ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 249–258.

УДК 517.977

© *Н. Н. Петров*

ЗАДАЧА ПРОСТОГО ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ВО ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ

В конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ рассматривается задача преследования группой преследователей одного убегающего с равными возможностями всех участников, описываемая в заданной временной шкале T системой вида

$$z_i^{\Delta} = u_i - v,$$

где f^{Δ} — Δ-производная функции f во временной шкале T. Множество допустимых управлений — шар радиусом единица с центром в начале координат. Терминальные множества — начало координат. Дополнительно предполагается, что убегающий в процессе игры не покидает пределы выпуклого многогранного множества с непустой внутренностью. Получены достаточные условия разрешимости задач преследования и уклонения. При исследовании в качестве базового используется метод разрешающих функций.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, преследователь, убегающий, фазовые ограничения, временная шкала.

DOI: 10.35634/vm200208

Введение

При изучении структуры решений систем дифференциальных уравнений, разностных уравнений и некоторых более общих функциональных уравнений присутствует определенное число близких свойств. В качестве единого инструмента для изучения этих свойств в настоящее время активно развивается теория динамических уравнений во временных шкалах. Временные шкалы (time scales) как математический объект впервые стали рассматриваться в работах В. Олбаха и С. Хильбера [1, 2]. Уравнения на временных шкалах дают возможность для одновременного описания динамики непрерывных и дискретных во времени систем. Временные шкалы находят свое применение при моделировании процессов в химии, биотехнологии, экономике, нейронных сетей, общественных науках [3, 4]. В данной работе рассматривается задача простого преследования группой преследователей одного убегающего в предположении, что движение участников описывается дифференциальными уравнениями в заданной временной шкале. Получены достаточные условия разрешимости как задачи преследования, так и задачи уклонения.

§ 1. Вспомогательные определения и факты

В данном разделе будут изложены базовые факты из теории временных шкал. Все приводимые ниже результаты могут быть найдены, например, в работах [6, 7].

Определение 1. Непустое замкнутое подмножество $T \subset \mathbb{R}^1$ такое, что $\sup\limits_{t \in T} t = +\infty$, называется временной шкалой.

Определение 2. Пусть T — временная шкала. Функция $\sigma\colon T \to \mathbb{R}^1$ вида

$$\sigma(t) = \inf\{s \in T \bigm| s > t\}$$

называется функцией сдвига.

Определение 3. Функция $f\colon T \to \mathbb{R}^1$ называется T-дифференцируемой в точке $t \in T$, если существует число $\gamma \in \mathbb{R}^1$, что для любого $\varepsilon > 0$ и любой окрестности W точки t справедливо неравенство

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - \gamma(\sigma(t) - s)| < \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

для всех $s \in T \cap W$.

Число γ в этом случае называется Δ-производной функции f в точке t. Δ-производная функции f в точке t будет обозначаться как $f^{\Delta}(t) = \gamma$.

Определение 4. Функция $f\colon T \to \mathbb{R}^n$, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ называется T-дифференцируемой в точке $t \in T$, если все функции $f_1, \dots, f_n$ являются T-дифференцируемыми в точке t.

Пусть T — временная шкала, $E \subset T$. Обозначим $R(E) = \{t \bigm| \sigma(t) > t\}$. Тогда множество $R(E)$ не более чем счетно.

Определение 5. Множество $E \subset T$ называется Δ-измеримым, если множество

$$\tilde{E} = E \cup \bigcup_{t \in R(E)} (t, \sigma(t))$$

измеримо по Лебегу.

Определение 6. Функция $f\colon T \to \mathbb{R}^1$ называется Δ-измеримой на Δ-измеримом множестве E, если функция $\tilde{f}$ вида

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t),\ t \in E, \\ f(t_i),\ t \in (t_i, \sigma(t_i)),\ t_i \in R(E), \end{cases}$$

измерима на множестве $\tilde{E}$.

Определение 7. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}^1$, $E \subset T$, называется Δ-интегрируемой на Δ-измеримом множестве E, если функция $\tilde{f}$ интегрируема по Лебегу на множестве $\tilde{E}$. Если f является Δ-интегрируемой на множестве E, то определим $\int_E f(s)\Delta s$, полагая

$$\int_E f(s)\Delta s = \int_{\tilde{E}} f d\mu,$$

где μ — мера Лебега.

§ 2. Постановка задачи

Пусть задана некоторая временная шкала T, $t_0 \in T$.

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E с законами движения вида

$$x_i^{\Delta} = u_i, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad \|u_i\| \leqslant 1, \tag{2.1}$$

$$y^{\Delta} = v, \quad y(t_0) = y^0, \quad \|v\| \leqslant 1. \tag{2.2}$$

Здесь $x_i, y, x_i^0, y^0, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$. Считаем, что $x_i^0 \neq y^0$ для всех $i \in I$. Дополнительно предполагается, что убегающий E в процессе игры не покидает пределы выпуклого множества Ω с непустой внутренностью вида

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^k \bigm| (p_j, y) \leqslant \mu_j, j = 1, \ldots, r\},$$

где $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы $\mathbb{R}^k$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — вещественные числа, (a, b) — скалярное произведение. Считаем, что $\Omega = \mathbb{R}^k$ при $r = 0$.

Δ-измеримую функцию $v\colon T \to \mathbb{R}^k$ назовем допустимой, если $\|v(t)\| \leqslant 1$, $y(t) \in \Omega$ для всех $t \in T$.

Определение 8. Квазистратегией Q_i преследователя P_i называется отображение, ставящее в соответствие набору $\bigl(x_i^0, y^0, t, v_t(\cdot)\bigr)$, $t \in T$, вектор u_i, $\|u_i\| \leqslant 1$, такой, что функция $u_i(t) = Q_i(x_i^0, y^0, t, v_t(\cdot))$ является Δ-измеримой, где $v_t(\cdot)$ — сужение функции v на промежуток $[t_0, t)$ (предыстория управления убегающего на $[t_0, t)$.)

Определение 9. В игре Γ происходит поимка, если существуют $T_0 > t_0$, контрстратегии $Q_1, \ldots, Q_n$ преследователей $E_1, \ldots, E_n$ такие, что для любой Δ-допустимой функции $v(\cdot)$ найдутся номер $l \in I$ и момент $\tau \in [t_0, T_0] \cap T$, для которых $x_l(\tau) = y(\tau)$.

Определение 10. В игре Γ происходит уклонение от встречи, если существует Δ-допустимая функция $v(\cdot)$ такая, что для любых траекторий $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ имеет место $x_i(t) \neq y(t)$ для всех $i \in I$, $t \in T$.

В случае $T = \mathbb{R}^1$ данная задача рассматривалась многими авторами. В [8, 9] получено решение такой задачи без фазовых ограничений, причем в [8] рассмотрен случай, когда множество допустимых управлений всех игроков — шар радиусом единица с центром в нуле, терминальные множества — начало координат, в [9] — множество допустимых управлений всех игроков — выпуклый компакт, терминальные множества — выпуклые компакты. В [10–13] получено решение задачи с фазовыми ограничениями. В работах [10, 11] решена задача с фазовыми ограничениями, когда множество допустимых управлений — шар радиусом единица с центром в начале координат, терминальные множества — начало координат, фазовое ограничение – выпуклый компакт. В [12] рассматривался случай, когда множество допустимых управлений игроков — выпуклый компакт, терминальные множества — выпуклые компакты, фазовые ограничения — выпуклое многогранное множества. Нестационарный вариант задачи простого преследования с фазовыми ограничениями рассматривался в [13]. По задачам преследования–уклонения в дискретной постановке обширная библиография приведена в [14, 15].

§ 3. Достаточные условия разрешимости задач преследования и уклонения

Вместо систем (2.1), (2.2) рассмотрим систему

$$z_i^\Delta = u_i - v, \quad z_i(t_0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0. \tag{3.1}$$

Обозначим как $\operatorname{Int} A$, $\operatorname{co} A$ соответственно внутренность и выпуклую оболочку множества A,

$$V = \{v \mid \|v\| \leqslant 1\}, \quad \lambda(z, v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda z \in V - v\}, \quad K(t) = \int_{t_0}^{t} \Delta s.$$

Теорема 1. *Пусть*

$$0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co} \{z_1^0, \ldots, z_n^0, p_1, \ldots p_r\}.$$

Тогда в игре Γ *происходит уклонение от встречи.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что существует $v_0 \in V$, $\|v_0\| = 1$ такой, что $(z_i^0, v_0) \leqslant 0$, $(p_l, v_0) \leqslant 0$ для всех i, l. Задаем управление убегающего E, полагая $v(t) = v_0$ для всех $t \in T$. Пусть $u_i(\cdot)$ — произвольные Δ-интегрируемые функции на $[t_0, t] \cap T$ для всех t и такие, что $\|u_i(t)\| \leqslant 1$. Тогда из (3.1) имеем

$$z_t(t) = z_i^0 + \int_{t_0}^{t} u_i(s)\Delta s - \int_{t_0}^{t} v_0 \Delta s. \tag{3.2}$$

Если $K(t) = 0$, то $z_i(t) = z_i^0 \neq 0$. Пусть $K(t) \neq 0$. Определим функции $\hat{u}_i(t) = \frac{1}{K(t)} \int_{t_0}^{t} u_i(s)\Delta s$. Тогда $\|\hat{u}_i(t)\| \leqslant 1$. Из (3.2) получаем

$$z_i(t) = z_i^0 + K(t)\hat{u}_i(t) - v_0 K(t).$$

Следовательно,

$$\|z_i(t)\| \geqslant \|z_i^0 - v_0 K(t)\| - K(t) = \sqrt{\|z_i^0\|^2 - 2K(t)(z_i^0, v_0) + K^2(t)} - K(t) > \\ > K(t) - K(t) = 0.$$

Кроме того,

$$(p_l, y(t)) = (p_l, y^0) + K(t)(p_l, v_0) \leqslant (p_l, v_0) \leqslant \mu_l$$

для всех l, $t \in T$. Тем самым теорема доказана. □

Лемма 1 (см. [16, с. 44]). *Пусть* $r = 1$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^k$. *Тогда*

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{b_1, \ldots, b_n, p_1\}$$

в том и только том случае, когда

$$\delta = \min_{v \in V} \max\{\max_{i \in I} \lambda(b_i, v), (p_1, v)\} > 0.$$

Замечание 1. Если центр шара V не совпадает с началом координат, то лемма 1 не верна.

Пример 1 ([17]). Пусть $k = 2$, V — круг радиусом 0.5 с центром в точке $(0, -0.5)$, $b_1 = (-1, -1)$, $b_2 = (1, -1)$, $p_1 = (1, 0)$. Тогда $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{b_1, b_2, p_1\}$. Взяв $v_0 = (0, 0)$, получим $(p_1, v_0) = 0$, $\lambda(b_1, v_0) = 0$, $\lambda(b_2, v_0) = 0$ и, следовательно, $\delta = 0$.

Лемма 2. *Пусть*

$$0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_1^0, \ldots, z_n^0, p_1\}.$$

Тогда существует $\tau \in T$ такой, что для любой Δ-допустимой функции $v(\cdot)$ найдется номер $l \in I$, для которого

$$\int_{t_0}^{\tau} \lambda(z_l^0, v(s))\Delta s \geqslant 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия леммы и леммы 1 следует, что существует $\delta > 0$ такое, что

$$\min_{v \in V} \max\{\max_{i \in I} \lambda(z_i^0, v), (p_1, v)\} \geqslant \delta.$$

Пусть $v(\cdot)$ — произвольная Δ-допустимая функция. Для каждого $t \in T$ определим множества

$$T_1(t) = \{t \in T \mid (p_1, v(t)) \geqslant \delta\}, \quad T_2(t) = \{t \in T \mid (p_1, v(t)) < \delta\}.$$

Так как $(p_1, y(t)) \leqslant \mu_1$ для всех $t \in T$, то справедливо неравенство

$$\int_{t_0}^{t} (p_1, v(s))\Delta s \leqslant \mu_0 = \mu_1 - (p_1, y^0).$$

Поэтому

$$\mu_0 \geqslant \int_{t_0}^{t} (p_1, v(s))\Delta s \geqslant \delta \int_{T_1(t)} \Delta s - \int_{T_2(t)} \Delta s,$$
$$K(t) = \int_{T_1(t)} \Delta s + \int_{T_2(t)} \Delta s.$$

Отсюда получаем справедливость неравенства

$$\int_{T_2(t)} \Delta s \geqslant \frac{K(t) - \mu_0}{1 + \delta}.$$

Обозначим $f_i(t, v(\cdot)) = \int_{t_0}^{t} \lambda(z_i^0, v(s))\Delta s$. Далее имеем

$$\sum_{i \in I} f_i(t, v(\cdot)) \geqslant \int_{t_0}^{t} \max_{i \in I} \lambda(z_i^0, v(s))\Delta s \geqslant \int_{T_2(t)} \max_{i \in I} \lambda(z_i^0, v(s))\Delta s \geqslant$$
$$\geqslant \delta \int_{T_2(t)} \Delta s \geqslant \delta \frac{K(t) - \mu_0}{1 + \delta}.$$

Так как $\lim\limits_{t \in T, t \to +\infty} K(t) = +\infty$, то существует $\tau \in T$, для которого $\sum\limits_{i \in I} f_i(\tau, v(\cdot)) \geqslant n$ для любой Δ-допустимой функции $v(\cdot)$. Из последнего неравенства следует справедливость утверждения леммы. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3. *Пусть*

$$0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}.$$

Тогда существует $\tau \in T$ *такой, что для любой* Δ*-допустимой функции* $v(\cdot)$ *найдется номер* $l \in I$*, для которого*

$$\int_{t_0}^{\tau} \lambda(z_l^0, v(s))\Delta s \geqslant 1.$$

Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 1.

Определим число

$$T_0 = \inf\{t \in T \mid \int_{t_0}^{t} \inf_{v(\cdot)} \max_{i \in I} \lambda(z_i^0, v(s))\Delta s \geqslant 1\}.$$

В силу ранее доказанного $T_0 < +\infty$.

Теорема 2. *Пусть* $r = 1$, $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_1^0, \ldots, z_n^0, p_1\}$. *Тогда в игре* Γ *происходит поимка.*

Доказательство. Предпишем преследователю P_i строить свое управление u_i следующим образом. Если в момент $t \in T$ выполнено неравенство $f_i(t, v(\cdot)) \leqslant 1$, то полагаем

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(z_i^0, v(t))z_i^0.$$

Если $\tau_i \in T$ — первый момент времени, для которого $f_i(\tau_i, v(\cdot)) = 1$, то считаем, что $\lambda(z_i^0, v(t)) = 0$ для всех $t \in T$, $t > \tau_i$. Тогда из (3.1) получаем

$$z_i(t) = z_i^0\Big(1 - \int_{t_0}^{t} \lambda(z_i^0, v(s))\Delta s\Big) = z_i^0(1 - f_i(t, v(\cdot))),$$

и поэтому $z_i(\tau_i) = 0$.

Пусть $\tau_i \in T$ — первый момент времени, для которого $f_i(\tau_i, v(\cdot)) > 1$, а для всех $t \in T$, $t < \tau_i$ выполняется неравенство $f_i(t, v(\cdot)) < 1$. Определим число

$$\tau_i^* = \sup\{t \in T \mid f_i(t, v(\cdot)) < 1\}.$$

Тогда $(\tau_i^*, \tau_i) \cap T = \emptyset$. Действительно, если бы существовал момент $\tau \in (\tau_i^*, \tau_i) \cap T$, то выполнялось бы неравенство $f_i(\tau, v(\cdot)) < 1$, что невозможно в силу определения числа τ_i^*. Полагаем в этом случае

$$u_i(\tau_i) = v(\tau_i) - \lambda^*(z_i^0, v(\tau_i))z_i^0, \text{ где } \lambda^*(z_i^0, v(\tau_i)) = \frac{1 - f_i(\tau_i^*, v(\cdot))}{\sigma(\tau_i^*) - \tau_i^*} = \frac{1 - f_i(\tau_i^*, v(\cdot))}{\tau_i - \tau_i^*}.$$

Отметим, что в данном случае $\lambda^*(z_i^0, v(\tau_i)) \leqslant \lambda(z_i^0, v(\tau_i))$, и поэтому $\|u_i(\tau_i)\| \leqslant 1$. Тогда

$$z_i(\tau_i) = z_i^0 - \int_{t_0}^{\tau_i^*} \lambda(z_i^0, v(s))\Delta s \cdot z_i^0 - \int_{\tau_i^*}^{\tau_i} \lambda^*(z_i^0, v(s))\Delta s \cdot z_i^0 =$$
$$= z_i^0\big[1 - f_i(\tau_i^*, v(\cdot)) - (1 - f_i(\tau_i^*, v(\cdot)))\big] = 0.$$

Из леммы 2 следует, что для каждой Δ-допустимой функции $v(\cdot)$ найдутся момент $\tau \in T$, $\tau \leqslant T_0$ и номер $l \in I$, для которых $f_l(\tau, v(\cdot)) \geqslant 1$. Поэтому из доказанного выше следует, что для каждой Δ-допустимой функции $v(\cdot)$ найдутся момент $\tau_0 \in T$, $\tau_0 \leqslant T_0$ и номер $l \in I$, для которых $z_l(\tau_0) = 0$. Это и означает, что в игре Γ происходит поимка. Теорема доказана. □

Теорема 3. *Пусть* $r = 0$, $0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$. *Тогда в игре* Γ *происходит поимка.*

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2.

Замечание 2. Если $T = \mathbb{R}^1$, то теорема 3 совпадает с теоремой Пшеничного [8].

Теорема 4. *Пусть* $n \geqslant k$, $0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{z_1^0, \ldots, z_n^0, p_1, \ldots, p_r\}$. *Тогда в игре* Γ *происходит поимка.*

Из доказательства следствия работы [18] следует, что существуют вектор $p_0 \in \mathbb{R}^k$ и вещественное число μ_0 такие, что $\Omega \subset \Omega_0$, где

$$\Omega_0 = \{y \in R^k \mid (p_0, y) \leqslant \mu_0\}$$

и $0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{z_1^0, \ldots, z_n^0, p_0\}$. Осталось применить либо теорему 2 (если $p_0 \neq 0$), либо теорему 3 (если $p_0 = 0$). Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* $n \geqslant k$ *и* Ω — *многогранник. Тогда в игре* Γ *происходит поимка.*

Доказательство. Так как Ω — многогогранник, то $0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{p_1, \ldots, p_r\}$. Поэтому выполнены условия теоремы 4. Следовательно, в игре Γ происходит поимка.

Замечание 3. Если $T = \mathbb{R}^1$, то следствие 1 совпадает с теоремой Иванова [10].

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-00232-20-01, проект 0827-2020-0010 «Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем» и РФФИ (проект 20-01-00293).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aulbach B., Hilger S. Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale // Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems: Contributions to the International Seminar ISAM-90, held in Gaussig (GDR), March 19–23, 1990. Berlin: Akademie-Verlag, 1990. P. 9–20.
2. Hilger S. Analysis on measure chains — a unified approach to continuous and discrete calculus // Results in Mathematics. 1990. Vol. 18. Issue 1. P. 18–56. https://doi.org/10.1007/BF03323153
3. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S. Impulsive differential equations and inclusions. New York: Hindawi Publishing Corporation, 2006.
4. Bohner M., Peterson A. Advances in dynamic equations on time scales. Boston: Birkhauser, 2003.
5. Martins N., Torres D. F. M. Necessary conditions for linear noncooperative N-player delta differential games on time scales // Discussiones Mathematica. Differential Inclusions, Control and Optimization. 2011. Vol. 31. No. 1. P. 23–37. https://doi.org/10.7151/dmdico.1126
6. Guseinov G. Sh. Integration on time scales // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. Vol. 285. No. 1. P. 107–127. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00361-5
7. Cabada A., Vivero D. R. Expression of the Lebesgue Δ-integral on time scales as a usual Lebesgue integral; application to the calculus of Δ-antiderivatives // Mathematical and Computer Modelling. 2006. Vol. 43. No. 1–2. P. 194–207. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2005.09.028
8. Пшеничный Б. Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
9. Григоренко Н. Л. Игра простого преследования–убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестн. МГУ. Сер. вычисл. математика и кибернетика. 1983. № 1. С. 41–47.
10. Иванов Р. П. Простое преследование–убегание на компакте // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254. № 6. С. 1318–1321. http://www.mathnet.ru/dan43986

11. Alias I., Ramli R., Ibragimov G., Narzullaev A. Simple motion pursuit differential game of many pursuers and one evader on convex compact set // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2015. Vol. 102. No. 4. P. 733–745. https://doi.org/10.12732/ijpam.v102i4.11
12. Петров Н. Н. Одна задача простого преследования с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 1992. Вып. 5. С. 22–26. http://mi.mathnet.ru/at3290
13. Банников А. С. О задаче позиционной поимки убегающего группой преследователей // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 3–7. http://www.mathnet.ru/vuu201
14. Азамов А. А. Основания теории дискретных игр. Ташкент: Niso Poligraf, 2011.
15. Кривонос Ю. Г., Матичин И. И., Чикрий А. А. Динамические игры с разрывными траекториями. Киев: Наукова Думка, 2005.
16. Благодатских А. И., Петров Н. Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009.
17. Банников А. С. Некоторые нестационарные задачи группового преследования // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2013. Вып. 1 (41). С. 3–46. http://www.mathnet.ru/iimi247
18. Петров Н. Н. К задаче группового преследования в дифференциальной игре с дробными производными, фазовыми ограничениями и простой матрицей // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 857–864. https://doi.org/10.1134/S0374064119060116

Поступила в редакцию 01.02.2020

Петров Николай Никандрович, д. ф.-м. н., главный научный сотрудник, лаборатория математической теории управления, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1;
профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: kma3@list.ru

Цитирование: Н. Н. Петров. Задача простого группового преследования с фазовыми ограничениями во временных шкалах // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 249–258.

MATHEMATICS 2020. Vol. 30. Issue 2. Pp. 249–258.

N. N. Petrov

The problem of simple group pursuit with phase constraints in time scales

Keywords: differential game, group pursuit, pursuer, evader, phase restriction, time scale.

MSC2010: 49N79, 49N70, 91A24

DOI: 10.35634/vm200208

In the finite-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^k$, the problem of pursuit of one evader by a group of pursuers with equal opportunities for all participants is considered, which is described in a given time scale T by a system of the form

$$z_i^{\Delta} = u_i - v,$$

where f^{Δ} is the Δ-derivative of the function f in the time scale T. The set of admissible controls is a ball of unit radius with the center at the origin. Terminal sets are the coordinate origin. Additionally, it is assumed that the evader does not leave the convex polyhedral set with a nonempty interior during the game. Sufficient conditions for the solvability of the pursuit and evasion problems are obtained. In the research, the method of resolving functions is used as the basic one.

Funding. This research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of state assignment No. 075-00232-20-01, project 0827-2020-0010 "Development of the theory and methods of control and stabilization of dynamical systems" and under grant 20-01-00293 from the Russian Foundation for Basic Research.

REFERENCES

1. Aulbach B., Hilger S. Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale, *Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems: Contributions to the International Seminar ISAM-90, held in Gaussig (GDR), March 19–23, 1990*, Berlin: Akademie-Verlag, 1990, pp. 9–20.
2. Hilger S. Analysis on measure chains — a unified approach to continuous and discrete calculus, *Results in Mathematics*, 1990, vol. 18, issue 1, pp. 18–56. https://doi.org/10.1007/BF03323153
3. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S. *Impulsive differential equations and inclusions*, New York: Hindawi Publishing Corporation, 2006.
4. Bohner M., Peterson A. *Advances in dynamic equations on time scales*, Boston: Birkhauser, 2003.
5. Martins N., Torres D. F. M. Necessary conditions for linear noncooperative N-player delta differential games on time scales, *Discussiones Mathematica. Differential Inclusions, Control and Optimization*, 2011, vol. 31, no. 1, pp. 23–37. https://doi.org/10.7151/dmdico.1126
6. Guseinov G. Sh. Integration on time scales, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, vol. 285, no. 1, pp. 107–127. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00361-5
7. Cabada A., Vivero D. R. Expression of the Lebesgue Δ-integral on time scales as a usual Lebesgue integral; application to the calculus of Δ-antiderivatives, *Mathematical and Computer Modelling*, 2006, vol. 43, no. 1–2, pp. 194–207. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2005.09.028
8. Pshenichnyi B. N. Simple pursuit by several objects, *Cybernetics*, 1976, vol. 12, issue 3, pp. 484–485. https://link.springer.com/article/10.1007/BF01070036
9. Grigorenko N. L. The game of simple pursuit–evasion of pursuit group and one evader, *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, 1983, no. 1, pp. 41–47 (in Russian).
10. Ivanov R. P. Simple pursuit–evasion on a compactum, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1980, vol. 254, no. 6, pp. 1318–1321 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/dan43986
11. Alias I., Ramli R., Ibragimov G., Narzullaev A. Simple motion pursuit differential game of many pursuers and one evader on convex compact set, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2015, vol. 102, no. 4, pp. 733–745. https://doi.org/10.12732/ijpam.v102i4.11

12. Petrov N. N. A certain simple pursuit problem with phase constraints *Automation and Remote Control*, 1992, vol. 53, no. 5, pp. 639–642. https://zbmath.org/?q=an:0798.90145
13. Bannikov A. S. About a problem of positional capture of one evader by group of pursuers, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2011, issue 1, pp. 3–7 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/vuu201
14. Azamov A. A. *Osnovaniya teorii diskretnykh igr* (Foundations of theory of discrete games), Tashkent: Niso Poligraf, 2011.
15. Krivonos Yu. G., Matichin I. I., Chikrii A. A. *Dinamicheskie igry s razryvnymi traektoriyami* (Dynamic games with discontinuous paths), Kiev: Naukova Dumka, 2005.
16. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009.
17. Bannikov A. S. Some non-stationary problems of group pursuit, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2013, issue 1 (41), pp. 3–46. http://mi.mathnet.ru/eng/iimi247
18. Petrov N. N. Group pursuit problem in a differential game with fractional derivatives, state constraints, and simple matrix, *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 6, pp. 841–848. https://doi.org/10.1134/S0012266119060119

Received 01.02.2020

Petrov Nikolai Nikandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Laboratory of Mathematical Control Theory, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia;
Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: kma3@list.ru

Citation: N. N. Petrov. The problem of simple group pursuit with phase constraints in time scales, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 2, pp. 249–258.