ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 290–311.

УДК 517.977

© *В. Е. Хартовский*

ОБ ОДНОМ ЛИНЕЙНОМ АВТОНОМНОМ ДЕСКРИПТОРНОМ УРАВНЕНИИ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ. I. ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ 0-УПРАВЛЯЕМОСТИ

Рассматривается линейное однородное автономное дескрипторное уравнение с дискретным временем

$$B_0 g(k+1) + \sum_{i=1}^{m} B_i g(k+1-i) = 0, \quad k = m, m+1, \ldots,$$

с прямоугольными (в общем случае) матрицами B_i. Такое уравнение возникает при исследовании задач управления системами со многими соизмеримыми запаздываниями в управлении: задачи 0-управляемости, задачи синтеза регулятора типа обратной связи, обеспечивающего успокоение решения исходной системы, задачи модальной управляемости (управляемости коэффициентов характеристического квазиполинома), задачи спектральной приводимости и задачи синтеза наблюдателей для двойственной системы наблюдения.

Для изучаемого дескрипторного уравнения с дискретным временем на основе решения конечной цепочки однородных алгебраических систем построено описание подпространства начальных условий, для которых это уравнение разрешимо. Получено представление всех его решений в виде, позволяющем организовать вычислительный процесс для нахождения одного из решений этого уравнения. Изучены свойства этого уравнения, используемые в задачах синтеза регуляторов для непрерывных систем со многими соизмеримыми запаздываниями в управлении. Отличительной чертой представленного исследования изучаемого объекта является использование подхода, не требующего построения преобразований, приводящих матрицы исходного уравнения к различным каноническим формам.

Ключевые слова: линейные системы со многими запаздываниями, линейное автономное дескрипторное уравнение с дискретным временем, подпространство начальных условий, представление решения.

DOI: 10.35634/vm200211

Введение

В статье изучается линейное однородное автономное дескрипторное уравнение с дискретным временем

$$B_0 g(k+1) + \sum_{i=1}^{m} B_i g(k+1-i) = 0, \quad k = m, m+1, \ldots, \tag{0.1}$$

возникающее при исследовании ряда задач управления объектами со многими запаздываниями. Здесь $B_i \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $g(k) \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \ldots$; $\mathbb{R}^{k\times m}$ — пространство матриц над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел, $\mathbb{R}^{k\times 1} = \mathbb{R}^k$. Мотивы изучения такого уравнения проиллюстрируем на примере исследования классической задачи полной 0-управляемости (полного успокоения) [1]. С этой целью рассмотрим линейную автономную дифференциально-разностную систему с соизмеримыми запаздываниями:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{m} \big(A_i x(t-ih) + B_i u(t-ih)\big), \quad t > 0, \tag{0.2}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — решение, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ — кусочно-непрерывное управление, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $i = \overline{0,m}$; $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Начальное условие для системы (0.2) имеет вид

$$x(t) = \eta(t),\ u(t) = u^0(t), \quad t \in [-mh, 0], \tag{0.3}$$

где функция $\eta(t)$, $t \in [-mh, 0]$, предполагается непрерывной, функция $u^0(t)$, $t \in [-mh, 0]$, — кусочно-непрерывной.

Определение 1 (см. [1]). Система (0.2) называется *полностью* 0–*управляемой*, если для любого начального условия (0.3) существуют момент времени $t_1 > 0$ и управление $u(t)$, $t > 0$, такие, что для этого управления и соответствующего решения выполняются тождества

$$x(t) \equiv 0, \quad t \geqslant t_1, \tag{0.4}$$

и

$$u(t) \equiv 0, \quad t > t_1. \tag{0.5}$$

Определение 2 (см. [2–4]). Система (0.2) называется 0–*управляемой*, если для любого начального условия (0.3) существуют момент времени $t_1 > 0$ и управление $u(t)$, $t > 0$, такие, что выполняется тождество (0.4).

Таким образом, задача 0-управляемости предъявляет существенно более слабые требования к исходной системе (0.2) в сравнении задачей полной 0-управляемости, поскольку не требует выполнения тождества (0.5).

Рассмотрим задачу 0-управляемости более подробно. Если выполняется соотношение (0.4), то управление $u(t)$ при $t > t_1 + mh$ должно удовлетворять уравнению

$$B_0 u(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i u(t - ih) = 0, \quad t > t_1 + mh. \tag{0.6}$$

Обозначим $u_k(t) = u(t + kh)$, $t \in (t_1 - h, t_1]$, $k = 1, 2, \dots$, и перепишем уравнение (0.6) в виде

$$B_0 u_{k+1}(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i u_{k+1-i}(t) = 0, \quad t \in (t_1 - h, t_1], \quad k = m, m+1, \dots. \tag{0.7}$$

Зафиксировав произвольное $t_0 \in (t_1 - h, t_1]$ и положив $g(k) = u_k(t_0)$, получим уравнение (0.1).

Обратно, пусть некоторая последовательность $\widetilde{g}(k)$ удовлетворяет уравнению (0.1). Тогда последовательность функций $\widetilde{u}_k(t) = \widetilde{g}(k) f(t)$, $t \in (t_1 - h, t_1]$, при любой скалярной кусочно-непрерывной функции $f(t)$, $t \in (t_1 - h, t_1]$, удовлетворяет уравнению (0.7). Приведенные рассуждения позволяют утверждать, что изучение уравнения (0.1) необходимо для описания вида управления u при $t > t_1 + mh$.

Уравнение (0.1) играет существенную роль (см. работы [3–9] и приведенную в них библиографию) при исследовании таких задач управления системами с многими запаздываниями, как задача синтеза регулятора типа обратной связи, обеспечивающего успокоение решения системы [3, 4], задача модальной управляемости (управляемости коэффициентов характеристического квазиполинома) [5–7], задача приведения системы к конечному спектру (задача спектральной приводимости) [8,9]. Оно также используется [10] при проектировании наблюдателей для двойственных систем наблюдения. Помимо этого, уравнение (0.1) возникает в случае замыкания линейной автономной управляемой дескрипторной системы с дискретным временем регулятором типа обратной связи по состоянию.

В настоящей статье приводятся обобщение и систематизация результатов исследования уравнения вида (0.1), полученных в [2,3]. Поскольку в общем случае возможно неравенство $\operatorname{rank} B_0 < n$, то уравнение (0.1) относится к классу дескрипторных уравнений с дискретным временем [11, с. 46]. Отметим, что дескрипторные уравнения (как разностные, так и дифференциальные) неоднократно изучались в различных публикациях, например в [11–14]. Однако основное внимание в литературе уделялось уравнениям с квадратными матрицами, обладающим свойством регулярности [11, с. 138] (то есть таким, для которых в уравнении (1.1) выполняются условия $m = 1$, $|\lambda B_0 + B_1| \not\equiv 0$), а их исследование базировалось на приведении матриц уравнения к некоторой канонической форме. В представленном исследовании изучается сингулярный случай, причем все результаты не требуют построения каких-либо канонических форм.

§ 1. Постановка начальной задачи и ее свойства

Рассмотрим линейное автономное дескрипторное уравнение с дискретным временем:

$$B_0 g(k+1) + \sum_{i=1}^{m} B_i g(k+1-i) = 0, \quad k = m, m+1, \ldots, \tag{1.1}$$

где $B_i \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $i = \overline{0,m}$, $g(k) \in \mathbb{R}^r$, $k = 1, 2, \ldots$. Начальные условия для уравнения (1.1) возьмем в виде

$$g(i) = \widetilde{g}_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{1.2}$$

где $\widetilde{g}_i \in \mathbb{R}^r$, $i = \overline{1,m}$, — некоторые заданные векторы.

Определение 3. Под решением начальной задачи (1.1), (1.2) будем понимать бесконечную последовательность векторов $g(k) \in \mathbb{R}^r$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющую соотношениям (1.1), (1.2).

Замечание 1. Если B_0 — квадратная невырожденная матрица, то для любого начального условия (1.2) решение начальной задачи существует и единственно, поскольку все $g(k) \in \mathbb{R}^r$, $k = m+1, m+2, \ldots$, при заданных $g(i)$, $i = \overline{1,m}$, могут быть определены поочередно из уравнения (1.1) после его умножения слева на матрицу B_0^{-1}. Если матрица B_0 прямоугольная, но $\operatorname{rank} B_0 = n$, то $g(k) \in \mathbb{R}^r$, $k = m+1, m+2, \ldots$, также поочередно находятся из уравнения (1.1), причем не единственным способом. Если $\operatorname{rank} B_0 < n$, то такой процесс осуществим не всегда, так как очередной вектор $g(k)$, $k > m$, при имеющихся векторах $g(k-i)$, $i = \overline{1,m}$, может определяться не единственным образом или, наоборот, не существовать. Поэтому и решение уравнения (1.1) для заданных начальных данных (1.2) может быть не единственным или не существовать. Несуществование решения при заданном начальном условии (1.2) означает, что последовательность векторов $g(k)$ обрывается при некотором k, $k > m$, из-за того, что очередной вектор $g(k)$ не может быть определен из уравнения (1.2). В случае нулевых начальных условий (1.2) уравнение (1.1) всегда имеет тривиальное решение, которое, однако, может быть не единственным.

Набор векторов $\widetilde{g}_i$, $i = \overline{1,m}$, для которого существует решение задачи (1.1), (1.2), будем называть допустимым набором начальных значений для уравнения (1.1). Если $m = 1$, то будем просто говорить о допустимом начальном векторе.

Замечание 2. Построение решения уравнения (1.1) в общем случае не является тривиальной задачей. Пусть в начальном условии (1.2) векторы $\widetilde{g}_i$, $i = \overline{1,m}$, образуют допустимый набор начальных значений для уравнения (1.1). Тогда для построения решения уравнения (1.1) вектор $g(k)$, при $k = m+1, m+2, \ldots$, должен быть выбран среди всех векторов, удовлетворяющих уравнению при этом k так, чтобы векторы $g(k-i)$, $i = \overline{0, m-1}$, составляли набор допустимых начальных значений для уравнения (1.1).

Пример 1. Пусть в уравнении (1.1) $m = r = 2$, $n = 3$ и

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Покажем, что данное уравнение имеет только тривиальное решение. Пусть $g_i(k)$, $i = 1, 2,$ — компоненты вектора $g(k)$. Тогда рассматриваемое уравнение (1.1) можно записать в координатной форме:

$$g_1(k+1)+g_1(k) = 0, \quad g_2(k)+g_1(k-1) = 0, \quad g_1(k+1)+g_2(k-1) = 0, \quad k = 2, 3, \ldots. \tag{1.3}$$

Используя второе и третье уравнения в (1.3), имеем

$$g_1(k+1) = -g_2(k-1) = g_1(k-2), \quad k = 3, 4, \ldots. \tag{1.4}$$

В то же время из первого уравнения системы (1.3) получаем, что $g_1(k+1) = -g_1(k) = g_1(k-1) = -g_1(k-2)$, $k = 4, 5, \ldots$. Сравнивая полученную формулу с (1.4), видим, что $g_1(k-2) = -g_1(k-2)$, $k = 4, 5, \ldots$. Значит, $g_1(k) = 0$, $k = 2, 3, \ldots$. В силу третьего уравнения в (1.3) получаем $g_2(k) = -g_1(k+2) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Далее из второго уравнения в (1.3) имеем $g_1(1) = 0$. Таким образом, рассматриваемая система имеет лишь тривиальное решение.

Теперь на примере этого уравнения проиллюстрируем, как при некотором начальном условии (1.2) обрывается процесс построения последовательности векторов $g(k)$ из-за того, что очередной вектор $g(k)$ не может быть определен. Возьмем в начальном условии (1.2) векторы $g(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $g(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Подставляя это начальное условие в уравнения (1.3), однозначно находим векторы $g(3) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ и $g(4) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Далее из первого и третьего уравнений в (1.3) имеем соответственно $g_1(5) = -1$ и $g_1(5) = 1$. Полученное противоречие означает, что вектор $g(5)$ не существует. Построенная конечная последовательность векторов $g(k)$, $k = \overline{1,4}$, не является решением задачи (1.1), (1.2) по определению.

Изучим вопрос описания множества всех наборов допустимых начальных значений для уравнения (1.1). С этой целью рассмотрим уравнение

$$\widehat{B}_0 \widehat{g}(k+1) + \widehat{B}_1 \widehat{g}(k) = 0, \quad k = m, m+1, \ldots, \tag{1.5}$$

с начальным условием

$$\widehat{g}(m) = \widehat{g}_0, \tag{1.6}$$

где

$$\widehat{B}_0 = \begin{bmatrix} B_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & I_r & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & I_r \end{bmatrix}, \quad \widehat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \ldots & B_{m-1} & B_m \\ -I_r & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -I_r & 0 \end{bmatrix},$$

$I_r \in \mathbb{R}^{r\times r}$ — единичная матрица, $\widehat{g}_0 \in \mathbb{R}^{rm}$ — заданный вектор. Уравнение (1.5) относится к тому же типу, что и уравнение (1.1). Поэтому решение начальной задачи (1.5), (1.6) определяется так же, как и решение начальной задачи (1.1), (1.2).

Лемма 1. *Если выполняется равенство*

$$\widehat{g}_0 = \mathrm{col}\big[\widetilde{g}_m, \dots, \widetilde{g}_1\big], \tag{1.7}$$

то существование решения одной из начальных задач (1.1)*,* (1.2) *или* (1.5)*,* (1.6) *влечет существование решения другой начальной задачи и справедлива формула*

$$g(k) = \widehat{E}\widehat{g}(k), \quad k = m, m+1, \dots, \tag{1.8}$$

где $\widehat{E} = [I_r, 0, \dots, 0]$, $\widehat{E} \in \mathbb{R}^{r\times mr}$.

Доказательство. Пусть последовательность $g(k)$, $k = 1, 2\dots$, есть решение начальной задачи (1.1), (1.2). Введем векторы $\widehat{g}(k) = \mathrm{col}\big[g(k), \dots, g(k-m+1)\big]$, $k = m+1$, $m+2, \dots$. Тогда последовательность векторов $\widehat{g}(k)$, $k = m, m+1, \dots$, как нетрудно видеть, удовлетворяет уравнению (1.5) и при этом $\widehat{g}(m) = \mathrm{col}\big[g(m), \dots, g(1)\big] = \mathrm{col}\big[\widetilde{g}_m, \dots, \widetilde{g}_1\big] = \widehat{g}_0$ в силу (1.7).

Обратно, пусть $\widehat{g}(k)$, $k = m, m+1, \dots$, есть решение начальной задачи (1.5), (1.6) и имеет место равенство (1.7). Представив векторы $\widehat{g}(k)$ в виде

$$\widehat{g}(k) = \mathrm{col}\big[g(k), \dots, g(k-m+1)\big], \tag{1.9}$$

где $g(i) \in \mathbb{R}^r$, $i = \overline{k-m+1, k}$, — векторные компоненты, перепишем (1.5) следующим образом:

$$\begin{bmatrix} B_0 g(k+1) \\ g(k) \\ \dots \\ g(k+2-m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m} B_i g(k+1-i) \\ -g(k) \\ \dots \\ -g(k+2-m) \end{bmatrix} = 0, \quad k = m, m+1, \dots.$$

Из полученного соотношения следует, что последовательность векторов $g(k)$, $k = 1, 2, \dots$, есть решение начальной задачи (1.1), (1.2).

Формула (1.8) следует из того, что $g(k)$ является первой векторной компонентой вектора $\widehat{g}(k)$ в представлении (1.9). □

В дальнейших рассуждениях настоящего параграфа считаем, что вектор $\widehat{g}_0$ в начальном условии (1.6) для уравнения (1.5) задается соотношением (1.7). Тогда в силу леммы 1 вектор $\widehat{g}(m)$ является допустимым начальным вектором для уравнения (1.5) в том и только том случае, когда его компоненты $\widetilde{g}_i$ являются допустимым набором начальных значений для уравнения (1.1).

В силу линейности уравнения (1.5) множество его допустимых начальных векторов, которое обозначим как $\mathbf{G}$, образует линейное подпространство в $\mathbb{R}^r$. Если $\widehat{g}(m) \in \mathbf{G}$, то решение $\widehat{g}(k)$, $k = m, m+1, \dots$, уравнения (1.5) существует, и в силу автономности уравнения (1.5) векторы $\widehat{g}(k)$, $k = m, m+1, \dots$, принадлежат подпространству $\mathbf{G}$. На основании леммы 1 подпространство $\mathbf{G}$ дает полное описание всех допустимых начальных условий для уравнения (1.1).

Пусть в подпространстве $\mathbf{G}$ задан некоторый базис. Введем матрицу $\widehat{T} \in \mathbb{R}^{rm\times r_0}$, где $r_0 = \dim \mathbf{G}$, в качестве столбцов которой возьмем векторы этого базиса. Тогда

$$\mathbf{G} = \widehat{T}\,\mathbb{R}^{r_0}.$$

Используя матрицу $\widehat{T}$, опишем множество наборов допустимых начальных значений для уравнения (1.1) и решение начальной задачи (1.1), (1.2).

Замечание 3. Если $r_0 = 0$, то множество допустимых начальных векторов уравнения (1.5) состоит только из нулевого вектора. Поэтому допустимый набор начальных значений для уравнения (1.1) в этом случае один, и состоит он из нулевых векторов, а уравнение (1.1) имеет лишь тривиальное решение. Далее считаем, что $r_0 \neq 0$.

Рассмотрим алгебраическое уравнение относительно неизвестной матрицы $S \in \mathbb{R}^{r_0\times r_0}$:

$$\widehat{B}_0\widehat{T}S + \widehat{B}_1\widehat{T} = 0. \tag{1.10}$$

Лемма 2. *Матрица S, удовлетворяющая уравнению* (1.10)*, существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $c_0 \in \mathbb{R}^{r_0}$ вектор $\widehat{T}c_0$ принадлежит подпространству $\mathbf{G}$. Поэтому в силу определения подпространства $\mathbf{G}$ для любого вектора $c_0 \in \mathbb{R}^{r_0}$ существует (в общем случае не единственный) вектор $c_1 \in \mathbb{R}^{r_0}$ такой, что справедливо равенство

$$\widehat{B}_0\widehat{T}c_1 + \widehat{B}_1\widehat{T}c_0 = 0. \tag{1.11}$$

Пусть $e_i \in \mathbb{R}^{r_0}$, $i = \overline{1, r_0}$, — столбцы единичной матрицы. Полагая поочередно в (1.11) $c_0 = e_i$, $i = \overline{1, r_0}$, находим векторы $s_i \in \mathbb{R}^{r_0}$, $i = \overline{1, r_0}$, удовлетворяющие равенствам

$$\widehat{B}_0\widehat{T}s_i + \widehat{B}_1\widehat{T}e_i = 0, \quad i = \overline{1, r_0}.$$

По построению матрица $S = [s_1, \ldots, s_{r_0}]$ удовлетворяет уравнению (1.10). □

Разобьем матрицу $\widehat{T}$ на блоки $\widehat{T} = \mathrm{col}\big[T_1, \ldots T_m\big]$, где каждая матрица $T_i \in \mathbb{R}^{r\times r_0}$, $i = \overline{1, m}$, состоит из r строк матрицы $\widehat{T}$, взятых с сохранением порядка их следования, с номерами j такими, что $(i-1)r < j \leqslant ir$.

Далее всегда считаем, что S — любое фиксированное решение уравнения (1.10). Запишем (1.10) в виде системы уравнений, отвечающих блокам T_i матрицы $\widehat{T}$ с учетом блочных структур матриц $\widehat{B}_0$ и $\widehat{B}_1$:

$$B_0T_1S + \sum_{i=1}^{m} B_iT_i = 0, \tag{1.12}$$

$$T_iS = T_{i-1}, \quad i = \overline{2, m}. \tag{1.13}$$

Обозначим $T = T_m$, тогда из (1.13) имеем

$$T_i = TS^{m-i}, \quad i = \overline{1, m}, \tag{1.14}$$

а (1.12) может быть переписано в виде

$$B_0TS^m + \sum_{i=1}^{m} B_iTS^{m-i} = 0. \tag{1.15}$$

Теорема 1. *Векторы $\widetilde{g}_i$, $i=\overline{1,m}$, образуют допустимый набор начальных значений для уравнения* (1.1) *тогда и только тогда, когда найдется вектор $c\in\mathbb{R}^{r_0}$ такой, что*

$$\widetilde{g}_i = TS^{i-1}c, \quad i=\overline{1,m}. \tag{1.16}$$

Доказательство. Пусть векторы $\widetilde{g}_i$, $i=\overline{1,m}$, образуют набор допустимых начальных значений для уравнения (1.1). Введем вектор $\widehat{g}_0$ согласно равенству (1.7). В силу леммы 1 вектор $\widehat{g}_0$ будет допустимым начальным вектором для уравнения (1.5), то есть $\widehat{g}_0\in\mathbf{G}$. Соотношение $\widehat{g}_0\in\mathbf{G}$ равносильно тому, что найдется вектор $c\in\mathbb{R}^{r_0}$ такой, что $\widehat{g}_0=\widehat{T}c$. Последнее равенство с учетом блочной структуры матрицы $\widehat{T}$ можно представить в виде m равенств

$$\widetilde{g}_i = T_{m-i+1}c, \quad i=\overline{1,m}, \quad c\in\mathbb{R}^{r_0}. \tag{1.17}$$

Заменив в соотношениях (1.17) матрицы T_i согласно (1.14), получим $\widetilde{g}_i=TS^{i-1}c$, $i=\overline{1,m}$.

Обратно, пусть векторы $\widetilde{g}_i$, $i=\overline{1,m}$, представимы в виде (1.16). Определив вектор $\widehat{g}_0$ согласно равенству (1.7) и воспользовавшись формулами (1.14), получим, что $\widehat{g}_0=\widehat{T}c$. Из последнего равенства следует, что вектор $\widehat{g}_0$ принадлежит подпространству $\mathbf{G}$, поэтому он является допустимым начальным вектором для уравнения (1.5). На основании леммы 1 заключаем, что векторы $\widetilde{g}_i$, $i=\overline{1,m}$, образуют допустимый набор начальных значений для уравнения (1.1). □

Теорема 2. *Пусть в начальном условии* (1.2) *векторы $\tilde{g}_i$ имеют вид $\widetilde{g}_i=TS^{i-1}c$, $i=\overline{1,m}$, с некоторым $c\in\mathbb{R}^{r_0}$. Тогда любое решение начальной задачи* (1.1), (1.2) *представимо в виде*

$$g(k) = T\psi(k)+\mu(k), \quad k=1,2,\ldots, \tag{1.18}$$

где последовательность $\psi(k)$, $k=1,2,\ldots$, определяется уравнением

$$\psi(k+1) = S\psi(k), \quad k=1,2,\ldots, \quad \psi(1)=c, \tag{1.19}$$

а последовательность $\mu(k)$, $k=1,2,\ldots$, удовлетворяет уравнению (1.1) *с нулевым начальным условием.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что последовательность $g(k)$, $k=1$, $2,\ldots$, является решением начальной задачи (1.1), (1.2). В силу формулы (1.19) имеем равенства

$$\psi(k+1-i) = S\psi(k-i) = \cdots = S^{m-i}\psi(k+1-m), \quad k\geqslant m, \quad 0\leqslant i\leqslant m. \tag{1.20}$$

Подставив последовательность $g(k)$, определяемую соотношениями (1.18), в уравнение (1.1) и применив формулу (1.20), в силу (1.15) получим

$$\sum_{i=0}^{m} B_i g(k+1-i) = \sum_{i=0}^{m} B_i\big(T\psi(k+1-i)+\mu(k+1-i)\big) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} B_i TS^{m-i}\psi(k+1-m) + \sum_{i=0}^{m} B_i\mu(k+1-i) =$$

$$= \left(B_0TS^m + \sum_{i=1}^{m} B_iTS^{m-i}\right)\psi(k+1-m) = 0, \quad k=m,m+1,\ldots.$$

Значит, $g(k)$, $k=1,2,\ldots$, удовлетворяет уравнению (1.1).

Теперь покажем, что имеет место равенство $g(i) = \widetilde{g}_i$, $i = \overline{1,m}$. Это проверим непосредственной подстановкой

$$g(i) = T\psi(i) + \mu(i) = T\psi(i) = TS^{i-1}\psi(1) = TS^{i-1}c = \widetilde{g}_i, \quad i = \overline{1,m}.$$

Пусть $g_1^*(k)$, $g_2^*(k)$, $k = 1,2,\ldots,$ — два любых решения начальной задачи (1.1), (1.2) с начальным условием $g_1^*(i) = \widetilde{g}_{1i}$, $g_2^*(i) = \widetilde{g}_{2i}$, $i = \overline{1,m}$. Тогда разность $g_1^*(k) - g_2^*(k)$, $k = 1,2,\ldots,$ есть решение уравнения (1.1) с нулевым начальным условием. Значит, любые два решения начальной задачи (1.1), (1.2) отличаются решением уравнения (1.1) с нулевым начальным условием. Выше было показано, что последовательность векторов $T\psi(k)$, $k = 1,2\ldots,$ (т. е. векторов (1.18) при $\mu(k) = 0$, $k = 1,2,\ldots$), является решением начальной задачи (1.1), (1.2). Поэтому любое другое решение $g(k)$, $k = 1,2,\ldots,$ начальной задачи (1.1), (1.2) представимо в виде (1.18). □

§ 2. Базис подпространства G

Чтобы описать все множество допустимых наборов начальных значений для уравнения (1.1), в соответствии с теоремой 1 достаточно знать какой-либо базис подпространства $\mathbf{G}$, то есть матрицу $\widehat{T}$, столбцы которой составляют такой базис. В настоящем параграфе построим одну из возможных матриц $\widehat{T}$. Для этого понадобятся вспомогательные последовательности матриц $K^{(i)} \in \mathbb{R}^{n^*\times n_i^0}$ и $L^{(i)} \in \mathbb{R}^{n^*\times n_i^0}$, $i = 0,1,\ldots$. Здесь $n_0^0 = mr$, $n^* = n + (m-1)r$, а числа n_i^0, $i = 0,1,\ldots,$ как будет показано ниже, образуют некоторую невозрастающую последовательность натуральных чисел. Заметим, что $n^* \times n_0^0$ — размер матриц $\widehat{B}_0$ и $\widehat{B}_1$.

Последовательности матриц $K^{(i)}$ и $L^{(i)}$, $i = 0,1,\ldots,$ будем строить следующим образом. Положим $K^{(0)} = \widehat{B}_0$, $L^{(0)} = \widehat{B}_1$. Предположим, что для некоторого целого $j \geqslant 0$ уже построены матрицы $K^{(i)}$, $L^{(i)}$, $i = \overline{0,j}$. Тогда на следующем шаге находим какую-либо матрицу $P^{(j)}$, строки которой составляют базис пространства решений $\mathcal{P}_j \subseteq \mathbb{R}^{1\times n^*}$ однородного уравнения $yK^{(j)} = 0$ относительно вектор-строки y подходящего размера. После этого находим какую-либо матрицу $T^{(j)}$, столбцы которой составляют базис пространства решений $\mathcal{T}_j \subseteq \mathbb{R}^{n_j^0}$ однородного уравнения $P^{(j)}L^{(j)}z = 0$ относительно вектор-столбца z подходящего размера. Далее полагаем

$$K^{(j+1)} = K^{(j)}T^{(j)}, \quad L^{(j+1)} = L^{(j)}T^{(j)}. \tag{2.1}$$

Замечание 4. Из формул (2.1) следует, что число столбцов матрицы $T^{(j)}$ совпадает с числом столбцов матриц $K^{(j+1)}$ и $L^{(j+1)}$, а число строк матрицы $T^{(j)}$ — с числом столбцов матриц $K^{(j)}$ и $L^{(j)}$. То есть $T^{(j)} \in \mathbb{R}^{n_j^0\times n_{j+1}^0}$.

Лемма 3. *Если существует номер $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ такой, что $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_{k+1}$, то*

$$\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_{k+j},\ j = 1,2,\ldots, \tag{2.2}$$

и

$$\mathcal{T}_{k+1+j} = \mathbb{R}^{n_{k+1}^0},\ j = 0,1,\ldots. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть при некотором $k \in \{0\}\cup\mathbb{N}$ выполняется равенство $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_{k+1}$. Тогда найдется невырожденная матрица C подходящего размера такая, что $CP^{(k)} = P^{(k+1)}$. Поэтому и на основании формулы $L^{(k+1)} = L^{(k)}T^{(k)}$ уравнение

$$P^{(k+1)}L^{(k+1)}z = 0$$

можно переписать в виде $CP^{(k)}L^{(k)}T^{(k)}z = 0$. Но по определению матрицы $T^{(k)}$ выполняется равенство $P^{(k)}L^{(k)}T^{(k)} = 0$. Следовательно, пространство $\mathcal{T}_{k+1}$ решений уравнения $P^{(k+1)}L^{(k+1)}z = 0$ совпадает с пространством $\mathbb{R}^{n^0_{k+1}}$, и за матрицу $T^{(k+1)}$ можно принять произвольную невырожденную матрицу размера $n^0_{k+1} \times n^0_{k+1}$. А это значит, что пространства решений уравнений $yK^{(k+1)} = 0$ и $yK^{(k+2)} = yK^{(k+1)}T^{(k+1)} = 0$ совпадают, т. е. $\mathcal{P}_{k+1} = \mathcal{P}_{k+2}$. Таким образом, показали, что соотношение $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_{k+1}$ влечет равенство $\mathcal{P}_{k+1} = \mathcal{P}_{k+2}$, что обосновывает справедливость формулы (2.2).

Выше было показано, что если $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_{k+1}$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, то $\mathcal{T}_{k+1} = \mathbb{R}^{n^0_{k+1}}$. Поэтому на основании формулы (2.2) заключаем, что

$$\mathcal{T}_{k+1+j} = \mathbb{R}^{n^0_{k+1+j}},\ j = 0, 1, \ldots. \tag{2.4}$$

Осталось показать, что $n^0_{k+1} = n^0_{k+1+j}$, $j = 1, 2, \ldots$. Действительно, в силу замечания 4 имеем $T^{(k+1+j)} \in \mathbb{R}^{n^0_{k+1+j} \times n^0_{k+2+j}}$, $j = 0, 1, \ldots$, а из (2.4) следует, что все матрицы $T^{(k+1+j)}$, $j = 0, 1, \ldots$, являются квадратными (поскольку ее столбцы составляют базис $\mathbb{R}^{n^0_{k+1+j}}$), поэтому $n^0_{k+1+j} = n^0_{k+2+j}$, $j = 0, 1, \ldots$. Отсюда следует, что $n^0_{k+1} = n^0_{k+1+j}$, $j = 1, 2, \ldots$. Формула (2.3) доказана. □

Введем матрицы $M_j = T^{(0)} \ldots T^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots$. Поскольку столбцы матриц $T^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots$, составляют базисы подпространств $\mathcal{T}_j$ соответственно, то столбцы матриц M_j, $j = 0, 1, \ldots$, линейно независимы. Действительно, предположим противное. Тогда найдется ненулевой вектор $g \in \mathbb{R}^{n^0_{j+1}}$ такой, что $M_j g = T^{(0)} \ldots T^{(j)} g = 0$. Значит, либо столбцы матрицы $T^{(0)}$ линейно зависимы, либо $T^{(1)} \ldots T^{(j)} g = 0$. Первое предположение противоречит определению матрицы $T^{(0)}$. Значит, $T^{(1)} \ldots T^{(j)} g = 0$. Но в силу определения матрицы $T^{(1)}$ последнее равенство говорит о том, что $T^{(2)} \ldots T^{(j)} g = 0$. Продолжая эти рассуждения, в конце концов придем к равенству $g = 0$, которое противоречит определению вектора g.

Рассмотрим подпространства $\mathbf{G}_j$, $j = 0, 1, \ldots$, натянутые на столбцы матрицы M_j, т. е. $\mathbf{G}_j = M_j \mathbb{R}^{n^0_{j+1}}$. Обозначим $n_j = \dim \mathcal{P}_j$.

Лемма 4. *Существует число $\nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такое, что выполняются соотношения*

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{P}_\nu = \mathcal{P}_{\nu+1} = \ldots, \quad \mathcal{P}_j \neq \mathcal{P}_{j+1}, \quad j = \overline{0, \nu - 1}, \tag{2.5}$$

$$\mathcal{T}_{\nu+1+j} = \mathbb{R}^{n^0_{\nu+1}}, \quad j = 0, 1, \ldots. \tag{2.6}$$

$$\mathbf{G}_0 \supset \mathbf{G}_1 \supset \ldots \supset \mathbf{G}_{\nu-1} \supseteq \mathbf{G}_\nu = \mathbf{G}_{\nu+1} = \ldots, \quad \mathbf{G}_j \neq \mathbf{G}_{j+1}, \quad j = \overline{0, \nu - 2}. \tag{2.7}$$

Замечание 5. Всюду в работе символы $\subset$ и $\supset$ обозначают строгое включение в частности, запись $A \subset B$ подразумевает, что $A \neq B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу первого соотношения в формулах (2.1) любое решение уравнения $yK^{(j)} = 0$ будет решением уравнения $yK^{(j+1)} = yK^{(j)}T^{(j)} = 0$. Поэтому

$$\mathcal{P}_j \subseteq \mathcal{P}_{j+1} \subseteq \mathbb{R}^{1 \times n^*}, \quad j = 0, 1, \ldots. \tag{2.8}$$

Из (2.8) следует, что последовательность целых чисел n_j, $j = 0, 1, \ldots$, не убывает и ограничена сверху числом n^*, то есть $0 \leqslant n_j \leqslant n_{j+1} \leqslant n^*$. Поэтому существует наименьший номер ν такой, что $n_\nu = \max\limits_j \{n_j\}$. Тогда $n_{\nu+j} = n_\nu$, $j = 0, 1, \ldots$, и $n_j < n_\nu$, $j < \nu$. Для любого $j \in \mathbb{N}$ в силу (2.8) выполняется $\mathcal{P}_\nu \subseteq \mathcal{P}_{\nu+j}$. Но среди всех $\mathcal{P}_j$, $j = 0, 1, \ldots$, подпространство $\mathcal{P}_\nu$ имеет максимальную размерность. Поэтому $\mathcal{P}_\nu = \mathcal{P}_{\nu+j}$, что вместе с соотношениями (2.8) доказывает формулу

$$\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{P}_\nu = \mathcal{P}_{\nu+1} = \ldots. \tag{2.9}$$

Докажем формулу (2.5). Предположим, что существует номер k, $k \in \{0, \dots, \nu - 1\}$, такой, что $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_{k+1}$. Значит, в силу леммы 3 имеет место равенство $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_{k+j}$, $j = 1, 2, \dots$. Но число ν есть минимальный номер максимального (в смысле размерности) подпространства из всех подпространств $\mathcal{P}_j$, $j = 0, 1, \dots$, поэтому $k \geqslant \nu$. Последнее равенство противоречит выбору числа k. Следовательно, формулу (2.9) можно переписать в виде (2.5).

Положив в формуле (2.3) $k = \nu$, получим формулу (2.6).

Теперь докажем формулу (2.7). Столбцы матрицы M_{j+1} являются базисом подпространства $\mathbf{G}_{j+1}$. Поэтому $\mathbf{G}_{j+1} = M_{j+1}\mathbb{R}^{n^0_{j+2}} = M_j T^{(j+1)}\mathbb{R}^{n^0_{j+2}}$. Но $T^{(j+1)}\mathbb{R}^{n^0_{j+2}} \subseteq \mathbb{R}^{n^0_{j+1}}$, откуда $\mathbf{G}_{j+1} \subseteq M_j\mathbb{R}^{n^0_{j+1}} = \mathbf{G}_j$, $j = 0, 1, \dots$.

Перейдем к доказательству соотношений $\mathbf{G}_j \neq \mathbf{G}_{j+1}$, $j = \overline{0, \nu - 2}$, входящих в формулы (2.7). Предположим противное: существует номер $j \in \{0, \dots, \nu - 2\}$ такой, что $\mathbf{G}_j = \mathbf{G}_{j+1}$. Значит, найдется невырожденная матрица C подходящего размера такая, что $M_j = M_{j+1}C$. В этом случае пространства решений однородных уравнений $yK^{(j+2)} = y\widehat{B}_0 M_{j+1} = 0$ и $yK^{(j+1)} = y\widehat{B}_0 M_j = y\widehat{B}_0 M_{j+1}C = 0$ совпадают, т. е. $\mathcal{P}_{j+1} = \mathcal{P}_{j+2}$. Но, как следует из (2.5), если $j \in \{0, \dots, \nu - 2\}$, то такого равенства быть не может. Поэтому $\mathbf{G}_j \supset \mathbf{G}_{j+1}$, $j = \overline{0, \nu - 2}$.

Из формулы (2.6) следует, что найдутся невырожденные матрицы $T^{(\nu+i+1)}$, $i = 0, 1, \dots$, такие, что $M_{\nu+i+1} = M_{\nu+i}T^{(\nu+i+1)}$, $i = 0, 1, \dots$. Отсюда имеем равенства $\mathbf{G}_\nu = \mathbf{G}_{\nu+1+i}$, $i = 0, 1, \dots$. Формула (2.7) доказана. □

Пример 2. Если $P^{(0)} = 0$, то в качестве базиса пространства решений $\mathcal{T}_0$ уравнения $P^{(0)}L^{(0)}z = 0$ можно взять столбцы любой квадратной невырожденной матрицы $T^{(0)}$ размера $n^0_0 \times n^0_0$. Нетрудно видеть, что в этом случае все матрицы $P^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots$, равны нулю, а в качестве матриц $T^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots$, можно брать любые невырожденные матрицы размера $n^0_0 \times n^0_0$.

Замечание 6. Из формул (2.7) следует, что если подпространства $\mathbf{G}_{\nu-1}$ и $\mathbf{G}_\nu$ не равны, то $\mathbf{G}_{\nu-1} \supset \mathbf{G}_\nu$. Приведем критерий совпадения этих подпространств.

Лемма 5. *Для того чтобы выполнялось равенство $\mathbf{G}_{\nu-1} = \mathbf{G}_\nu$, необходимо и достаточно, чтобы $P^{(\nu)}L^{(\nu)} = 0$.*

Доказательство. Пусть $P^{(\nu)}L^{(\nu)} = 0$. В этом случае $\mathcal{T}_\nu = \mathbb{R}^{n^0_\nu}$, и в качестве матрицы $T^{(\nu)}$ можно взять любую невырожденную матрицу C подходящего размера. Поэтому подпространства, натянутые на столбцы матриц $M_{\nu-1}$ и $M_\nu = M_{\nu-1}C$, совпадают, т. е. $\mathbf{G}_{\nu-1} = \mathbf{G}_\nu$.

Верны и обратные рассуждения. Если $\mathbf{G}_{\nu-1} = \mathbf{G}_\nu$, то $M_{\nu-1}\mathbb{R}^{n^0_\nu} = M_{\nu-1}T^{(\nu)}\mathbb{R}^{n^0_\nu}$. Из этого равенства следует, что $T^{(\nu)}$ — квадратная невырожденная матрица. Но по определению матрица $T^{(\nu)}$ удовлетворяет равенству $P^{(\nu)}L^{(\nu)}T^{(\nu)} = 0$. Значит, $P^{(\nu)}L^{(\nu)} = 0$.

□

На основании формул (2.5) и (2.7) можем сформулировать следующее

Следствие 1. *Для чисел n_i и n^0_i, характеризующих размеры матриц $P^{(k)}$ и $T^{(k)}$ соответственно, выполняются следующие неравенства:*

$$n_0 < n_1 \cdots < n_\nu = n_{\nu+1} = \dots, \quad n^0_0 > n^0_1 \cdots > n^0_{\nu-1} \geqslant n^0_\nu = n^0_{\nu+1} = \dots.$$

Замечание 7. Из формулы (2.5) следует, что любой базис подпространства $\mathcal{P}_i$ может быть дополнен до базиса подпространства $\mathcal{P}_{i+1}$. Поэтому при построении очередной матрицы $P^{(i+1)}$, $i = 0, 1, \dots$, можно в качестве ее n_i строк брать строки матрицы $P^{(i)}$. Далее будем считать, что первые n_i строк матрицы $P^{(i+1)}$ есть строки матрицы $P^{(i)}$, взятые с сохранением порядка их следования. В этом случае процесс построения матриц $P^{(i+1)}$ осуществляем до тех пор, пока не будет найдено число ν такое, что $P^{(\nu)} = P^{(\nu+1)}$.

Пусть число ν определяется леммой 4. Для удобства дальнейшего изложения матрицу M_ν обозначим как $\widetilde{T}$, т. е.

$$\widetilde{T} = M_\nu = T^{(0)} \dots T^{(\nu)},$$

а количество ее столбцов — через r_0 : $r_0 = n_{\nu+1}$. То есть столбцы матрицы $\widetilde{T}$ составляют базис подпространства $\mathbf{G}_\nu$.

Теорема 3. *Столбцы матрицы $\widetilde{T}$ составляют базис подпространства $\mathbf{G}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы покажем, что выполняется равенство

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_\nu.$$

Выберем произвольный вектор $c_0 \in \mathbf{G}$ и докажем, что $c_0 \in \mathbf{G}_\nu$. Проведем цепочку рассуждений по шагам.

Шаг 1. Поскольку $K^{(0)} = \widehat{B}_0$, $L^{(0)} = \widehat{B}_1$, то по определению подпространства $\mathbf{G}$ для любого $c_0 \in \mathbf{G}$ существует вектор $d_0 \in \mathbf{G}$ такой, что

$$K^{(0)} d_0 + L^{(0)} c_0 = 0. \tag{2.10}$$

Согласно определению матрицы $P^{(0)}$ выполняется равенство $P^{(0)} K^{(0)} = 0$. Поэтому в силу (2.10) справедливо равенство $P^{(0)} L^{(0)} c_0 = 0$. Отсюда следует, что $c_0 \in \mathcal{T}_0$. Значит, найдется некоторый вектор $c_1 \in \mathbb{R}^{n_1^0}$ такой, что

$$c_0 = T^{(0)} c_1. \tag{2.11}$$

Но c_0 — произвольный вектор из подпространства $\mathbf{G}$, поэтому представление вида (2.11) справедливо для любого вектора из $\mathbf{G}$. Значит, и для вектора d_0 из формулы (2.10), в силу того, что $d_0 \in \mathbf{G}$, найдется вектор $d_1 \in \mathbb{R}^{n_1^0}$ такой, что $d_0 = T^{(0)} d_1$. При этом будут выполняться равенства

$$K^{(0)} d_0 + L^{(0)} c_0 = K^{(0)} T^{(0)} d_1 + L^{(0)} T^{(0)} c_1 = K^{(1)} d_1 + L^{(1)} c_1 = 0. \tag{2.12}$$

Шаг 2. В силу (2.12) и равенства $P^{(1)} K^{(1)} = 0$ справедливо соотношение $P^{(1)} L^{(1)} c_1 = 0$. Значит, $c_1 \in \mathcal{T}_1$, и найдется некоторый вектор $c_2 \in \mathbb{R}^{n_2^0}$ такой, что $c_1 = T^{(1)} c_2$. Значит, $c_0 = T^{(0)} T^{(1)} c_2$. В силу произвольности вектора $c_0 \in \mathbf{G}$ и того, что $d_0 \in \mathbf{G}$, найдется вектор $d_2 \in \mathbb{R}^{n_2^0}$ такой, что $d_0 = T^{(0)} T^{(1)} d_2$. При этом векторы $c_2 \in \mathbb{R}^{n_2^0}$ и $d_2 \in \mathbb{R}^{n_2^0}$ удовлетворяют равенствам

$$K^{(0)} d_0 + L^{(0)} c_0 = K^{(0)} T^{(0)} T^{(1)} d_2 + L^{(0)} T^{(0)} T^{(1)} c_2 =$$
$$= K^{(1)} T^{(1)} d_2 + L^{(1)} T^{(1)} c_2 = K^{(2)} d_2 + L^{(2)} c_2 = 0.$$

Продолжая этот процесс, приходим к последнему шагу с номером $\nu + 1$ (где число ν определяется леммой 4).

Шаг $\nu + 1$. Анализируя равенство $K^{(\nu)} d_\nu + L^{(\nu)} c_\nu = 0$, полученное на предыдущем шаге с номером ν, приходим к существованию векторов $c_{\nu+1} \in \mathbb{R}^{n_{\nu+1}^0}$ и $d_{\nu+1} \in \mathbb{R}^{n_{\nu+1}^0}$ таких, что

$$c_0 = T^{(0)} \dots T^{(\nu)} c_{\nu+1}, \quad d_0 = T^{(0)} \dots T^{(\nu)} d_{\nu+1}, \tag{2.13}$$

и имеют место соотношения

$$K^{(0)}d_0 + L^{(0)}c_0 = K^{(0)}T^{(0)}\dots T^{(\nu)}d_{\nu+1} + L^{(0)}T^{(0)}\dots T^{(\nu)}c_{\nu+1} = K^{(\nu+1)}d_{\nu+1} + L^{(\nu+1)}c_{\nu+1} = 0.$$

Поскольку в силу (2.5) $\mathcal{P}_\nu = \mathcal{P}_{\nu+j}$, $j = 1, 2, \dots$, то для любой матрицы $P^{(\nu+1)}$, удовлетворяющей условию $P^{(\nu+1)}K^{(\nu+1)} = 0$, будет выполняться $P^{(\nu+1)}L^{(\nu+1)} = 0$. Поэтому на этом шаге цепочка рассуждений, проводимая по шагам, заканчивается.

Равенства (2.13) можно переписать в виде $c_0 = \widetilde{T}c_{\nu+1}$, $d_0 = \widetilde{T}d_{\nu+1}$, а это значит, что $c_0 \in \mathbf{G}_\nu$. В силу того, что вектор c_0 является произвольным вектором из подпространства $\mathbf{G}$, имеем включение

$$\mathbf{G} \subseteq \mathbf{G}_\nu.$$

Выберем теперь произвольный вектор $\widehat{g}_0 \in \mathbf{G}_\nu$ и докажем, что $\widehat{g}_0 \in \mathbf{G}$. Поскольку вектор $\widehat{g}_0 \in \mathbf{G}_\nu$, то найдется вектор $c_0 \in \mathbb{R}^{n^0_{\nu+1}}$ такой, что $\widehat{g}_0 = \widetilde{T}c_0$. Покажем, что в пространстве $\mathbf{G}_\nu$ существует решение $\widehat{g}_1$ уравнения $\widehat{B}_0\widehat{g}_1 + \widehat{B}_1\widehat{g}_0 = 0$. Перепишем это уравнение в виде

$$\widehat{B}_0\widehat{g}_1 + \widehat{B}_1\widetilde{T}c_0 = 0. \tag{2.14}$$

Если вектор $\widehat{g}_1 \in \mathbf{G}_\nu$, то он представим в виде $\widehat{g}_1 = \widetilde{T}c_1$, где вектор $c_1 \in \mathbb{R}^{n^0_{\nu+1}}$ подлежит определению. Подставив вектор $\widehat{g}_1$ указанного вида в (2.14), получим уравнение $\widehat{B}_0\widetilde{T}c_1 + \widehat{B}_1\widetilde{T}c_0 = 0$ относительно вектора c_1. Из определения матриц $\widetilde{T}$, $K^{(i)}$ и $L^{(i)}$ следует, что это уравнение можно записать в виде

$$K^{(\nu+1)}c_1 + L^{(\nu+1)}c_0 = 0. \tag{2.15}$$

Возьмем любую вектор-строку $q \in \mathbb{R}^{1\times n^*}$, удовлетворяющую равенству $qK^{(\nu+1)} = 0$. Из определения $\mathcal{P}_{\nu+1}$ следует, что $q \in \mathcal{P}_{\nu+1}$. В силу (2.5) имеем равенство $\mathcal{P}_{\nu+1} = \mathcal{P}_\nu$, поэтому $q \in \mathcal{P}_\nu$. Но если $q \in \mathcal{P}_\nu$, то $qL^{(\nu)}T^{(\nu)} = 0$. Учитывая, что $L^{(\nu+1)} = L^{(\nu)}T^{(\nu)}$, можем записать $qL^{(\nu+1)} = 0$. Следовательно, каков бы ни был вектор $c_0 \in \mathbb{R}^{n^0_{\nu+1}}$, будет выполняться равенство $qL^{(\nu+1)}c_0 = 0$. Таким образом, показали, что, каков бы ни был вектор $c_0 \in \mathbb{R}^{n^0_{\nu+1}}$, любое решение сопряженного с (2.15) однородного уравнения $zK^{(\nu+1)} = 0$ относительно неизвестной вектор-строки z ортогонально $L^{(\nu+1)}c_0$. Поэтому найдется вектор $c_1 \in \mathbb{R}^{n^0_{\nu+1}}$, удовлетворяющий равенству (2.15). Значит, для произвольного вектора $\widehat{g}_0 \in \mathbf{G}_\nu$ существует решение уравнения (2.14) из подпространства $\mathbf{G}_\nu$. А это, в свою очередь, говорит о том, что для любого $\widehat{g}_0 \in \mathbf{G}_\nu$ существует решение уравнения (1.5) с начальным условием $\widehat{g}(m) = \widehat{g}_0$. Следовательно, любой вектор из $\mathbf{G}_\nu$ является допустимым начальным вектором для уравнения (1.5), то есть

$$\mathbf{G}_\nu \subseteq \mathbf{G}.$$

Из формул $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{G}_\nu$ и $\mathbf{G}_\nu \subseteq \mathbf{G}$ следует равенство $\mathbf{G}_\nu = \mathbf{G}$. Столбцы матрицы $\widetilde{T}$ являются базисом подпространства $\mathbf{G}_\nu$, поэтому они также составляют и базис подпространства $\mathbf{G}$. Теорема доказана. □

Следствие 2. *Подпространство $\mathbf{G}_\nu$ не зависит от способа выбора матриц $P^{(j)}$ и $T^{(j)}$.*

Пример 3. Рассмотрим систему (1.1) с матрицами

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь $n = r = m = 2$. В данном случае

$$K^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Находим матрицы $P^{(0)} = [1, -1, 0, 0]$ и

$$T^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрицы $K^{(1)}$ и $L^{(1)}$ будут следующими:

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычислив далее матрицу $P^{(1)}$, видим, что она совпадает с матрицей $P^{(0)}$, поэтому $\nu = 0$. Следовательно, в качестве базиса подпространства $\mathbf{G}$ можно взять столбцы найденной выше матрицы $T^{(0)}$, то есть положить $\widehat{T} = T^{(0)}$. В этом случае

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда допустимое начальное условие (1.2) имеет вид $(\widetilde{g}_2, \widetilde{g}_1)$, где $\widetilde{g}_2 = T_1 c$, $\widetilde{g}_1 = T_2 c$, $c \in \mathbb{R}^3$ — произвольный вектор.

Возьмем вектор c в виде

$$c = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix},$$

где s_i, $i = 1, 2, 3,$ — произвольные числа, и построим решение $g(k)$ задачи (1.1), (1.2), например, для $k = \overline{3, 6}$. В данном случае $\operatorname{rank} \widehat{B}_0 \widehat{T} = \operatorname{rank} K^{(1)} = 3$, поэтому уравнение (1.10) имеет единственное решение:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Выпишем решение начальной задачи (1.1), (1.2) по формулам (1.18), (1.19). В данном случае $\mu(k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots,$ и формулы (1.18), (1.19) принимают вид

$$\begin{gathered} g(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \psi(k), \quad k = 1, 2, \ldots, \\ \psi(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \psi(k-1), \quad k = 2, 3, \ldots, \quad \psi(1) = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{2.16}$$

В качестве иллюстрации выпишем решение $g(k)$, $k = \overline{1, 5}$, найденное по формулам (2.16):

$$g(1) = \begin{bmatrix} s_3 \\ s_1 \end{bmatrix}, \quad g(2) = \begin{bmatrix} s_1 + s_2 \\ s_2 \end{bmatrix}, \quad g(3) = \begin{bmatrix} -s_1 \\ -s_1 - s_2 \end{bmatrix},$$

$$g(4) = \begin{bmatrix} -s_2 \\ s_1 \end{bmatrix}, \quad g(5) = \begin{bmatrix} s_1 + s_2 \\ s_2 \end{bmatrix}, \quad g(6) = \begin{bmatrix} -s_1 \\ -s_1 - s_2 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что процесс построения последовательности $g(k)$, $k > 6$, можно продолжить.

§ 3. Приложение к задаче 0-управляемости

Рассмотрим систему (0.2). Обозначим $A(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i$, $B(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i B_i$, $W(p,\lambda) = pI_n - A(\lambda)$. Матрица $W(p, e^{-ph})$ называется характеристической матрицей уравнения (0.2).

Хорошо известно [1, 2], что для того, чтобы система (0.2) была полностью 0-управляемой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{rank}\big[W(p, e^{-ph}),\ B(e^{-ph})\big] = n \quad \forall p \in \mathbb{C}. \tag{3.1}$$

Предположим, что для системы (0.2) условие (3.1) нарушается, то есть исходная система не обладает свойством полной 0-управляемости. Но в то же время для системы (0.2) имеет место свойство 0-управляемости. Рассмотрим следующую задачу: как, опираясь на известный метод решения задачи полной 0-управляемости, получить решение задачи 0-управляемости. При этом сам метод решения задачи полной 0-управляемости конкретизировать не будем (возможные методы решения задачи полной 0-управляемости можно найти в [1, 2], а также в источниках приведенной там библиографии).

Для того чтобы сделать возможным выполнение тождества (0.4), изменим структуру системы (0.2), а именно: увеличим размерность пространства управлений, добавив к системе (0.2) дополнительные входы. Количество входов у системы (0.2) увеличим за счет замены выражения $\sum_{i=0}^{m} B_i u(t-ih)$ на $\sum_{i=0}^{m} \big(B_i v_1(t-ih) + G_i v_2(t-ih)\big)$, где $G_i \in \mathbb{R}^{n\times r_1}$ — некоторые матрицы, v_i, $i = 1,2$, — векторные компоненты нового управления v. Таким образом, вместо системы (0.2) далее будем иметь дело с системой

$$\dot y(t) = \sum_{i=0}^{m} \big(A_i y(t-ih) + B_i v_1(t-ih) + G_i v_2(t-ih)\big), \quad t > 0. \tag{3.2}$$

Начальные условия возьмем в виде

$$y(t) = \eta_0(t), \quad v_i(t) = v_i^0(t), \quad t \in [-mh, 0], \quad i = 1,2, \tag{3.3}$$

где η_0 — непрерывная функция, функции v_i^0, $i = 1,2$, — кусочно-непрерывные. Матрицы G_i и начальные условия (3.3) выбираем не произвольно, а так, чтобы между системами (0.2) и (3.2) можно было установить некоторое соответствие, позволяющее по известному управлению v системы (3.3) такому, что соответствующее решение системы (3.2) удовлетворяет тождеству $y(t) \equiv 0$, $t \geqslant t_1$, $v(t) \equiv 0$, $t > t_1$, найти управление u, которое обеспечит системе (0.2) тождество (0.4). В общем случае определить такое соответствие между системами за счет матриц G_i и начального условия (3.3) можно не единственным образом. Приведем один из возможных подходов.

Матрицы G_i и начальные условия (3.3) (зависящие от условий (0.3)), обеспечивающие описанное выше соответствие между решениями систем (0.2) и (3.2), возьмем такими, чтобы выполнялись следующие условия:

1) каково бы ни было управление $v(t)$, $t > 0$, системы (3.2), существует управление $u(t)$, $t > 0$, системы (0.2) такое, что для заданных начальных условий (0.3) и выбранных начальных условий (3.3) соответствующие решения систем (0.2) и (3.2) удовлетворяют равенству

$$x(t) = y(t), \quad t \geqslant -mh; \tag{3.4}$$

2) система (3.2) является полностью 0-управляемой.

Пусть задано любое, но фиксированное начальное условие (0.3) системы (0.2). Поскольку в силу условия 2) система (3.2) полностью 0-управляема, то для любого начального условия (3.3) найдутся кусочно-непрерывное управление $v_1(t)$, $v_2(t)$, $t>0$, и момент времени $t_1>0$ такие, что для этого управления и соответствующего решения системы (3.2) выполняются тождества $y(t)\equiv 0$, $t\geqslant t_1$, и $v_1(t)\equiv 0$, $v_2(t)\equiv 0$, $t>t_1$. Согласно условию 1) существует функция $u(t)$, $t>0$, такая, что имеет место соотношение (3.4). Для решения системы (0.2), соответствующего этому управлению $u(t)$, $t>0$, в силу равенства (3.4) будет выполняться тождество $x(t)\equiv 0$, $t\geqslant t_1$. При этом в общем случае $u(t)\not\equiv 0$, $t>t_1$. Поскольку начальное условие (0.3) для системы (0.2) было задано произвольно, то приходим к тому, что существование матриц G_i, $i=\overline{1,m}$, реализующих условия 1), 2), достаточно для того, чтобы система (0.2) была 0-управляемой.

Перейдем к вопросу построения матриц G_i, $i=\overline{1,m}$, и выбору начальных условий (3.3) так, чтобы имели место условия 1) и 2). Начнем с реализации второго условия.

Если система (3.2) является полностью 0-управляемой, то для нее выполняется критерий полной 0-управляемости вида (3.1). Применительно к системе (3.2) этот критерий будет иметь вид

$$\operatorname{rank}\left[W(p,e^{-ph}),\,B(e^{-ph}),\,G(e^{-ph})\right]=n\quad\forall p\in\mathbb{C},\tag{3.5}$$

где $G(\lambda)=\sum_{i=0}^{m}\lambda^iG_i$.

В работе [2] доказано, что если система (0.2) обладает свойством 0-управляемости, то выполняется условие

$$\operatorname{rank}\left[W(p,e^{-ph}),\,B(e^{-ph}),\,\sum_{i=0}^{m-1}e^{-iph}\sum_{j=0}^{i}B_jTS^{i-j}\right]=n\quad\forall p\in\mathbb{C},\tag{3.6}$$

где матрицы T и S определены в § 1. Сравнивая (3.5) и (3.6), мы можем предположить, что матрицы

$$G_i=\sum_{j=0}^{i}B_jTS^{i-j},\quad i=\overline{0,m-1},\quad G_m=0,\tag{3.7}$$

обладают требуемым свойством. Тогда условия (3.6) и (3.5) совпадут, причем (3.5) будет необходимым условием 0-управляемости.

Далее считаем, что матрицы G_i определяются формулами (3.7), а значит, условие 2), налагаемое на матрицы G_i, выполнено. Рассмотрим условие 1). Для того чтобы упростить реализацию условия 1), обеспечим за счет выбора начального условия (3.3) совпадение решений однородных систем (0.2) и (3.2) ($u(t)\equiv 0$, $v(t)\equiv 0$, $t>0$, соответственно). Для этого положим

$$y(t)=\eta(t),\quad v_1(t)=u^0(t),\quad v_2(t)\equiv 0,\quad t\in[-mh,0],\quad i=1,2,\tag{3.8}$$

где функции η и u^0 те же, что и в (0.3). Тогда для выполнения условия 2) достаточно обеспечить совпадение неоднородных частей систем (0.2) и (3.2). А это возможно, если для любых заданных кусочно-непрерывных функций $v_1(t)$, $v_2(t)$, $t>0$, разрешимо в классе кусочно-непрерывных функций $u(t)$, $t>0$, уравнение

$$\sum_{i=0}^{m}B_iu(t-ih)=\sum_{i=0}^{m}\big(B_iv_1(t-ih)+G_iv_2(t-ih)\big),\quad t>0.\tag{3.9}$$

Таким образом, далее считаем, что начальное условие для системы (3.2) задается формулами (3.8). Тогда в уравнении (3.9), согласно (0.3) и (3.8), считаем, что

$$u(t)=u^0(t),\quad t\in(-mh,0],\tag{3.10}$$

$$v_1(t) = u^0(t), \quad v_2(t) \equiv 0, \quad t \in (-mh, 0]. \tag{3.11}$$

Покажем, что, каково бы ни было управления $v(t)$, $t > 0$, уравнение (3.9) всегда разрешимо.

Замечание 8. Заметим, что уравнение (3.9), в отличие от уравнения (0.6), является неоднородным. Однако, как будет показано ниже (см. теорему 4), за счет специального вида неоднородной части

$$\sum_{i=0}^{m} \big(B_i v_1(t - ih) + G_i v_2(t - ih)\big)$$

и указанного выше выбора матриц G_i можно на базе решения соответствующего однородного уравнения предложить достаточно удобную форму представления решения уравнения (3.9).

Нетрудно проверить, что матрицы G_i, определяемые равенствами (3.7), удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$G_0 = B_0 T, \quad G_i = G_{i-1} S + B_i T, \quad i = \overline{1, m}. \tag{3.12}$$

Заметим, что согласно (3.12) матрица G_m определяется формулой

$$G_m = G_{m-1} S + B_m T = \big(G_{m-2} S + B_{m-1} T\big) S + B_m T = \dots = \sum_{i=0}^{m} B_i T S^{m-i},$$

откуда в силу соотношения (1.15) получаем равенство $G_m = 0$, что совпадает с определением матрицы G_m в (3.7).

Для организации процесса решения уравнения (3.9) понадобится следующее свойство.

Лемма 6. *Справедлива формула*

$$B(\lambda) T = G(\lambda)(I_n - \lambda S),$$

где $G(\lambda) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i G_i$.

Доказательство. В силу соотношений (3.12) справедливы равенства $B_i T = G_i - G_{i-1} S$, $i = \overline{1, m}$. Используя эти соотношения и учитывая, что $G_m = 0$, можем записать следующую цепочку равенств:

$$B(\lambda) T = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i B_i T = G_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda^i (G_i - G_{i-1} S) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i G_i - \sum_{i=1}^{m} \lambda^i G_{i-1} S = G(\lambda)(I_n - \lambda S).$$

□

Пусть λ_h — оператор сдвига, действующий по формуле $\lambda_h f(t) = f(t - h)$, для произвольной функции f, определенной на $\mathbb{R}$. Перепишем уравнение (3.9) в операторном виде:

$$B(\lambda_h) u(t) = B(\lambda_h) v_1(t) + G(\lambda_h) v_2(t), \quad t > 0. \tag{3.13}$$

Определим функцию $u(t)$, $t > -mh$, формулами

$$u(t) = v_1(t) + T \widetilde{\psi}(t), \quad \widetilde{\psi}(t) = S \widetilde{\psi}(t - h) + v_2(t), \quad t > -mh, \tag{3.14}$$

где $\widetilde{\psi}(t) \equiv 0$, $t \in (-(m+1)h, -mh]$.

Теорема 4. *Пусть* $v(t)$, $t > -mh$, *— произвольная функция, для которой выполняются соотношения* (3.11). *Тогда функция* $u(t)$, $t > -mh$, *определяемая формулами* (3.14), *удовлетворяет уравнению* (3.13) *и равенству* (3.10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала рассмотрим случай, когда $t \in (-mh, 0]$. В силу (3.11) и соотношения (3.14) имеем $\widetilde{\psi}(t) \equiv 0$, $t \in (-(m+1)h, 0]$, и $u(t) = v_1^0(t) = u^0(t)$, $t \in (-(m+1)h, 0]$. Поэтому равенство (3.10) выполнено.

Пусть теперь $t > 0$. Тогда в силу леммы 6 для функции u, определяемой формулами (3.14), имеет место цепочка равенств

$$B(\lambda_h)u(t) = B(\lambda_h)v_1(t) + B(\lambda_h)T\widetilde{\psi}(t) =$$

$$= B(\lambda_h)v_1(t) + G(\lambda_h)(I_n - \lambda_h S)\psi(t)B(\lambda_h)v_1(t) + G(\lambda_h)v_2(t), \quad t > 0.$$

$\square$

Таким образом, при выбранных матрицах G_i, $i = \overline{0, m}$, определяемых формулами (3.7), соотношение (3.14) позволяет получить одно из решений уравнения (3.13) (или, что то же самое, уравнения (3.9)) с условиями (3.10), (3.11).

Из вышесказанного следует, что если система (0.2) 0-управляема и матрицы G_i, $i = \overline{1, m}$, выбираются согласно (3.7), то имеет место условие (3.5). Обратно, если имеет место условие (3.5), где матрицы G_i, $i = \overline{1, m}$, определяются формулами (3.7), то система (3.2) полностью 0-управляема и разрешимо уравнение (3.9). А это значит, что система (0.2) 0-управляема. Таким образом, условие (3.5) есть критерий 0-управляемости для системы (0.2).

Рассмотрим условие (3.5). Поскольку матрицы G_i зависят от выбора базиса подпространства $\mathbf{G}$, то они определяются неоднозначно. Следовательно, различным матрицам G_i будут соответствовать разные матрицы $G(\lambda)$. Изучим вопрос о том, как влияет выбор базиса подпространства $\mathbf{G}$ на матрицу $G(\lambda)$ и условие (3.5). Для этого одновременно с матрицей $\widehat{T}$ рассмотрим другую матрицу $\widehat{T}^*$, столбцы которой также составляют базис подпространства $\mathbf{G}$. Тогда найдется невырожденная матрица $C \in \mathbb{R}^{r_T \times r_T}$ такая, что

$$\widehat{T}^* = \widehat{T}C. \tag{3.15}$$

Пусть матрица $S^* \in \mathbb{R}^{r_T \times r_T}$ удовлетворяет равенству

$$\widehat{B}_0\widehat{T}^*S^* + \widehat{B}_1\widehat{T}^* = 0. \tag{3.16}$$

В силу (3.15) формулу (3.16) можно записать в виде

$$\widehat{B}_0\widehat{T}CS^*C^{-1} + \widehat{B}_1\widehat{T} = 0.$$

Вычитая из (1.10) последнее равенство, получим, что $\widehat{B}_0\widehat{T}(S - CS^*C^{-1}) = 0$. Значит,

$$S = CS^*C^{-1} + S^0, \tag{3.17}$$

где матрица S^0 такова, что

$$\widehat{B}_0\widehat{T}S^0 = 0. \tag{3.18}$$

Пусть матрица T^* состоит из последних r строк матрицы $\widehat{T}^*$, взятых с сохранением порядка их следования (напомним, что матрица T также состоит из последних r строк матрицы $\widehat{T}$). Наряду с матрицами, определяемыми формулами (3.12), рассмотрим также матрицы

$$G_0^* = B_0T^*, \quad G_i^* = G_{i-1}^*S^* + B_iT^*, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad G^*(\lambda) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i G_i^*. \tag{3.19}$$

Лемма 7. *Справедливо равенство*

$$G^*(\lambda) = G(\lambda)C. \tag{3.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим равенство (3.18). Приравнивая соответствующие блоки в этом равенстве, получим

$$B_0T_1S^0 = 0, \ \ T_iS^0 = 0, \quad i = \overline{2, m}. \tag{3.21}$$

Пользуясь равенствами (1.14), формулы (3.21) перепишем в виде

$$B_0TS^{m-1}S^0 = 0, \quad TS^{m-2}S^0 = 0, \ldots, \quad TS^0 = 0. \tag{3.22}$$

На основании соотношений (3.22), (3.7) заключаем, что

$$G_iS^0 = \sum_{k=0}^{i} B_kTS^{i-k}S^0 = 0, \quad i = \overline{0, m-1}. \tag{3.23}$$

Далее, воспользовавшись методом математической индукции, докажем формулы

$$G_i^* = G_iC, \quad i = \overline{0, m-1}. \tag{3.24}$$

При $i = 0$ имеем

$$G_0^* = B_0T^* = B_0TC = G_0C.$$

Пусть теперь

$$G_j^* = G_jC, \quad j = \overline{0, k-1}.$$

Из соотношения (3.17) находим

$$S^* = C^{-1}(S - S^0)C. \tag{3.25}$$

Теперь запишем следующую цепочку равенств:

$$G_k^* \overset{(3.19)}{=} G_{k-1}^*S^* + B_kT^* \overset{(3.24),\,(3.15)}{=} G_{k-1}CS^* + B_kTC \overset{(3.25)}{=}$$
$$\overset{(3.25)}{=} G_{k-1}CC^{-1}\big(S - S^0\big)C + B_kTC = G_{k-1}\big(S - S^0\big)C + B_kTC \overset{(3.23)}{=}$$
$$\overset{(3.23)}{=} G_{k-1}SC + B_kTC = G_kC.$$

Формулы (3.24) доказаны.

Соотношение (3.20) следует из равенств (3.24). □

На основании леммы 7 можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть существует базис подпространства* $\mathbf{G}$ *такой, что выполняется условие* (3.5). *Тогда условие* (3.5) *выполняется при любом выборе базиса подпространства* $\mathbf{G}$.

В заключении этого параграфа отметим, что описанный подход к решению задачи 0-управляемости можно с некоторыми изменениями распространить (см. [5–9]) на другие задачи управления объектами с соизмеримыми запаздываниями в управлении.

§ 4. Заключение

Изучено линейное автономное дескрипторное уравнение с дискретным временем, возникающее в различных задачах управления системами со многими запаздываниями. Описано подпространство допустимых начальных данных этого уравнения, а также выделены его некоторые свойства. В качестве приложения рассмотрено применение этого уравнения к исследованию задачи 0-управляемости для линейных автономных дифференциально-разностных систем со многими соизмеримыми запаздываниями. Отличительной чертой исследования является формулировка основных результатов без использования каких-либо канонических форм, что актуально в приложении к исследованию задач управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н. Оптимальные процессы в системах с запаздыванием // Статистические методы. Тр. II Междунар. конгресса ИФАК. Базель, 1963. М.: Наука, 1965. Т. 2. С. 201–210.
2. Хартовский В. Е. Обобщение задачи полной управляемости дифференциальных систем с соизмеримыми запаздываниями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 3–11. https://doi.org/10.1134/S106423070906001X
3. Метельский А. В., Хартовский В. Е., Урбан О. И. Регуляторы успокоения решения линейных систем нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 391–403. https://doi.org/10.1134/S0374064116030122
4. Метельский А. В., Хартовский В. Е. Синтез регуляторов успокоения решения вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 547–558. https://doi.org/10.1134/S0374064117040124
5. Метельский А. В., Хартовский В. Е. Критерии модальной управляемости линейных систем нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 11. С. 1506–1521. https://doi.org/10.1134/S0374064116110078
6. Хартовский В. Е. Модальная управляемость линейных систем нейтрального типа в классах дифференциально-разностных регуляторов // Автоматика и телемеханика. 2017. Вып. 11. С. 3–18. http://mi.mathnet.ru/at14920
7. Хартовский В. Е. Критерий модальной управляемости вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с последействием // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 4. С. 514–529. https://doi.org/10.1134/S0374064118040088
8. Хартовский В. Е. Спектральное приведение линейных систем нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 3. С. 375–390. https://doi.org/10.1134/S0374064117030086
9. Хартовский В. Е. Приведение к конечному спектру вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с последействием // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 827–841. https://doi.org/10.1134/S0374064118060110
10. Метельский А. В., Хартовский В. Е. К вопросу синтеза наблюдателей для линейных систем нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 8. С. 1148–1149.
11. Белов А. А., Курдюков А. П. Дескрипторные системы и задачи задачи управления. М.: Физматлит, 2015.
12. Бояринцев Ю. Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск: Наука, 2000.
13. Campbell S. L, Griepentrog E. Solvability of general differential algebraic equations // SIAM Journal on Scientific Computing. 1995. Vol. 16. No. 2. P. 257–270. https://doi.org/10.1137/0916017
14. Riaza R. Differential-algebraic systems: Analytical aspects and circuit applications. Hackensack, NY: World Scientific, 2008. https://doi.org/10.1142/6746

Поступила в редакцию 22.04.2020

Хартовский Вадим Евгеньевич, к. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой логистики и методов управления, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, 230023, Республика Беларусь, г. Гродно, ул. Ожешко, 22.
E-mail: hartovskij@grsu.by

Цитирование: В. Е. Хартовский. Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. I. Приложение к задаче 0-управляемости // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 290–311.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI

MATHEMATICS 2020. Vol. 30. Issue 2. Pp. 290–311.

V. E. Khartovskii

On a linear autonomous descriptor equation with discrete time. I. Application to the 0-controllability problem

Keywords: linear systems with multiple delays, linear descriptor autonomous equation with discrete time, subspace of initial conditions, representation of the solution.

MSC2010: 93B99, 93C55

DOI: 10.35634/vm200211

We consider a linear homogeneous autonomous descriptor equation with discrete time

$$B_0 g(k+1) + \sum_{i=1}^{m} B_i g(k+1-i) = 0, \quad k = m, m+1, \ldots,$$

with rectangular (in general case) matrices B_i. Such an equation arises in the study of the most important control problems for systems with many commensurate delays in control: the 0-controllability problem, the synthesis problem of the feedback-type regulator, which provides calming to the solution of the original system, the modal controllability problem (controllability of the coefficients of characteristic quasipolynomial), the spectral reduction problem and the problem of observers' synthesis for a dual surveillance system. For the studied descriptor equation with discrete time, a subspace of initial conditions for which this equation is solvable is described based on the solution of a finite chain of homogeneous algebraic systems. The representation of all its solutions is obtained in the form of some explicit recurrent formula convenient for the organization of the computational process. Some properties of this equation that are used in the problems of regulator synthesis for continuous systems with many commensurate delays in control are studied. A distinctive feature of the presented study of the object under consideration is the use of an approach that does not require the construction of transformations reducing the matrices of the original equation to different canonical forms.

REFERENCES

1. Krasovskii N. N. Optimal processes in delay systems, *Statisticheskie metody: Tr. II Mezhdunar. kongressa IFAK (Bazel', 1963)* (Statistic Methods. Proc. II IFAC Congress, Basel, 1963), Moscow, 1965, vol. 2, pp. 201–210 (in Russian).
2. Khartovskii V. E. A generalization of the problem of complete controllability for differential systems with commensurable delays, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2009, vol. 48, no. 6, pp. 847–855. https://doi.org/10.1134/S106423070906001X
3. Metel'skii A. V., Khartovskii V. E., Urban O. I. Solution damping controllers for linear systems of the neutral type, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 3, pp. 386–399. https://doi.org/10.1134/S0012266116030125
4. Metel'skii A. V., Khartovskii V. E. Synthesis of damping controllers for the solution of completely regular differential-algebraic delay systems, *Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 4, pp. 539–550. https://doi.org/10.1134/S0012266117040127
5. Metel'skii A. V., Khartovskii V. E. Criteria for modal controllability of linear systems of neutral type, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 11, pp. 1453–1468. https://doi.org/10.1134/S0012266116110070
6. Khartovskii V. E. Modal controllability for systems of neutral type in classes of differential-difference controllers, *Automation and Remote Control*, 2017, vol. 78, no. 11, pp. 1941–1954. https://doi.org/10.1134/S0005117917110017
7. Khartovskii V. E. Criteria for modal controllability of completely regular differential-algebraic systems with aftereffect, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 509–524. https://doi.org/10.1134/S0012266118040080

8. Khartovskii V. E. Spectral reduction of linear systems of the neutral type, *Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 3, pp. 366–381. https://doi.org/10.1134/S0012266117030089
9. Khartovskii V. E. Finite spectrum assignment for completely regular differential-algebraic systems with aftereffect, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 6, pp. 823–838. https://doi.org/10.1134/S0012266118060113
10. Metel'skii A. V., Khartovskii V. E. On the question of the synthesis of observers for linear systems of neutral type, *Differentsial'nye Uravneniya*, 2018, vol. 54, no. 8, pp. 1148–1149 (in Russian).
11. Belov A. A., Kurdyukov A. P. *Deskriptornye sistemy i zadachi upravleniya* (Descriptor systems and control problems), Moscow: Fizmatlit, 2015.
12. Boyarintsev Yu. E. *Lineinye i nelineinye algebro-differentsial'nye sistemy* (Linear and nonlinear algebro-differential systems), Novosibirsk: Nauka, 2000.
13. Campbell S. L, Griepentrog E. Solvability of general differential algebraic equations, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1995, vol. 16, no. 2, pp. 257–270. https://doi.org/10.1137/0916017
14. Riaza R. *Differential-algebraic systems: Analytical aspects and circuit applications*, Hackensack, NY: World Scientific, 2008. https://doi.org/10.1142/6746

Received 22.04.2020

Khartovskii Vadim Evgen'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Logistics and Methods of Control, Yanka Kupala State University of Grodno, ul. Ozheshko, 22, Grodno, 230023, Belarus.
E-mail: hartovskij@grsu.by

Citation: V. E. Khartovskii. On a linear autonomous descriptor equation with discrete time. I. Application to the 0-controllability problem, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 2, pp. 290–311.