - \left( H \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)_{\eta=\eta_0} \cdot \frac{\partial H}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} = -\omega_0 \rho_0 \frac{\sinh \eta_0}{a} = -\omega_0 \frac{a}{\sinh \eta_0} \frac{\sinh \eta_0}{a} = -\omega_0.$$

Аналогично,  $\sigma_\eta \Big|_{\eta=\eta_1} = -\omega_1$ .

Рассмотрим теперь касательное напряжение

$$\tau_{\eta\xi} \Big|_{\eta=\eta_0} = \left( -H \frac{\partial^2 (H\Phi)}{\partial \eta \partial \xi} + H\Phi \frac{\partial^2 H}{\partial \eta \partial \xi} \right) \Big|_{\eta=\eta_0}.$$

После раскрытия производной произведения и переобозначения имеем

$$\begin{aligned} \tau_{\eta\xi} \Big|_{\eta=\eta_0} &= -\frac{\cosh \eta_0 - \cos \xi}{a} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial \eta \partial \xi} \Psi + \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + H \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta \partial \xi} - \Psi \frac{\partial^2 H}{\partial \eta \partial \xi} \right) \Big|_{\eta=\eta_0} = \\ &= -\frac{\cosh \eta_0 - \cos \xi}{a} \times \\ &\times \left( 0 \cdot \Psi + \frac{\sin \xi}{a} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} + \frac{\sinh \eta_0}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \Big|_{\eta=\eta_0} + \frac{\cosh \eta_0 - \cos \xi}{a} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \Psi \Big|_{\eta=\eta_0} - \Psi \cdot 0 \right). \end{aligned}$$

Так как  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{\sin \xi}{(\cosh \eta - \cos \xi)^2} \cdot \left( \frac{2M(\eta) \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} - \frac{dM}{d\eta} \right)$ , то с учетом (2.4)

$$\tau_{\eta\xi} \Big|_{\eta=\eta_0} = -\frac{\cosh \eta_0 - \cos \xi}{a} \left( \frac{\sin \xi}{a} \cdot \frac{\omega_0 \rho_0 a}{\cosh \eta_0 - \cos \xi} + \frac{(\cosh \eta_0 - \cos \xi) \cdot \sin \xi}{a \cdot (\cosh \eta - \cos \xi)^2} \cdot (-\omega_0 \rho_0 a) \right) = 0.$$

Аналогично,  $\tau_{\eta\xi} \Big|_{\eta=\eta_0} = 0$ .

То есть получены граничные условия, эквивалентные условиям (2.6):

$$\sigma_\eta \Big|_{\eta=\eta_0} = -p_0, \quad \sigma_\eta \Big|_{\eta=\eta_1} = -p_1, \quad \tau_{\eta\xi} \Big|_{\eta=\eta_0} = \tau_{\eta\xi} \Big|_{\eta=\eta_1} = 0.$$

Таким образом, можно сделать вывод о том, что гидродинамическая задача о движении вязкой жидкости, заключенной между двумя равномерно вращающимися эксцентрично расположенными круговыми цилиндрами, эквивалентна плоской задаче теории упругости о напряженном состоянии эксцентрического кольца, находящегося под действием равномерно распределенной по контурам нормальной нагрузки. Для получения аналогии следует в качестве нормальных граничных нагрузок  $p_0$  и  $p_1$  в задаче теории упругости положить угловые скорости  $\omega_0$  и  $\omega_1$  вращающихся цилиндров гидродинамической задачи.

### § 3. Графическое сравнение напряжений, соответствующих функции $\Phi$ и функции $\Psi$ , для случая эксцентрического кольца

С помощью формул (2.7) можно получить напряжения, соответствующие каждому из решений (2.3)–(2.5) (функция  $\Psi$  – решение гидродинамической задачи) и (2.8), (2.9) (функция  $\Phi$  – решение задачи теории упругости). Программа, реализующая графическую визуализацию напряжений, соответствующих каждой из этих функций, дает следующие результаты (на рис. 5–7 и 9–11 приведены графики для следующих значений входных данных:  $\rho_0 = 1$ ,  $\rho_1 = 3$ ,  $\Delta x = 0.8$ ,  $p_0 = 0.5$ ,  $p_1 = 2$ ).

**3.1. Графики зависимости напряжений, соответствующих функции напряжений  $\Phi$ , от переменной  $\xi$  для некоторых фиксированных значений переменной  $\eta$ .** Указанные



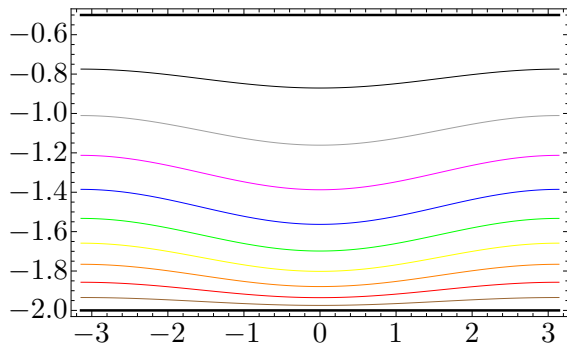


Рис. 5. Графики напряжения  $\sigma_\eta$ , соответствующие функции  $\Phi$ , для некоторых фиксированных значений  $\eta$

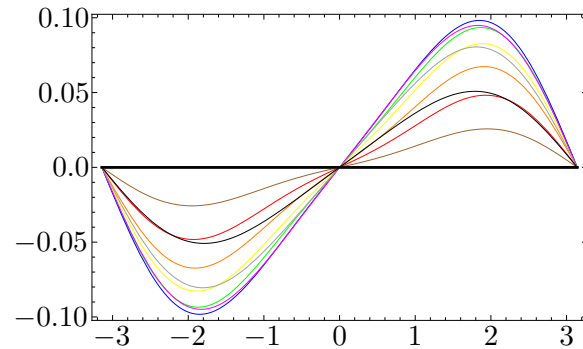


Рис. 6. Графики напряжения  $\tau_{\eta\xi}$ , соответствующие функции  $\Phi$ , для некоторых фиксированных значений  $\eta$

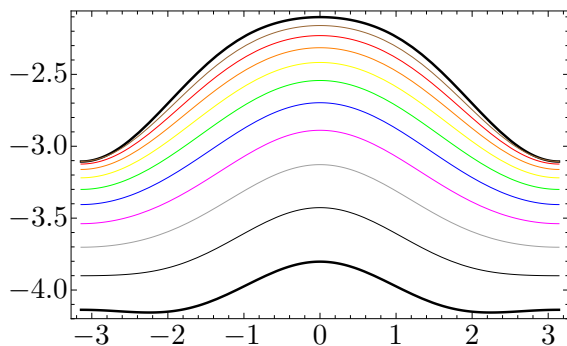


Рис. 7. Графики напряжения  $\sigma_\xi$ , соответствующие функции  $\Phi$ , для некоторых фиксированных значений  $\eta$

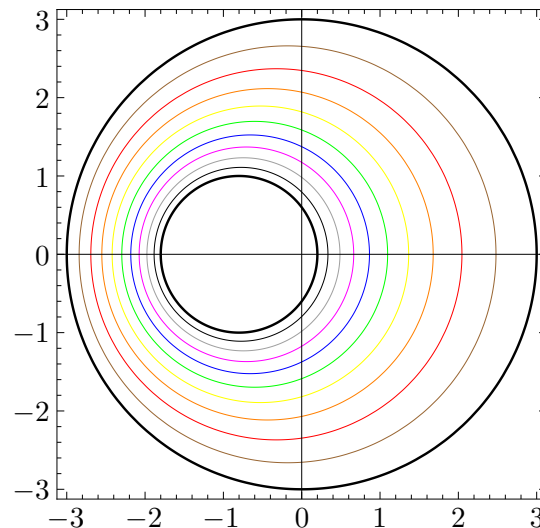


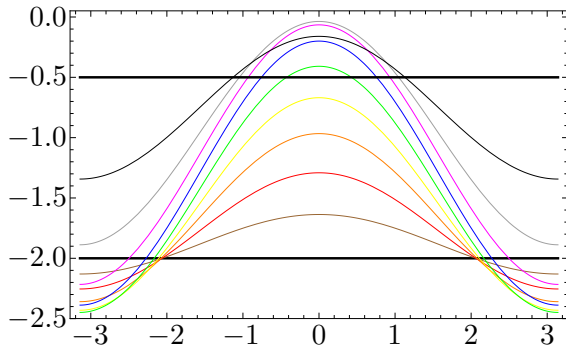
Рис. 8. Окружности, вдоль которых построены графики напряжений на рис. 5–7

графики напряжений  $\sigma_\eta$ ,  $\tau_{\eta\xi}$ ,  $\sigma_\xi$  изображены на рис. 5–7. Каждый из представленных на рис. 5–7 графиков — это напряжение вдоль окружности, лежащей внутри рассматриваемой области. Указанные окружности изображены соответствующим цветом на рис. 8.

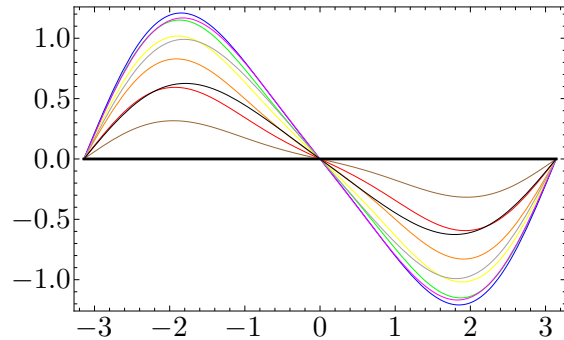
**3.2. Графики зависимости напряжений, соответствующих функции тока  $\Psi$ , от переменной  $\xi$  для некоторых фиксированных значений переменной  $\eta$ .** Указанные графики напряжений  $\sigma_\eta$ ,  $\tau_{\eta\xi}$ ,  $\sigma_\xi$  изображены на рис. 9–11. Как видно из графиков, представленных на рис. 5–7 и 9–11, напряжения, полученные через производные функции  $\Psi$ , не совпадают с напряжениями, найденными через производные функции  $\Phi$ , полученной в [18], хотя граничные условия выполняются и в том, и в другом случае (это хорошо видно из графиков напряжений  $\sigma_\eta$  и  $\tau_{\eta\xi}$ ).

**3.3. Построение функции напряжений, удовлетворяющей условиям однозначности смещений.** В результате графического сравнения напряжений было выдвинуто предположение о том, что несовпадение графиков, соответствующих функции  $\Phi$  и функции  $\Psi$ , связано с тем, что в плоской задаче теории упругости для двусвязной области необходимо

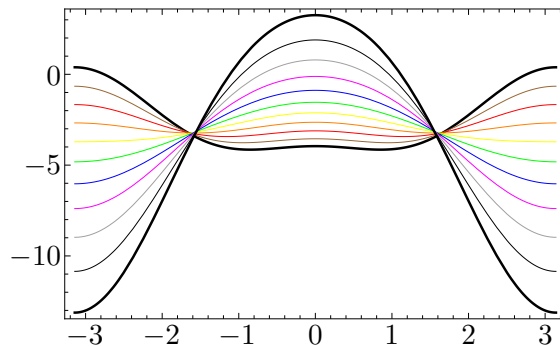




**Рис. 9.** Графики напряжения  $\sigma_\eta$ , соответствующие функции  $\Psi$ , для некоторых фиксированных значений  $\eta$



**Рис. 10.** Графики напряжения  $\tau_{\eta\xi}$ , соответствующие функции  $\Psi$ , для некоторых фиксированных значений  $\eta$



**Рис. 11.** Графики напряжения  $\sigma_\xi$ , соответствующие функции  $\Psi$ , для некоторых фиксированных значений  $\eta$

учитывать также условия однозначности смещений, которые в случае решения (2.3)–(2.5) не учитываются и не проверяются. Математическое отличие двух решений указано выше после формулы (2.8).

Для устранения этого отличия произведем видоизменение функции  $\Psi$  с учетом условий однозначности смещений и некоторых математических соображений. Функция тока (2.3) является, очевидно, линейной комбинацией следующих слагаемых, удовлетворяющих по-прежнему бигармоническому уравнению:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \eta, \quad \varphi_2 = \frac{\operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \quad \varphi_3 = \frac{\operatorname{ch} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \quad \varphi_4 = \frac{\eta \operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \\ \varphi_5 = \frac{\operatorname{ch} 2\eta \cos \xi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \quad \varphi_6 = \frac{\operatorname{sh} 2\eta \cos \xi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}. \end{aligned}$$

Проверим выполнение условий однозначности смещений для каждой из этих функций. Поскольку в данной задаче давление по внешней границе эксцентрического кольца распределено равномерно, то условия однозначности смещений имеют вид [16, 29]:

$$\oint_{\partial D_1} \frac{\partial p}{\partial n} ds = 0, \quad \oint_{\partial D_1} \frac{\partial q}{\partial n} ds = 0, \quad \oint_{\partial D_1} \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial n} ds = 0, \quad (3.1)$$

где  $p$  и  $q$  — сопряженные гармонические функции такие, что  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \Delta \Phi$ .

Гармонический оператор в биполярной системе координат имеет вид:

$$\Delta = H^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right), \quad (3.2)$$

откуда сразу видно, что  $\Delta \varphi_1 = 0$ , а значит третье условие (3.1) для функции  $\varphi_1$  выполняется. Так как в условиях (3.1)  $p$  и  $q$  — сопряженные гармонические функции такие, что  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \Delta \Phi$ , то легко получается вид этих функций для  $\varphi_1$ :  $p = Cy + C_1$ ,  $q = -Cx + C_2$ , где  $C, C_1, C_2$  — некоторые константы. Тогда  $\frac{\partial p}{\partial n} = Cn_y$ ,  $\frac{\partial q}{\partial n} = -Cn_x$ , где

$$n_x = \frac{\cosh \eta_1 \cos \xi - 1}{\cosh \eta_1 - \cos \xi}, \quad n_y = \frac{\sinh \eta_1 \sin \xi}{\cosh \eta_1 - \cos \xi} \quad (3.3)$$

— компоненты единичной нормали к внешнему контуру  $\eta = \eta_1$  (эти выражения получены из геометрических соображений), и для первых двух условий (3.1) имеем:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D_1} \frac{\partial p}{\partial n} ds &= \int_{-\pi}^{\pi} Cn_y \cdot \frac{1}{H} d\xi = Ca \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sinh \eta_1 \sin \xi}{(\cosh \eta_1 - \cos \xi)^2} d\xi = \\ &= -Ca \cdot \frac{\sinh \eta_1}{\cosh \eta_1 - \cos \xi} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \\ \oint_{\partial D_1} \frac{\partial q}{\partial n} ds &= \int_{-\pi}^{\pi} (-Cn_x) \cdot \frac{1}{H} d\xi = -Ca \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cosh \eta_1 \cos \xi - 1}{(\cosh \eta_1 - \cos \xi)^2} d\xi = \\ &= -Ca \cdot \frac{\sin \xi}{\cosh \eta_1 - \cos \xi} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \end{aligned}$$

то есть для функции  $\varphi_1$  все условия (3.1) выполняются.

Рассмотрим теперь функцию  $\varphi_2$ . Используя формулу (3.2), несложно определить, что  $\Delta \varphi_2 = 0$ , а значит для  $\varphi_2$  также выполняются все условия (3.1) по аналогии с  $\varphi_1$ .

Далее,  $\Delta \varphi_3 = \frac{2}{a^2}$ , откуда  $p = \frac{2}{a^2}x + Cy + C_1$ ,  $q = \frac{2}{a^2}y - Cx + C_2$ , поэтому

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D_1} \frac{\partial q}{\partial n} ds &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( -Cn_x + \frac{2}{a^2}n_y \right) \cdot \frac{1}{H} d\xi = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{-Ca^2 (\cosh \eta_1 \cos \xi - 1) + 2 \sinh \eta_1 \sin \xi}{a(\cosh \eta_1 - \cos \xi)^2} \right) d\xi = -\frac{Ca^2 \sin \xi + 2 \sinh \eta_1}{a(\cosh \eta_1 - \cos \xi)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D_1} \frac{\partial p}{\partial n} ds &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{2}{a^2}n_x + Cn_y \right) \cdot \frac{1}{H} d\xi = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{2(\cosh \eta_1 \cos \xi - 1) + Ca^2 \sinh \eta_1 \sin \xi}{a(\cosh \eta_1 - \cos \xi)^2} \right) d\xi = \frac{2 \sin \xi - Ca^2 \sinh \eta_1}{a(\cosh \eta_1 - \cos \xi)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \end{aligned}$$

$$\oint_{\partial D_1} \frac{\partial \Delta \varphi_3}{\partial n} ds = \oint_{\partial D_1} \left( \frac{\partial \Delta \varphi_3}{\partial x} n_x + \frac{\partial \Delta \varphi_3}{\partial y} n_y \right) ds = \oint_{\partial D_1} 0 ds = 0,$$

значит для функции  $\varphi_3$  также выполняются все три условия однозначности смещений (3.1).

Для дальнейшего полезно заметить, что  $n_x = \left(-\frac{\partial x}{\partial \eta} H\right)\Big|_{\eta=\eta_1}$ ,  $n_y = \left(-\frac{\partial y}{\partial \eta} H\right)\Big|_{\eta=\eta_1}$  (это видно из (2.2) и (3.3)). Тогда  $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial x}{\partial \eta} H\right)\Big|_{\eta=\eta_1} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial y}{\partial \eta} H\right)\Big|_{\eta=\eta_1} = \left(-\frac{\partial}{\partial \eta} H\right)\Big|_{\eta=\eta_1}$ . Проверим выполнение условий (3.1) для функции  $\varphi_4$ :

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_4 &= \frac{2}{a^2} (1 - \cosh \eta \cos \xi), \\ \oint_{\partial D_1} \frac{\partial \Delta \varphi_4}{\partial n} ds &= \oint_{\partial D_1} \left(-\frac{\partial \Delta \varphi_4}{\partial \eta} H\right)\Big|_{\eta=\eta_1} ds = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{a^2} \sinh \eta_1 \cos \xi d\xi = \\ &= \frac{2}{a^2} \sinh \eta_1 \sin \xi \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

то есть третье условие (3.1) выполняется. Для получения вида сопряженных функций  $p$  и  $q$ , соответствующих  $\varphi_4$ , потребуется в выражении (3.4) перейти к переменным  $x$ ,  $y$  и решить систему дифференциальных уравнений. Поскольку указанные преобразования довольно громоздки, приведем здесь сразу окончательный вид этих функций в переменных  $\eta$ ,  $\xi$ :

$$p = \frac{2}{a} \eta + C \frac{a \sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi} + C_1, \quad q = -\frac{2}{a} \xi - C \frac{a \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} + C_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D_1} \frac{\partial p}{\partial n} ds &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{\partial p}{\partial \eta}\right)\Big|_{\eta=\eta_1} d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{2}{a} + \frac{Ca \sin \xi \sinh \eta_1}{\cosh \eta_1 - \cos \xi}\right) d\xi = \\ &= \left(-\frac{2}{a} \xi - \frac{Ca \sinh \eta_1}{\cosh \eta_1 - \cos \xi}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{4\pi}{a} \neq 0, \end{aligned}$$

то есть первое условие однозначности смещений (3.1) для функции  $\varphi_4$  не выполняется. А значит это слагаемое не следует включать в общий вид функции напряжений (в противном случае нарушается механический смысл задачи).

Что касается функций  $\varphi_5$  и  $\varphi_6$ , то выкладки для них тоже будут достаточно громоздкими, однако можно показать, что для них все три условия (3.1) выполняются. Таким образом, из всех функций  $\varphi_k$  ( $k = \overline{1, 6}$ ) условия однозначности смещений нарушаются только для функции  $\varphi_4$ . Кроме того, можно заметить, что  $\varphi_2 = \frac{x}{a}$ , то есть является линейной функцией, а значит не влияет на компоненты тензора напряжений, которые выражаются через вторые частные производные бигармонической функции. Окончательно, с учетом этих замечаний, имеем следующий вид функции напряжений (по аналогии с (2.3)):

$$\begin{aligned} \Phi &= N(\eta) + \frac{M(\eta)}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \quad N(\eta) = A\eta - F \operatorname{ch} 2\eta - G \operatorname{sh} 2\eta, \\ M(\eta) &= C \operatorname{ch} \eta + F \operatorname{ch} \eta \operatorname{ch} 2\eta + G \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} 2\eta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Удовлетворяя теперь граничным условиям, аналогичным условиям (2.4):

$$H \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} = p_0 \rho_0, \quad H \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_1} = p_1 \rho_1, \quad (3.6)$$

после некоторых преобразований приходим к следующей системе уравнений для определения неизвестных коэффициентов функции (3.5):

$$\begin{aligned} A \sinh 2\eta_0 - 2C - 2F \cosh 2\eta_0 - 2G \sinh \eta_0 &= p_0, \\ A \sinh 2\eta_1 - 2C - 2F \cosh 2\eta_1 - 2G \sinh \eta_1 &= p_1, \\ A - 2F \sinh 2\eta_0 - 2G \cosh 2\eta_0 &= 0, \\ A - 2F \sinh 2\eta_1 - 2G \cosh 2\eta_1 &= 0. \end{aligned}$$

Решив эту систему, найдем коэффициенты функции напряжений (3.5), при этом оказывается, что она полностью совпадает с решением (2.8), (2.9).

Следует, однако, заметить, что граничные условия (3.6), записанные по аналогии с гидродинамической задачей, имеют более компактный и удобный вид, чем граничные условия непосредственно задачи теории упругости (2.6). Из (2.7) видно, что правые части условий (2.6) достаточно громоздки, и переход от этих условий к системе уравнений относительно коэффициентов искомой функции представляется гораздо более трудоемкой задачей, чем в случае граничных условий (3.6).

#### § 4. Заключение

Проведено исследование плоской задачи теории упругости в концентрическом и эксцентрическом кольце с помощью аналогии с гидродинамической задачей об определении поля скоростей вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами, а именно:

1. Проведена аналогия между течением вязкой жидкости, заключенной между двумя вращающимися цилиндрами, и плоской задачей теории упругости для случая концентрического кольца. Определены компоненты тензора напряжений для случая концентрического кольца и проведено сравнение полученного решения с известным решением задачи Ламе.

2. Проведена аналогия между течением вязкой жидкости, заключенной между двумя вращающимися цилиндрами, и плоской задачей теории упругости для случая эксцентрического кольца. Определено напряженное состояние в эксцентрическом кольце, соответствующее бигармонической функции напряжений, построенной по аналогии с изученной гидродинамической задачей с учетом трех условий однозначности смещений на одном из контуров границы области.

3. Исследовано аналитическое решение задачи плоской теории упругости для эксцентрического кольца, находящегося под равномерным внешним и внутренним давлением и проведено сравнение полученного решения с известным решением задачи теории упругости об эксцентрической трубе, находящейся под равномерным внешним и внутренним давлением.

**Финансирование.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18–31–00220).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский Н.Е. Обобщение задачи Биеркнеса о гидродинамических силах, действующих на пульсирующие тела внутри жидкой массы // Собр. соч. Т. 2. Гидродинамика. М.–Л.: Гостехиздат, 1949. 764 с. <http://books.e-heritage.ru/book/10075053>
2. Воинов В.В., Воинов О.В., Петров А.Г. Метод расчета потенциального обтекания тела вращения потоком несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т. 14. № 3. С. 797–802. <http://mi.mathnet.ru/zvmmf6394>
3. Терентьев А.Г., Терентьев А.А. Движение цилиндра в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса // Известия национальной академии наук и искусств Чувашской республики. 2002. № 2. С. 44–62. <https://elibrary.ru/item.asp?id=26847850>
4. Чернявский В.М. Точное решение о ползущем цилиндрическом течении в подшипнике со свободным шипом // Доклады Академии наук. 2008. Т. 418. № 1. С. 42–45. <https://elibrary.ru/item.asp?id=9590856>
5. Пятигорская О.С., Сенницкий В.Л. Пример движения цилиндрического твердого тела в вязкой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 2. С. 81–87. <https://elibrary.ru/item.asp?id=20653874>

6. Борисов А.В., Кузнецов С.П., Мамаев И.С., Тененев В.А. Описание движения тела эллиптического сечения в вязкой несжимаемой жидкости с помощью модельных уравнений, реконструированных на основе обработки данных // Письма в ЖТФ. 2016. Т. 42. Вып. 17. С. 9–19.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=27368304>
7. Grabski J.K., Mierzwiak M., Kolodziej J.A. Application of the method of fundamental solutions and the radial basis functions for peristaltic flow analysis // Recent Advances in Computational Mechanics: Proceedings of the 20th International Conference on Computer Methods in Mechanics (CMM 2013), Poznan, 2013. Leiden, Netherlands: CRC Press, 2014. P. 379–386.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=31778579>
8. Wang Z., Zhao J., Wu J., Tian R., Zhu J., Wang S. Analytical solution of Stokes flow velocity field in the fan-shaped cross section channel // Jixie Gongcheng Xuebao/Chinese Journal of Mechanical Engineering. 2014. Vol. 50. No. 18. P. 193–202.
9. Петров А.Г. О перемешивании вязкой жидкости в слое между вращающимися эксцентричными цилиндрами // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 5. С. 741–758.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=11526457>
10. Жуковский Н.Е., Чаплыгин С.А. О трении смазочного слоя между шипом и подшипником // Тр. Отделения физ. наук об-ва любителей естествознания. 1906. Т. 13. Вып. 1. С. 24–33.  
<http://books.e-heritage.ru/book/10080898>
11. Ballal B.Y., Rivlin R.S. Flow of a Newtonian fluid between eccentric rotating cylinders: inertial effects // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1976. Vol. 62. Issue 3. P. 237–294.  
<https://doi.org/10.1007/BF00280016>
12. Казакова А.О., Петров А.Г. О поле скоростей вязкой жидкости между двумя цилиндрами, вращающимися и движущимися поступательно // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 3. С. 16–25. <https://doi.org/10.7868/S0568528116030087>
13. Колосов Г.В. Применение комплексной переменной к плоской задаче теории упругости. Л.–М.: ГТТИ, 1939. 224 с. <http://books.e-heritage.ru/book/10073874>
14. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1966. 817 с. <http://books.e-heritage.ru/book/10073062>
15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
16. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 560 с.
17. Lurie S.A., Vasiliev V.V. The biharmonic problem in the theory of elasticity. Amsterdam: Gordon and Breach Pub., 1995.
18. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. 232 с.  
<https://search.rsl.ru/ru/record/01006041987>
19. Lukic D.C., Prokic A.D., Brcic S.V. Stress state around cylindrical cavities in transversally isotropic rock mass // Geomechanics and Engineering. 2014. Vol. 6. No. 3. P. 213–233.  
<https://doi.org/10.12989/gae.2014.6.3.213>
20. Jankowska M.A., Kolodziej J.A. Application of the method of fundamental solutions for the plane elastoplastic problem // Sixth European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012). Vienna, 2012. P. 6296–6313.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=26912047>
21. Radi E. Path-independent integrals around two circular holes in an infinite plate under biaxial loading conditions // International Journal of Engineering Science. 2011. Vol. 49. No. 9. P. 893–914.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2011.04.011>
22. Bryla M., Krupoderov A.V., Kushunin A.A., Mityushev V., Zhuravkov M.A. Mathematical models of mechanical fields in media with inclusions and holes // Handbook of Functional Equations. New York: Springer, 2014. P. 15–42. [https://doi.org/10.1007/978-1-4939-1246-9\\_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4939-1246-9_2)

23. Lamichhane B.P. A mixed finite element method for the biharmonic problem using biorthogonal or quasi-biorthogonal systems // *Journal of Scientific Computing*. 2011. Vol. 46. No. 3. P. 379–396. <https://doi.org/10.1007/s10915-010-9409-7>
24. Mardanov R.F., Dunnett S.J., Zaripov S.K. Modeling of fluid flow in periodic cell with porous cylinder using a boundary element method // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2016. Vol. 68. P. 54–62. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.03.015>
25. Терентьев А.Г., Казакова А.О. Численное решение плоской задачи теории упругости в многосвязной области // *Вестник Чувашия государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*. 2016. № 2 (28). С. 35–48. <https://elibrary.ru/item.asp?id=27670650>
26. Казакова А.О., Терентьев А.Г. Численное моделирование плоской задачи о напряженном состоянии трубы, погруженной в жидкость // *ПММ*. 2014. Т. 78. № 5. С. 721–727. <https://elibrary.ru/item.asp?id=22565773>
27. Терентьев А.Г., Казакова А.О., Микишанина Е.А. Численное решение полигармонических уравнений в механике сплошных сред // *Труды VI Всероссийской конференции «Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений» (ITIDS'2018)*. Том. 1. Уфа: УГАТУ, 2018. С. 34–42. <https://elibrary.ru/item.asp?id=36338920>
28. Петров А.Г., Казакова А.О. Численный расчет течения вязкой жидкости между двумя движущимися цилиндрами // *Международ. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды»: тез. докл.* М.: МИАН, 2017. С. 118–121. <https://elibrary.ru/item.asp?id=32610205>
29. Казакова А.О., Иваницкий А.Ю. Дискретизация условий однозначности перемещений в плоской задаче теории упругости // *Вестник Чувашия государственного университета*. 2017. № 1. С. 241–251. <https://elibrary.ru/item.asp?id=28766353>
30. Слѣзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955. 521 с.

Поступила в редакцию 16.05.2019

Казакова Анастасия Олеговна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра актуарной и финансовой математики, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, 428015, Россия, г. Чебоксары, пр. Московский, 15.

E-mail: [kazakova\\_anastasia@bk.ru](mailto:kazakova_anastasia@bk.ru)

**A. O. Kazakova**

**On an analogy between two plane problems of mechanics in a ring**

**Citation:** *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 2, pp. 211–227 (in Russian).

**Keywords:** viscous fluid, plane problem of the theory of elasticity, annular domain, bipolar coordinates, stream function, stress function.

MSC2010: 76D07, 74A10

DOI: [10.20537/vm190206](https://doi.org/10.20537/vm190206)

The article discusses an analogy between two plane problems of continuum mechanics: the hydrodynamic problem of the motion of a viscous fluid enclosed between two rotating cylinders, and the plane problem of the theory of elasticity in stresses created in a tube by a constant normal external pressure. In both problems, the solution domain is a ring; within the framework of this paper, two cases are considered: a



concentric and an eccentric ring. In the first part of the article, an analogy is constructed for the case of a concentric ring; it is shown that in this case the solutions to the problems in question are expressed by functions of the same type. The second part of the article presents an attempt to build a direct analogy for the case of an eccentric ring and identifies the problems that arise. The third part of the article is aimed at establishing the stress state in the eccentric ring corresponding to the biharmonic stress function constructed by analogy with the hydrodynamic problem under study, taking into account the conditions for the single-valued displacements. As a result of the study, it can be concluded that an analogy between the problems under consideration can be established, but only taking into account the mechanical features of each of them. In the case of a concentric ring, there is a direct analogy.

**Funding.** The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18–31–00220).

## REFERENCES

1. Zhukovskii N.E. Generalization of the Bierknes problem of hydrodynamic forces acting on pulsating bodies inside the fluid mass, *Sobranie sochinenii. Tom 2. Gidrodinamika* (Collected works. Vol. 2. Hydrodynamics), Moscow–Leningrad: Gostekhizdat, 1949, 764 p.  
<http://books.e-heritage.ru/book/10075053>
2. Voinov V.V., Voinov O.V., Petrov A.G. A method of computing the potential flow round a solid of revolution in an incompressible fluid, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1974, vol. 14, issue 3, pp. 263–268.  
[https://doi.org/10.1016/0041-5553\(74\)90125-6](https://doi.org/10.1016/0041-5553(74)90125-6)
3. Terent'ev A.G., Terent'ev A.A. Motion of a cylinder in a viscous fluid at low Reynolds numbers, *Izvestiya Natsional'noi Akademii Nauk i Iskusstv Chuvashskoi Respubliki*, 2002, no. 2, pp. 44–62 (in Russian). <https://elibrary.ru/item.asp?id=26847850>
4. Chernyavskii V.M. Exact solution for creeping cylindrical flow in a free-dowel bearing, *Doklady Physics*, 2008, vol. 53, issue 1, pp. 19–22.  
<https://doi.org/10.1134/S1028335808010060>
5. Pyatigorskaya O.S., Sennitskii V.L. Example of motion of a cylindrical solid in a viscous liquid, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2013, vol. 54, no. 2, pp. 237–242.  
<https://doi.org/10.1134/S0021894413020089>
6. Borisov A.V., Kuznetsov S.P., Mamaev I.S., Tenenev V.A. Describing the motion of a body with an elliptical cross section in a viscous incompressible fluid by model equations reconstructed from data processing, *Technical Physics Letters*, 2016, vol. 42, no. 9, pp. 886–890.  
<https://doi.org/10.1134/S1063785016090042>
7. Grabski J.K., Mierzwiaczak M., Kolodziej J.A. Application of the method of fundamental solutions and the radial basis functions for peristaltic flow analysis, *Recent Advances in Computational Mechanics: Proceedings of the 20th International Conference on Computer Methods in Mechanics (CMM 2013)*, Poznan, 2013. Leiden, Netherlands: CRC Press, 2014, pp. 379–386.
8. Wang Z., Zhao J., Wu J., Tian R., Zhu J., Wang S. Analytical solution of Stokes flow velocity field in the fan-shaped cross section channel, *Jixie Gongcheng Xuebao/Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2014, vol. 50, no. 18, pp. 193–202.
9. Petrov A.G. The mixing of a viscous fluid in a layer between rotating eccentric cylinders, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, vol. 72, no. 5, pp. 536–549.  
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.11.009>
10. Zhukovskii N.E., Chaplygin S.A. Friction of a lubricating layer between the end journal and the bearing, *Trudy Otdeleniya Fizicheskikh Nauk Obshchestva Lyubitelei Estestvoznaniya*, 1906, vol. 13, no. 1, pp. 24–33 (in Russian). <http://books.e-heritage.ru/book/10080898>
11. Ballal B.Y., Rivlin R.S. Flow of a Newtonian fluid between eccentric rotating cylinders: Inertial effects, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1976, vol. 62, issue 3, pp. 237–294.  
<https://doi.org/10.1007/BF00280016>



12. Kazakova A.O., Petrov A.G. Viscous fluid velocity field between two cylinders which rotate and move translationally, *Fluid Dynamics*, 2016, vol. 51, no. 3, pp. 311–320.  
<https://doi.org/10.1134/S0015462816030029>
13. Kolosov G.V. *Primenenie kompleksnoi peremennoi k ploskoi zadache teorii uprugosti* (Application of a complex variable to the plane problem of elasticity theory), Leningrad–Moscow: Gostekhteorizdat, 1939, 224 p. <http://books.e-heritage.ru/book/10073874>
14. Muskhelishvili N.I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti* (Some basic problems of mathematical theory of elasticity), Moscow: Academy of Sciences of USSR, 1966, 817 p. <http://books.e-heritage.ru/book/10073062>
15. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoriya uprugosti* (Theory of elasticity), Moscow: Nauka, 1987, 248 p.
16. Timoshenko S.P., Goodier J.N. *Theory of elasticity*, Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha Ltd, 1970.
17. Lurie S.A., Vasiliev V.V. *The biharmonic problem in the theory of elasticity*, Amsterdam: Gordon and Breach Pub., 1995.
18. Uflyand Ya.S. *Bipolyarnye koordinaty v teorii uprugosti* (Bipolar coordinates in theory of elasticity), Moscow–Leningrad: Gos. Izd. Tekh. Teor. Lit., 1950, 232 p.
19. Lukic D.C., Prokic A.D., Brcic S.V. Stress state around cylindrical cavities in transversally isotropic rock mass, *Geomechanics and Engineering*, 2014, vol. 6, no. 3, pp. 213–233.  
<https://doi.org/10.12989/gae.2014.6.3.213>
20. Jankowska M.A., Kolodziej J.A. Application of the method of fundamental solutions for the plane elastoplastic problem, *Sixth European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012)*, Vienna, 2012, pp. 6296–6313.
21. Radi E. Path-independent integrals around two circular holes in an infinite plate under biaxial loading conditions, *International Journal of Engineering Science*, 2011, vol. 49, no. 9, pp. 893–914.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2011.04.011>
22. Bryla M., Krupoderov A.V., Kushunin A.A., Mityushev V., Zhuravkov M.A. Mathematical models of mechanical fields in media with inclusions and holes, *Handbook of Functional Equations*, New York: Springer, 2014, pp. 15–42.  
[https://doi.org/10.1007/978-1-4939-1246-9\\_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4939-1246-9_2)
23. Lamichhane B.P. A mixed finite element method for the biharmonic problem using biorthogonal or quasi-biorthogonal systems, *Journal of Scientific Computing*, 2011, vol. 46, no. 3, pp. 379–396.  
<https://doi.org/10.1007/s10915-010-9409-7>
24. Mardanov R.F., Dunnett S.J., Zaripov S.K. Modeling of fluid flow in periodic cell with porous cylinder using a boundary element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2016, vol. 68, pp. 54–62. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.03.015>
25. Terent'ev A.G., Kazakova A.O. Numerical solution of a plane problem of elasticity theory in multiply-connected domain, *Vestnik Chuvashskogo Gosudarstvennogo Pedagogicheskogo Universiteta imeni I. Ya. Yakovleva. Ser. Mekhanika Predel'nogo Sostoyaniya*, 2016, vol. 28, no. 2 (28), pp. 35–48 (in Russian). <https://elibrary.ru/item.asp?id=27670650>
26. Kazakova A.O., Terent'ev A.G. Numerical modelling of the plane problem of the stress state of a tube immersed in a liquid, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, vol. 78, no. 5, pp. 518–523. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2015.03.011>
27. Terent'ev A.G., Kazakova A.O., Mikishanina E.A. Numerical solution of polyharmonic equations in continuum mechanics, *Proceedings of the 6th All-Russian Scientific Conference "Information Technologies for Intelligent Decision Making Support"*, Vol. 1, Ufa: Ufa State Aviation Technical University, 2018, pp. 34–42 (in Russian). <https://elibrary.ru/item.asp?id=36338920>
28. Petrov A.G., Kazakova A.O. Numerical calculation of viscous fluid between two moving cylinders, *Proceedings of Int. Conf. "Modern problems of continuum mechanics"*, Moscow: Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, 2017, pp. 118–121 (in Russian).  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=32610205>
29. Kazakova A.O., Ivanitskiy A.Yu. Discretization of conditions for displacements to be unique in a plane problem of the elasticity theory, *Vestnik Chuvashskogo Universiteta*, 2017, no. 1, pp. 241–251 (in Russian). <https://elibrary.ru/item.asp?id=28766353>

30. Slezkin N.A. *Dinamika vyazkoi neszimaemoi zhidkosti* (Dynamics of viscous incompressible fluid), Moscow: Gos. Izd. Tekh. Teor. Lit., 1955.

Received 16.05.2019

Kazakova Anastasiya Olegovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Actuarial and Financial Mathematics, Chuvash State University, pr. Moskovskii, 15, Cheboksary, 428015, Russia.

E-mail: [kazakova\\_anastasia@bk.ru](mailto:kazakova_anastasia@bk.ru)