

УДК 532.5.031

© *М. В. Норкин***КАВИТАЦИОННОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ЦИЛИНДРА С ПЕРЕМЕННЫМ РАДИУСОМ В ЖИДКОСТИ ПОСЛЕ УДАРА**

Рассматривается плоская задача о движении кругового цилиндра с переменным радиусом в идеальной, несжимаемой, тяжелой жидкости. Предполагается, что начальное возмущение жидкости вызвано вертикальным и безотрывным ударом цилиндра, полупогруженного в жидкость. Особенностью этой задачи является то, что при определенных условиях (например, при быстром торможении цилиндра или при быстром уменьшении его радиуса), происходит отрыв жидкости от тела, в результате которого вблизи его поверхности образуются присоединенные каверны. Формы внутренних свободных границ и конфигурация внешней свободной границы заранее неизвестны и подлежат определению в ходе решения задачи. Формулируется нелинейная задача с односторонними ограничениями, на основе которой определяется связность зоны отрыва, а также формы свободных границ жидкости на малых временах. В случае когда давление на внешней свободной поверхности совпадает с давлением в каверне, строится аналитическое решение задачи. Для определения одной из двух симметричных точек отрыва получено трансцендентное уравнение, содержащее полный эллиптический интеграл первого рода и элементарные функции. При кавитационном торможении недеформируемого цилиндра найдена явная формула для внутренней свободной границы жидкости на малых временах. Показано хорошее согласование аналитических результатов с прямыми численными расчетами.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, цилиндр с переменным радиусом, удар, кавитационное торможение, свободная граница, точка отрыва, малые времена, число Фруда, число кавитации.

DOI: [10.20537/vm190209](https://doi.org/10.20537/vm190209)

Многие задачи морской и корабельной гидродинамики связаны с изучением резко нестационарного взаимодействия твердых тел с жидкостью. К ним относятся динамические смешанные задачи удара, разгона и торможения твердых тел, плавающих на поверхности жидкости или полностью в нее погруженных. Возникающие при их решении трудности обусловлены, главным образом, двумя факторами — явлением отрыва частиц жидкости от твердой поверхности и образованием брызговых струй. В результате отрыва вблизи поверхности тела образуется каверна и появляется новая внутренняя свободная граница жидкости. Форма каверны и конфигурация внешней свободной поверхности заранее неизвестны и подлежат определению в ходе решения задачи. Большой интерес представляют задачи, в которых начальное возмущение жидкости вызывается ударом плавающего тела [1]. В них, в зависимости от конкретной физической ситуации, удар может происходить как без отрыва частиц жидкости от смоченной поверхности тела, так и с образованием зон отрыва. При этом присоединенная каверна может возникать не только после отрывного удара тела в жидкости (что совершенно естественно), но также и после его безотрывного удара [2]. В последнем случае отрыв обусловлен процессами, происходящими уже после удара — законом движения тела и физическими параметрами задачи (числами Фруда и кавитации). Существенно отметить, что классическая модель удара от этих факторов не зависит [1]. В работе [2] изучение процесса кавитации на малых временах сведено к решению смешанной краевой задачи теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности

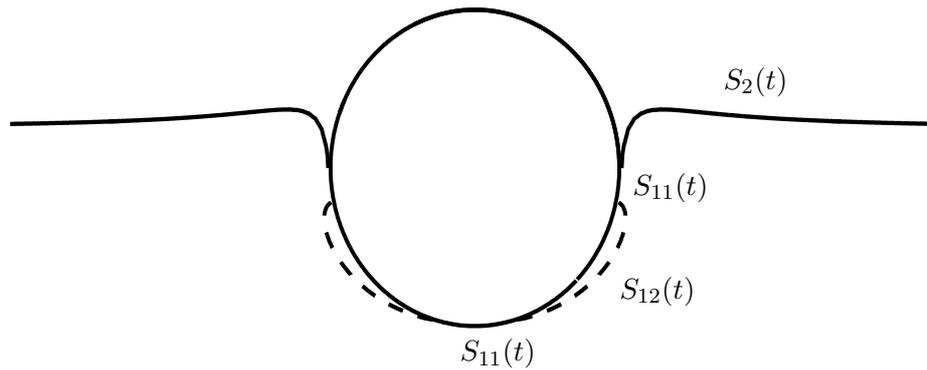


Рис. 1. Постановка задачи

тела. По своей структуре данная модель совпадает с классической задачей об ударе с отрывом, что обеспечивает регулярность ее решения в точках отрыва (выполнение условия Кутта–Жуковского) и позволяет использовать для ее решения известные численные методы. Теорема существования и единственности решения задачи об ударе с отрывом доказана в статье [3]. В работе [4] рассматривалась близкая задача о кавитационном торможении твердого тела произвольной формы под свободной поверхностью возмущенной жидкости. В [5] изучены свободные кавитационные движения цилиндра в жидкости после безотрывного удара. В [6] дано обобщение результатов статьи [2] на пространственные осесимметричные задачи. Общая идея, объединяющая работы [2, 4–6] состоит в том, что в них кавитация возникает в жидкости, которая до начала основного процесса каким-нибудь способом была возмущена (не обязательно ударом). При этом течение жидкости предполагается безотрывным.

В настоящей работе развиты результаты статей [2, 5] на случай цилиндра с переменным радиусом. В случае, когда давление на внешней свободной поверхности жидкости совпадает с давлением в зоне отрыва, а жидкость является неограниченной, строится аналитическое решение задачи. Для определения одной из двух симметричных точек отрыва получено трансцендентное уравнение, содержащее полный эллиптический интеграл первого рода и элементарные функции. В случае недеформируемого цилиндра найдена явная формула для возмущения внутренней свободной границы жидкости на малых временах. Ранее (в частности, в работе [5]) такая формула не приводилась. Отметим, что вообще в динамических задачах удара такого плана, явные выражения для формы внутренней свободной границы жидкости находились только при построении погранслойных решений в точках отрыва [7]. Полное аналитическое выражение для формы каверны не определялось. В настоящей работе также уделяется определенное внимание построению погранслойного решения в точке отрыва и показывается его согласование с внешним разложением. При этом структура решения несколько отличается от [7], где начальное возмущение жидкости вызывается отрывным ударом цилиндра. В статьях [2, 4–6] эти вопросы не обсуждались. В общем случае, для решения задачи на малых временах, применяется специальный итерационный метод, в котором последовательно уточняются неизвестные заранее зоны отрыва и контакта частиц жидкости. Проводится согласование аналитических и численных результатов. Отметим, что при численном и аналитическом решении задачи используются разные физические условия. Численный алгоритм основан на итерационном процессе, в котором последовательно уточняется знак давления в области контакта. При аналитическом решении задачи точки отрыва определяются из условия Кутта–Жуковского. Равносильность этих подходов на малых временах объясняется свойствами задачи с односторонними ограничениями.

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается динамическая смешанная задача о начальном этапе движения кругового цилиндра, плавающего на поверхности идеальной, несжимаемой, тяжелой жидкости. Предполагается, что начальное возмущение жидкости вызывается вертикальным и безотрывным ударом цилиндра, полупогруженного в жидкость. После удара цилиндр движется вглубь жидкости с постоянным ускорением (разгон, торможение или движение с постоянной скоростью) и меняет свой радиус по заранее заданному закону. При определенных условиях возникают области низкого давления вблизи тела и образуются присоединенные каверны. Формы каверн и конфигурация внешней свободной поверхности заранее неизвестны и подлежат определению в ходе решения задачи. Математическая постановка задачи, записанная в безразмерных переменных, в подвижной системе координат, связанной с цилиндром, имеет вид (рис. 1):

$$\Delta\Phi = 0, \quad R \in \Omega(t), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \dot{h}(t)n_y + \dot{a}(t), \quad R \in S_{11}(t), \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \dot{h}(t)\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + Fr^{-2}(y + h(t)) - 0.5\chi = 0, \quad R \in S_{12}(t), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \dot{h}(t)\sin\theta = \frac{\partial\eta}{\partial\theta}\dot{\theta}(t) + \frac{\partial\eta}{\partial t} + \dot{a}(t), \quad R \in S_{12}(t), \quad (1.4)$$

$$\dot{\theta}(t) = R^{-2} \left[x \left(\Phi_y - \dot{h}(t) \right) - y\Phi_x \right],$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \dot{h}(t)\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + Fr^{-2}\xi(x, t) = 0, \quad R \in S_2(t), \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial t}, \quad R \in S_2(t), \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0, \quad y = -H_b - h(t), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0, \quad x = H_R, \quad x = -H_R, \quad (1.7)$$

$$\Phi(x, y, 0) = \Phi_0(x, y), \quad \xi(x, 0) = 0, \quad \eta(\theta, 0) = 0, \quad (1.8)$$

$$\dot{h}(t) = -1 + \omega t, \quad \dot{a}(t) = \omega_r t. \quad (1.9)$$

Потенциал скоростей $\Phi_0(x, y)$, определяющий течение жидкости в момент, непосредственно следующий после удара (в начальный момент времени), находится на основании модели безотрывного удара [1]. В случае неограниченной жидкости решение задачи удара имеет простое аналитическое выражение: $\Phi_0(x, y) = y/(x^2 + y^2)$.

Безразмерные переменные вводятся по формулам

$$t' = \frac{a}{v_0} \cdot t, \quad x' = ax, \quad y' = ay, \quad \Phi' = av_0\Phi, \quad p' = \rho v_0^2 p, \quad v_0 = -V_y,$$

где штрихами помечаются размерные величины. Неподвижные координаты X, Y связаны с подвижными x, y соотношениями: $X = x, Y = y + h(t)$.

Здесь и далее используются следующие обозначения: $\Phi(x, y, t)$ – потенциал скоростей абсолютного движения жидкости, записанный относительно подвижной системы координат; $\Omega(t)$ – область, занятая жидкостью; $S_{11}(t)$ – часть поверхности цилиндра, на которой не происходит отрыва частиц жидкости, $S_{12}(t)$ – оторвавшаяся от поверхности цилиндра внутренняя свободная граница жидкости (граница каверны); $S_2(t)$ – свободная поверхность жидкости, которая первоначально была горизонтальной; $\vec{V} = (0, V_y)$ – скорость, приобретенная цилиндром в результате удара; $\dot{h}(t)$ – проекция безразмерной поступательной скорости движения цилиндра после удара на ось y ($\dot{h}(0) = -1$); $\dot{a}(t)$ – безразмерная скорость

изменения радиуса цилиндра; a — радиус цилиндра в начальный момент времени ($a(0) = a$); R — радиус-вектор с координатами (x, y) . Предполагается, что начало координат находится в центре цилиндра, ось y направлена вертикально вверх, течение жидкости симметрично относительно оси y .

Считаем, что на внешней свободной поверхности жидкости действует постоянное давление p_{out} (в частности, $p_{out} = p_a$, где p_a — атмосферное давление), а давление в каверне равно p_c , где p_c — давление насыщенных паров жидкости или газа, либо давление газа в каверне при искусственной кавитации.

Задача (1.1)–(1.9) содержит следующие безразмерные параметры:

$$Fr = \frac{v_0}{\sqrt{ga}}, \quad \chi = 2 \frac{p_{out} - p_c}{\rho v_0^2}, \quad p_0 = \frac{p_{out}}{\rho v_0^2}, \quad \omega = \frac{wa}{v_0^2}, \quad \omega_r = \frac{w_r a}{v_0^2}, \quad v_0 = -V_y,$$

где Fr — число Фруда; χ — число кавитации (безразмерная разность давлений); w — поступательное ускорение цилиндра; w_r — ускорение изменения его радиуса (отрицательные w_r соответствуют уменьшению величины $a(t)$); p_0 , ω , ω_r — безразмерные величины p_{out} , w , w_r соответственно; g — ускорение свободного падения; ρ — плотность жидкости.

На внешней и внутренней свободных границах формулируются динамические и кинематические условия (1.3)–(1.6). Кинематическое условие на $S_{12}(t)$ записывается в полярных координатах r, θ . Уравнения внутренней и внешней свободных границ относительно подвижной системы координат имеют вид:

$$R = 1 + 0.5\omega_r t^2 + \eta(\theta, t), \quad y = \xi(x, t) - h(t).$$

Кинематические уравнения (1.4), (1.6) получаются дифференцированием этих равенств по времени вдоль траектории движения жидкой частицы, расположенной на внутренней или внешней свободной границе. Соответствующие динамические условия (1.3), (1.5) формулируются на основании интеграла Коши–Лагранжа, записанного в подвижной системе координат.

В точках пересечения внутренней свободной границы жидкости с поверхностью цилиндра (в точках отрыва) ставится условие Кутта–Жуковского, означающее, что скорость жидкости в этих точках должна быть конечной.

§ 2. Асимптотический анализ задачи на малых временах

Основное предположение, которое делается при моделировании кавитационного отрыва в возмущенной жидкости, состоит в том, что отрыв происходит сразу по конечному и, в большинстве случаев, не маленькому участку поверхности тела. При этом важную роль играют первоначальные зоны отрыва и контакта частиц жидкости $S_{12}(0)$ и $S_{11}(0)$, которые получаются предельным переходом при $t \rightarrow 0$ границ $S_{12}(t)$ и $S_{11}(t)$. Для их определения необходимо сформулировать дополнительные динамическое и кинематическое условия типа неравенств. Решение задачи (1.1)–(1.9) на малых временах будем разыскивать в виде следующих асимптотических разложений:

$$\Phi(x, y, t) = \Phi_0(x, y) + t\Phi_1(x, y) + \dots \quad (2.1)$$

$$\xi(x, t) = t\xi_0(x) + t^2\xi_1(x) + \dots \quad (2.2)$$

$$\eta(\theta, t) = t\eta_0(\theta) + t^2\eta_1(\theta) + \dots \quad (2.3)$$

Подставляя (2.1)–(2.3) в уравнение и в краевые условия задачи (1.1)–(1.9), сводя с помощью формулы Тейлора при малых t краевые условия к условиям на фиксированной поверхности цилиндра и учитывая дополнительные условия типа неравенств, приходим для определения функции $\Phi_1 = \Phi_1(x, y)$ к смешанной краевой задаче теории потенциала в области $\Omega(0)$ с односторонними ограничениями на поверхности тела:

$$\Delta\Phi_1 = 0, \quad R \in \Omega(0); \quad \Phi_1 = -f(\Phi_0), \quad R \in S_2(0), \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \omega n_y + \omega_r, \quad 0.5\chi - \Phi_1 - f(\Phi_0) - Fr^{-2}y \geq 0, \quad R \in S_{11}(0), \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} \geq \omega n_y + \omega_r, \quad 0.5\chi - \Phi_1 - f(\Phi_0) - Fr^{-2}y = 0, \quad R \in S_{12}(0), \quad (2.6)$$

$$f(\Phi_0) = \frac{\partial\Phi_0}{\partial y} + 0.5(\nabla\Phi_0)^2,$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} = \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}, \quad y = -H_b; \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} = 0, \quad x = -H_R, H_R. \quad (2.7)$$

В силу неизвестности зоны отрыва данная задача является нелинейной и относится к классу задач со свободными границами. Обоснование краевых условий типа неравенств проводится по аналогии со случаем недеформируемого цилиндра [2]. Неравенство в (2.5) означает, что давление на смоченной поверхности цилиндра (в главном приближении по времени) не может быть ниже давления в каверне. В естественной ситуации ($p_c = 0$) оно означает, что давление должно быть неотрицательным. Второе неравенство в (2.6) говорит о том, что жидкие частицы не могут входить внутрь твердого тела, однако могут отрываться от твердой границы. Наличие сразу двух неравенств гарантирует существование единственного решения задачи. После решения задачи (2.4)–(2.7) коэффициенты асимптотических разложений (2.2), (2.3) находятся по формулам:

$$\xi_0(x) = \frac{\partial\Phi_0}{\partial y}, \quad 2\xi_1(x) = \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}, \quad \eta_0(\theta) = 0, \quad \eta_1(\theta) = 0.5 \left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} - \omega n_y - \omega_r \right]. \quad (2.8)$$

Отметим, что в рассматриваемом асимптотическом приближении внешняя свободная граница определяется по формуле (для случая $x > 0$):

$$y = t[\xi_0(x_1) + 1] + t^2[\xi_1(x_1) - 0.5\omega], \quad x_1 = x - 0.5\omega_r t^2, \quad 1 + 0.5\omega_r t^2 < x < \infty.$$

По своей структуре задача (2.4)–(2.7) совпадает с классической задачей об ударе с отрывом. Отсюда следует регулярность ее решения в точках отрыва (выполнение условия Кутта–Жуковского) и возможность применения для ее решения известных численных методов. С учетом этого и формул (2.8), функция (2.3), описывающая возмущение внутренней свободной границы жидкости на малых временах, будет непрерывной в точках отрыва, а ее первая производная будет иметь в них особенности типа квадратного корня.

§ 3. Построение аналитического решения

Как показывают численные расчеты, проведенные при $\chi > 0$, на поверхности тела имеется некоторый зазор (область контакта), отделяющий зону отрыва от внешней свободной

поверхности жидкости. Благодаря этому зазору происходит плавное изменение давления на границе тела при переходе от одной свободной границе к другой. При $\chi \rightarrow 0$ этот зазор исчезает и возникает наиболее благоприятная ситуация для построения аналитического решения задачи. Далее вкратце остановимся на основных этапах построения точного решения задачи (2.4)–(2.7) в случае неограниченной жидкости и $\chi = 0$. Вначале находится решение линейной (без учета неравенств) смешанной краевой задачи теории потенциала (2.4)–(2.7) с фиксированными точками раздела краевых условий первого и второго рода. После этого неизвестные заранее точки отрыва определяются из условия регулярности решения задачи в этих точках.

С помощью замены переменных $x \rightarrow x, y \rightarrow -y$ и конформного отображения

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1}, \quad z = x_1 + iy_1, \quad w = x + iy$$

указанная линейная задача сводится к смешанной краевой задаче теории потенциала в полуплоскости с неоднородными граничными условиями (на бесконечности возмущения затухают):

$$\Delta u = 0, \quad y_1 > 0, \quad -\infty < x_1 < \infty, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y_1} &= -\omega + \frac{\omega_r}{\sqrt{1-x_1^2}}, \quad y_1 = 0, \quad |x_1| < c_1, \\ u &= F(x_1), \quad y_1 = 0, \quad |x_1| > c_1, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} F(x_1) &= 0.5 - 2x_1^2 + Fr^{-2}\sqrt{1-x_1^2}, \quad c_1 < |x_1| < 1, \\ F(x_1) &= -\frac{2x_1^2 + 1}{2x_1^4}, \quad 1 < |x_1| < \infty, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где неизвестная заранее точка раздела краевых условий c_1 связана с координатами точки отрыва соотношениями $x_s = c_1, y_s = -\sqrt{1-c_1^2}$.

Решение линейной задачи (3.1)–(3.3) при любом фиксированном c_1 находится по аналогии со случаем недеформируемого цилиндра [5]. Функция $u(x_1, y_1)$ представляется в виде

$$u(x_1, y_1) = \int_0^\infty A(\lambda) e^{-\lambda y_1} \cos \lambda x_1 d\lambda,$$

где $A(\lambda)$ определяется из системы парных интегральных уравнений, связанных с тригонометрическими функциями:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda A(\lambda) \cos \lambda x_1 d\lambda &= \omega - \frac{\omega_r}{\sqrt{1-x_1^2}}, \quad 0 < x_1 < c_1; \\ \int_0^\infty A(\lambda) \cos \lambda x_1 d\lambda &= F(x_1), \quad c_1 < x_1 < \infty. \end{aligned}$$

Для решения полученной системы применяется метод подстановки [8, 9]:

$$A(\lambda) = B(\lambda) + C(\lambda), \quad B(\lambda) = \int_0^{c_1} \varphi(s) J_0(\lambda s) ds, \quad C(\lambda) = \int_{c_1}^\infty \psi(s) J_0(\lambda s) ds,$$

где $B(\lambda)$ и $C(\lambda)$ — решения систем парных уравнений рассматриваемого вида, в которых одно из уравнений является однородным (соответственно первое или второе), а $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода.

Далее, на основании разрывных интегралов Вебера–Шафхейтлина [10], однородные уравнения выполняются тождественно для любых функций $\varphi(s)$ и $\psi(s)$, а неоднородные сводятся к интегральным уравнениям типа Шлемильха

$$\int_0^{x_1} \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{x_1^2 - s^2}} = \omega x_1 - \omega_r \arcsin x_1, \quad 0 < x_1 < c_1,$$

$$\int_{x_1}^{\infty} \frac{\psi(s) ds}{\sqrt{s^2 - x_1^2}} = F(x_1), \quad c_1 < x_1 < \infty,$$

с точными решениями вида

$$\varphi(s) = \omega s - \frac{2}{\pi} \omega_r s K(s), \quad \psi(s) = -\frac{2}{\pi} \int_s^{\infty} \frac{x_1 F(x_1) dx_1}{\sqrt{x_1^2 - s^2}},$$

где $K(s)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

С помощью полученных формул находится явное выражение для производной функции $u(x_1, y_1)$ по переменной x_1 при $y_1 = 0$, $0 \leq x_1 < c_1$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{x_1 g(x_1, c_1)}{\sqrt{c_1^2 - x_1^2}} - \frac{2}{\pi} \omega_r x_1 \int_{x_1}^{c_1} \frac{K'(s) ds}{\sqrt{s^2 - x_1^2}},$$

$$g(x_1, c_1) = \omega - \frac{2}{\pi} \omega_r K(c_1) + \frac{2}{\pi} \int_{c_1}^{\infty} \frac{F'(t) \sqrt{t^2 - c_1^2}}{t^2 - x_1^2} dt.$$

Из условия регулярности решения задачи (2.4)–(2.7) в точке отрыва следует, что функция $g(x_1, c_1)$ должна стремиться к нулю при $x_1 \rightarrow c_1$. Переходя к пределу под знаком последнего интеграла и вычисляя полученный интеграл, приходим к трансцендентному уравнению для определения величины c_1 :

$$\frac{\pi}{2} (\omega - Fr^{-2}) - \left[4 + \frac{3}{2c_1^2} + \frac{3}{4c_1^4} \right] \sqrt{1 - c_1^2} + \left[\frac{1}{c_1^3} + \frac{3}{4c_1^5} \right] \arcsin c_1 - \omega_r K(c_1) = 0. \quad (3.4)$$

Полученное уравнение может быть эффективно решено численно методом секущих.

На основании полученных формул также может быть найдена явная формула для возмущения внутренней свободной границы жидкости на малых временах. Чтобы избежать очень громоздкой технической работы, ограничимся здесь случаем недеформируемого цилиндра ($\omega_r = 0$). Для определения функции $\eta_1(\theta)$ приходим к следующему выражению:

$$\eta_1(\theta) = \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - x_1^2} \left[\frac{x_1 f(x_1)}{\sqrt{x_1^2 - c_1^2}} + g(x_1) \right], \quad (3.5)$$

$$f(x_1) = \frac{\pi}{2} (\omega - Fr^{-2}) - \left(4 + \frac{3}{2x_1^2} + \frac{1}{4x_1^2 c_1^2} + \frac{1}{2x_1^4} \right) \sqrt{1 - c_1^2} +$$

$$+ \left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{4x_1^2 c_1^2} + \frac{1}{2x_1^4} \right) \frac{1}{c_1} \arcsin c_1,$$

$$g(x_1) = \frac{1}{2x_1^3 c_1^2} \sqrt{1 - c_1^2} \sqrt{x_1^2 - c_1^2} - \left(\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{4x_1^3 c_1^2} + \frac{1}{x_1^5} \right) \frac{2}{c_1} \sqrt{x_1^2 - c_1^2} \arcsin c_1 +$$

$$+ 2 \left(2x_1 + \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_1^5} \right) \ln \frac{\sqrt{1 - c_1^2} + \sqrt{x_1^2 - c_1^2}}{\sqrt{1 - x_1^2}},$$

где переменная x_1 связана с угловой координатой θ соотношением $x_1 = \cos \theta$.

Таким образом, форму каверны на малых временах можно описать с помощью элементарных функций. Однако совсем простого аналитического выражения здесь не получается. Заметим, что на основании формулы (3.4) функция $f(x_1)$ стремится к нулю при $x_1 \rightarrow c_1$. Вследствие этого первое слагаемое в квадратных скобках формулы (3.5) особенности не имеет и стремится к нулю при $x_1 \rightarrow c_1$ как $\sqrt{x_1^2 - c_1^2}$ (второе слагаемое ведет себя аналогичным образом).

§ 4. Погранслоное решение в точке отрыва

Из общей теории решения краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных следует, что функция $\eta_1(\theta)$ непрерывна в точке отрыва, а ее первая производная имеет в ней особенность типа квадратного корня. Чтобы сгладить эту особенность и получить регулярное выражение для возмущения внутренней свободной границы жидкости на малых временах, необходимо построить погранслоное решение в точке отрыва и согласовать его с внешним разложением. Поскольку функция Φ , определяемая формулой (2.1), регулярна в точке отрыва, то ее можно сразу подставить в кинематическое уравнение (1.4) и получить отдельное уравнение для возмущения внутренней свободной границы $\eta(\theta, t)$. Далее подробно остановимся на построении погранслоного решения в точке отрыва, наиболее удаленной от внешней свободной поверхности жидкости ($-0.5\pi < \theta < 0$). Для второй точки отрыва рассуждения аналогичны. Здесь также ограничимся случаем недеформируемого цилиндра.

Возмущение внутренней свободной границы, справедливое в окрестности точки отрыва, будем искать в виде

$$\eta(\theta, t) = \beta_1 t^{5/2} H(\tau) + o(t^{5/2}), \quad \tau = \frac{\theta - \theta_s}{t}, \quad (4.1)$$

где θ_s — угловая координата точки отрыва.

Подставляя (4.1) в кинематическое уравнение внутренней свободной границы, осуществляя процедуру сноса граничных функций с возмущенной свободной границы на поверхность цилиндра и учитывая краевое условие для функции Φ_0 на поверхности цилиндра, приходим в главном приближении по времени к соотношению, в котором все величины имеют порядок $t^{3/2}$. В результате для определения функции $H(\tau)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с нулевым начальным условием и условием срачивания с внешним решением на бесконечности:

$$(\tau - \beta)H'(\tau) - 2.5H(\tau) = -\sqrt{\tau}, \quad H(0) = 0, \quad H(\tau) \sim 0.5\sqrt{\tau}, \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (4.2)$$

Для получения последнего условия используется регулярное поведение решения задачи (2.4)–(2.7) в точке отрыва:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \omega \sin \theta \sim \beta_1 \sqrt{\theta - \theta_s}, \quad \theta \rightarrow \theta_s.$$

С учетом этого левая часть кинематического уравнения (1.4) имеет следующее асимптотическое представление: $t^{3/2} \beta_1 \sqrt{\tau}$.

Условие срачивания внешнего разложения (2.3) (с учетом (2.8) и последней формулы) с внутренним разложением (4.1) в промежуточном пределе приводит к искомому условию.

Решение задачи (4.2) при $\beta > 0$ имеет вид

$$H(\tau) = \frac{2}{\beta^2} \left[\frac{1}{3} \tau^{3/2} (\beta - \tau) + \frac{1}{5} \tau^{5/2} \right], \quad 0 \leq \tau \leq \beta,$$

$$H(\tau) = -\frac{2}{\beta^2} \left[\frac{1}{3} \tau^{3/2} (\tau - \beta) - \frac{1}{5} \tau^{5/2} \right] + \frac{4}{15\beta^2} (\tau - \beta)^{5/2}, \quad \beta \leq \tau < \infty,$$

где постоянная β находится по формуле

$$\beta = x(\Phi_{0y} + 1) - y\Phi_{0x}, \quad r = 1, \quad \theta = \theta_s.$$

Непосредственно можно убедиться, что функция $H(\tau)$ непрерывно дифференцируема при $\tau = 0$, β и удовлетворяет всем поставленным условиям. В случае неограниченной жидкости и $\chi = 0$ постоянные β и β_1 определяются в явном виде:

$$\beta = 2c_1 = 2 \cos \theta_s,$$

$$\beta_1 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\sin 2|\theta_s|} \left[\frac{15}{4c_1^5} + \frac{7}{4c_1^3} - \frac{3}{2c_1} + 4c_1 - \left(\frac{15}{4c_1^6} + \frac{3}{c_1^4} \right) \arcsin c_1 \sqrt{1 - c_1^2} \right],$$

где величина c_1 находится в результате решения трансцендентного уравнения (3.4) ($\omega_r = 0$).

§ 5. Прямая численная реализация и анализ результатов

Для численного решения задачи с односторонними ограничениями (2.4)–(2.7) применяется специальный итерационный метод, в котором последовательно уточняются неизвестные заранее первоначальные зоны отрыва и контакта частиц жидкости $S_{12}(0)$ и $S_{11}(0)$. В качестве начального приближения в этом итерационном процессе выбирается решение линейной (без учета неравенств) смешанной краевой задачи (2.4)–(2.7) с такой маленькой зоной $S_{12}(0)$, в окрестности которой нарушается динамическое условие в виде неравенства в (2.5) (левая часть этого неравенства равна разности $p - p_c$, причем в естественной ситуации $p_c = 0$). Как показывают численные расчеты, при удалении от точки отрыва функция $p - p_c$ вначале убывает, достигает отрицательного минимума, а затем возрастает до положительных значений. Точки, в которых рассматриваемая функция достигает отрицательного минимума, принимаются за следующие приближения к точкам отрыва. Затем процесс повторяется. Каждый следующий шаг итерационного процесса приводит к уменьшению зоны отрицательных значений функции $p - p_c$. Процесс заканчивается, когда эта зона исчезает. Заметим, что полученные на каждом шаге итерационного процесса линейные задачи (с фиксированными точками раздела краевых условий), решаются численно методом конечных элементов с применением пакета FreeFem++ [11]. При этом используется их слабая вариационная постановка. Подробное изложение данного итерационного метода приводится в работах, посвященных начальному этапу движения твердых тел в жидкости с учетом явления кавитации [2, 4–6]. Ранее аналогичные итерационные процессы применялись в плоских задачах об отрывном ударе твердых тел в жидкости [12], а также в контактных задачах теории упругости с неизвестными заранее областями контакта [13]. Итерационные методы последовательного уточнения неизвестной границы в применении к различным другим задачам со свободной границей изложены в монографии [14].

Таблица 1

ω_r	–1.8	–1.5	–1	–0.5	–0.2	–0.01
аналитическое решение	0.201	0.435	0.651	0.799	0.869	0.907
численное решение	0.202	0.425	0.630	0.769	0.834	0.868

Теперь перейдем к конкретным примерам. Вначале рассмотрим задачу о кавитационном торможении недеформируемого цилиндра ($w_r = 0$). В параграфе 3, в случае $\chi = 0$,

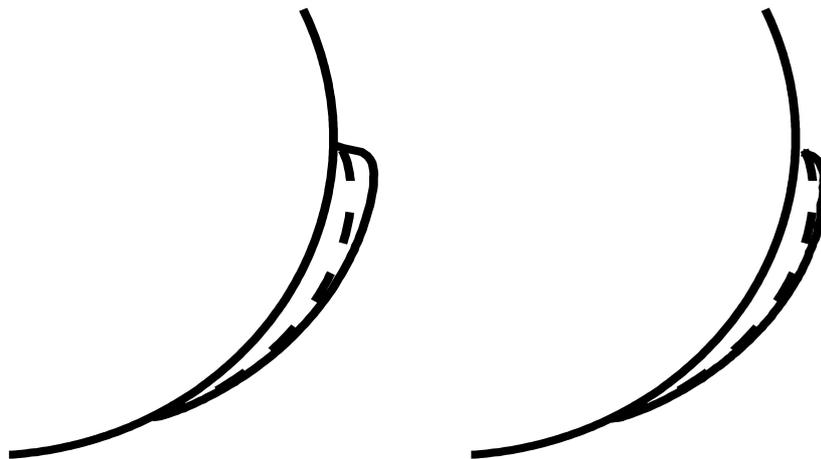


Рис. 2. Форма внутренней свободной границы на малых временах: $Fr = 3$, $\omega = 1.5$, $\omega_r = 0$, $t = 0.3$.
 Пунктирная линия — аналитическое решение ($p_0 = 0$), сплошная линия — численное решение ($p_0 = 0.1$).
 Рисунок слева (справа) соответствует случаю $H_b = H_R = 10(100)$

было найдено явное аналитическое выражение для формы каверны на малых временах. Остановимся на объяснении его физического смысла. Предположим, что каверна образуется естественным путем ($p_c \approx 0$ и, следовательно, $p_0 = 0.5\chi$). В предельном случае, когда $p_0 \rightarrow 0$, приходим к случаю, когда на внешней свободной поверхности находится газ низкого давления (вакуум). Проведенные исследования показали, что аналитическое решение, соответствующее описанной физической ситуации, хорошо согласуется с численным решением, полученным при $p_0 = 0.1$. Последний случай допускает реальную физическую трактовку. Пусть, например, $Fr = 3$, $\omega = 1.5$, $\omega_r = 0$, а дно и стенки удалены от тела на достаточно большие расстояния. Считаем, что на внешней свободной поверхности действует постоянное атмосферное давление. Тогда соответствующие размерные переменные будут иметь следующие порядки: $v_0 \approx 30$ м/с, $w \approx 150$ м/с², $a \approx 10$ м. На рис. 2 изображена форма внутренней свободной границы жидкости при $t = 0.3$ с ($t' \approx 0.1$ с). Пунктирной линией показано аналитическое решение, полученное на основании формулы (3.5), а сплошной линией — численное решение. Фигура слева соответствует случаю, когда дно и стенки удалены от тела на расстояние, которое в 10 раз больше характерного размера тела ($H_b = H_R = 10$), а фигура справа отвечает случаю, когда $H_b = H_R = 100$. Отметим, что при $p_0 = 0.1$ имеется очень маленький зазор между внутренней и внешней свободными границами. Угловые координаты точек отрыва (для фигуры слева) приближенно равны $\theta_1 = -1.069$, $\theta_2 = -0.027$ ($-\pi/2 < \theta < 0$). Для фигуры справа изменения весьма незначительные (-1.082 и -0.026 соответственно). Как показывают численные расчеты, в окрестности первой точки отрыва наблюдается очень хорошее согласование результатов уже при небольшом удалении дна и стенок от плавающего цилиндра (на расстояние в три раза больше характерного размера тела). Причем хорошее согласование сохраняется в широком диапазоне и нарушается при приближении ко второй точке отрыва. При удалении неподвижных твердых границ на большие расстояния удается получить хорошее согласование практически во всем диапазоне изменения угла θ ($\theta_1 < \theta < \theta_2$).

Наличие в постановке задачи числа кавитации позволяет по другому интерпретировать случай $\chi = 0$. Предположим, что на внешней свободной поверхности действует атмосфер-

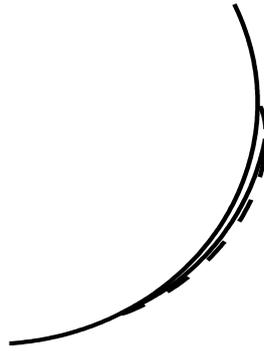


Рис. 3. Согласование аналитического решения (пунктирная линия) с погранслойным разложением (сплошная линия)



Рис. 4. Учет деформации цилиндра при его движении после удара с постоянной скоростью ($\chi = 1; 0.1$)

ное давление, а давление в каверне создается искусственным путем (сразу после безотрывного удара в сторону жидкости со стороны тела выделяется газ постоянного давления p_a). В результате совместного действия больших ускорений и искусственной кавитации образуется присоединенная каверна, в которой давление равно давлению выделенного газа. С физической точки зрения решение задачи должно удовлетворять условию Кутта–Жуковского в точках отрыва, которое, в силу свойств задачи с односторонними ограничениями, равносильно граничным условиям типа неравенств в (2.5), (2.6). Таким образом, давление в зоне контакта не может быть ниже величины p_a . Последнее условие становится совершенно естественным, если считать, что газ выделяется по всему периметру тела. При этом газ небольшого давления (в данном случае атмосферного) сам не оттеснит жидкость. Эффект достигается вместе с процессом торможения цилиндра. Отметим, что совместное действие больших ускорений и искусственной кавитации оказывает существенное влияние на реакцию жидкости на тело и может быть использовано в задачах управления движением судна.

На рис. 3 показано согласование точного решения задачи для случая неограниченной жидкости и $\chi = 0$ с погранслойным решением в точке отрыва. Параметры задачи выбраны следующим образом: $Fr = 3$, $\omega = 1.5$, $\omega_r = 0$, $t = 0.25$. Величины β , β_1 , θ_s имеют следующие приближенные значения: $\beta = 0.971$, $\beta_1 = 1.368$, $\theta_s = -1.064$. При уменьшении t кривые практически сливаются.

Теперь учтем деформацию цилиндра после удара. Исследование задачи проводится при следующих фиксированных значениях параметров: $Fr = 3$, $\omega = 0$, $H_R = 20$, $H_b = 20$. В таблице 1, для различных значений параметра ω_r , приведены численные значения абсциссы точки отрыва, полученные двумя различными способами. Во второй строке таблицы приведены численные значения величины $x_s = c_1$, найденные на основе решения трансцен-

дентного уравнения (3.4) (случай $\chi = 0$). В третьей строке даны аналогичные результаты, полученные с помощью прямого численного метода (случай $\chi = 0.2$). По аналогии со случаем недеформируемого цилиндра показывается, что случай $\chi = 0.2$ (в естественной ситуации $p_0 = 0.1$) имеет ясную физическую трактовку. Результаты сравнения приведены при фиксированных H_b и H_R . При удалении дна и стенок на большие расстояния точность улучшается.

На рис. 4 показаны формы свободных границ жидкости при различных числах кавитации. Рисунок слева соответствует случаю $\chi = 1$, а справа $\chi = 0.1$. Остальные параметры выбраны следующим образом: $Fr = 3$, $\omega = 0$, $\omega_r = -1.5$, $t = 0.3$, $H_b = 5$, $H_R = 5$ ($a(0.3) \approx 0.93$). Рис. 1 соответствует общей постановке задачи ($Fr = 1$, $\chi = 2$, $\omega = 1.7$, $\omega_r = -1.5$, $H_b = 5$, $H_R = 5$, $t = 0.3$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
2. Норкин М.В. Кавитационное торможение кругового цилиндра в жидкости после удара // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58. № 1. С. 102–107.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20170110>
3. Юдович В.И. Однозначная разрешимость задачи об ударе с отрывом твердого тела о неоднородную жидкость // Владикавк. матем. журн. 2005. Т. 7. № 3. С. 79–91.
<http://mi.mathnet.ru/vmj168>
4. Норкин М.В. Кавитационное торможение твердого тела в возмущенной жидкости // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13. № 2. С. 181–193. <https://doi.org/10.20537/nd1702003>
5. Норкин М.В. Свободное кавитационное торможение кругового цилиндра в жидкости после удара // Сибирский журнал индустриальной математики. 2018. Т. 21. № 3 (75). С. 94–103.
<https://doi.org/10.17377/sibjim.2018.21.309>
6. Норкин М.В. Математическая модель кавитационного торможения тора в жидкости после удара // Математическое моделирование. 2018. Т. 30. № 8. С. 116–130.
<https://doi.org/10.31857/S023408790001179-0>
7. Norkin M., Korobkin A. The motion of the free-surface separation point during the initial stage of horizontal impulsive displacement of a floating circular cylinder // Journal of Engineering Mathematics. 2011. Vol. 70. Issue 1–3. P. 239–254.
<https://doi.org/10.1007/s10665-010-9416-6>
8. Вирченко Н.А. Парные (тройные) интегральные уравнения. Киев: Выща школа, 1989.
9. Mandal B.N., Mandal N. Advances in dual integral equations. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 1999.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974.
11. Жуков М.Ю., Ширяева Е.В. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2008.
12. Дворак А.В., Теселкин Д.А. Численное исследование двумерных задач об импульсивном движении плавающих тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1986. Т. 26. № 1. С. 144–150.
<http://mi.mathnet.ru/zvmmf8210>
13. Рвачев В.Л., Проценко В.С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наукова думка, 1977.
14. Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач со свободной границей. М.: Изд-во МГУ, 1987.

Поступила в редакцию 14.01.2019

Норкин Михаил Викторович, д. ф.-м. н., профессор, Институт математики, механики и компьютерных наук, Южный федеральный университет, 344090, Россия, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а.
E-mail: norkinmi@mail.ru

M. V. Norkin

Cavitation braking of a cylinder with a variable radius in a fluid after impact

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 2, pp. 261–274 (in Russian).

Keywords: ideal incompressible fluid, cylinder with a variable radius, impact, cavitation braking, free boundary, separation point, small times, Froude number, cavitation number.

MSC2010: 76B07, 76B10, 76B20

DOI: [10.20537/vm190209](https://doi.org/10.20537/vm190209)

The 2D problem of the movement of a circular cylinder with a variable radius in an ideal, incompressible, heavy fluid is considered. It is assumed that the initial perturbation of the fluid is caused by a vertical and continuous impact of the cylinder semi-submerged in the fluid. The feature of this problem is that under certain conditions (for example, at fast braking of the cylinder or at fast reduction of its radius), there is a separation of the fluid from the body, resulting in the formation of attached cavities near its surface. The forms of the inner free boundaries and the configuration of the external free border are in advance unknown and are subject to definition when the problem is solved. A nonlinear problem with one-sided constraints is formulated, on the basis of which the connectivity of the separation zone and the shape of the free boundaries of the fluid at small times are determined. In the case where the pressure on the external free surface coincides with the pressure in the cavity, an analytical solution of the problem is constructed. To define one of two symmetric points of separation, a transcendental equation containing a full elliptic integral of the first kind and elementary functions is obtained. For the case of cavitation braking of a nondeformable cylinder, an explicit formula for the inner free boundary of the fluid on small times is found. Good agreement of analytical results with direct numerical calculations is shown.

REFERENCES

1. Sedov L.I. *Two-dimensional problems in hydrodynamics and aerodynamics*, New York: Interscience Publications, 1965.
2. Norkin M.V. Cavitation deceleration of a circular cylinder in a liquid after impact, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2017, vol. 58, no. 1, pp. 89–94.
<https://doi.org/10.1134/S0021894417010102>
3. Yudovich V.I. Unique solvability of the problem of impact with separation of a rigid body on a nonhomogeneous fluid, *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2005, vol. 7, no. 3, pp. 79–91 (in Russian).
<http://mi.mathnet.ru/eng/vmj168>
4. Norkin M.V. Cavitation braking of a rigid body in a perturbed liquid, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 13, no. 2, pp. 181–193 (in Russian).
<https://doi.org/10.20537/nd1702003>
5. Norkin M.V. Free cavitation deceleration of a circular cylinder in a liquid after impact, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2018, vol. 12, no. 3, pp. 510–518.
<https://doi.org/10.1134/S1990478918030110>

6. Norkin M.V. Mathematical model of a post-impact cavitation deceleration of a torus in a liquid, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2019, vol. 11, no. 2, pp. 301–308. <https://doi.org/10.1134/S2070048219020121>
7. Norkin M., Korobkin A. The motion of the free-surface separation point during the initial stage of horizontal impulsive displacement of a floating circular cylinder, *Journal of Engineering Mathematics*, 2011, vol. 70, issue 1–3, pp. 239–254. <https://doi.org/10.1007/s10665-010-9416-6>
8. Virchenko N.A. *Parnye (troinye) integral'nye uravneniya* (Dual (triple) integral equations), Kiev: Vyshcha shkola, 1989.
9. Mandal B.N., Mandal N. *Advances in dual integral equations*, Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 1999.
10. Bateman H, Erdelyi A. *Higher transcendental functions. Vol. 2*, New York–Toronto–London: McGraw-Hill, 1953. Translated under the title *Vysshie transtsendentnye funktsii. Tom 2. Funktsii Besselya, funktsii parabolicheskogo tsilindra, ortogonal'nye mnogochleny*, Moscow: Nauka, 1974.
11. Zhukov M.Yu., Shiryaeva E.V. *Ispol'zovanie paketa konechnykh elementov FreeFem++ dlya zadach gidrodinamiki, elektroforeza i biologii* (Using the FreeFem++ finite element package for hydrodynamics, electrophoresis and biology problems), Rostov-on-Don: Southern Federal University, 2008.
12. Dvorak A.V., Teselkin D.A. Numerical solution of two-dimensional problems of the pulse motion of floating bodies, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1986, vol. 26, no. 1, pp. 91–95. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(86\)90188-6](https://doi.org/10.1016/0041-5553(86)90188-6)
13. Rvachev V.L., Protsenko V.S. *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastei* (Contact problems of elasticity theory for nonclassical domains), Kiev: Naukova dumka, 1977.
14. Vabishchevich P.N. *Chislennyye metody resheniya zadach so svobodnoi granitsei* (Numerical methods for solving problems with a free boundary), Moscow: Moscow State University, 1987.

Received 14.01.2019

Norkin Mikhail Viktorovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University, ul. Mil'chakova, 8 a, Rostov-on-Don, 344090, Russia.

E-mail: norkinmi@mail.ru