

УДК 517.977.1

© *И. О. Осипов*

## О ВЫПУКЛОСТИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ ПО ЧАСТИ КООРДИНАТ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ НА МАЛЫХ ПРОМЕЖУТКАХ ВРЕМЕНИ

Исследована выпуклость множеств достижимости по части координат нелинейных систем с интегральными ограничениями на управление на малых промежутках времени. Доказаны достаточные условия выпуклости, имеющие вид ограничений на асимптотику собственных чисел грамиана управляемости линеаризованной системы по части координат. В качестве примеров, в статье описаны две нелинейные системы третьего порядка, в одной из которых линеаризованная вдоль траектории, порожденной нулевым управлением, система неуправляема, а в другой управляема. Исследованы достаточные условия выпуклости проекций множеств достижимости. Проведено численное моделирование, продемонстрировавшее невыпуклость некоторых проекций даже для малых длин временного промежутка.

*Ключевые слова:* нелинейные системы, множества достижимости, интегральные ограничения, выпуклость, линеаризация, малый промежуток времени, асимптотика.

DOI: [10.35634/vm210204](https://doi.org/10.35634/vm210204)

### Введение

Геометрическая структура множеств достижимости (МД) управляемых систем играет важную роль в теории управления. Для нелинейных систем эти множества, как правило, невыпуклы и для их приближенного построения приходится использовать трудоемкие вычислительные процедуры (см., например, [1–6]). Однако, в случае нелинейных систем с интегральными квадратичными ограничениями на управление множества достижимости оказываются выпуклыми, если линеаризация системы вдоль некоторой заданной траектории вполне управляема, а ресурсы управления достаточно малы [7]. Доказательство данного факта базируется на представлении множества достижимости в виде образа гильбертова шара малого радиуса в  $\mathbb{L}_2$  при нелинейном отображении его в  $\mathbb{R}^n$  и выпуклости образа малого шара при данном отображении [8]. В работе [9] данный результат был применен при исследовании выпуклости множества достижимости нелинейных систем с интегральными квадратичными ограничениями на управление на малом промежутке времени. При замене времени данное множество достижимости переходит в множество достижимости на промежутке единичной длины  $[0, 1]$  для управляемой системы, содержащей малый параметр (длину временного промежутка для исходной системы). При этом ограничения на управление оказываются заданными шаром малого радиуса в гильбертовом пространстве  $\mathbb{L}_2[0, 1]$ . При определенных условиях, накладываемых на грамиан управляемости линеаризованной системы, такое множество достижимости оказывается выпуклым при достаточно малом значении длины промежутка. В [10] было показано, что в этом случае множество достижимости асимптотически близко по форме к эллипсоиду в пространстве состояний, представляющему собой множество достижимости линеаризованной системы. Понятие асимптотической близости множеств в [10] опирается на оценку величины хаусдорфова расстояния между этими множествами, умноженными на величину масштабирующего коэффициента.

Этот коэффициент в свою очередь зависит от малого параметра — длины временного промежутка. В частности, данное асимптотическое представление имеет место для достаточно широкого класса нелинейных управляемых систем второго порядка с интегральными ограничениями. В работе [11] исследовано асимптотическое поведение множеств достижимости для линейных управляемых систем с интегральными ограничениями на малом промежутке времени. При этом зависящие от малого параметра множества считаются асимптотически близкими (эквивалентными), если расстояние Банаха–Мазура между ними стремится к нулю. В [12] доказана асимптотическая эквивалентность множеств достижимости нелинейной и линеаризованной систем.

Данная статья посвящена исследованию выпуклости проекций множества достижимости аффинной по управлению системы на заданные плоскости в пространстве состояний. Структура статьи следующая. В первой части приводятся определения понятий, которые будут использоваться в работе; затем рассмотрены преобразования, связанные с необходимой для исследования заменой времени. В третьей части речь идет об особенностях исследования проекций множеств достижимости на малых интервалах времени. Наконец, в последней части статьи исследован пример нелинейной системы третьего порядка (уницикл, машина Дуббинса), для которой изучены проекции множества достижимости на каждую из трех координатных плоскостей. Рассмотрены два случая: симметричных относительно нуля интегральных квадратичных ограничений на управление, и случай ограничений, симметричных относительно управления, тождественно равному единице. В первом случае линеаризованная система стационарна, но не является вполне управляемой. Во втором случае, линеаризованная система становится нестационарной, но вполне управляемой. В каждом случае проанализирована асимптотика МД и проведено численное моделирование. При численном моделировании используется аналог метода Монте–Карло.

## § 1. Основные обозначения и определения

Рассмотрим нелинейную систему, аффинную по управлению

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t), & t_0 \leq t \leq t_0 + \bar{\varepsilon}, & & x(t_0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}^r$  — управление,  $y \in \mathbb{R}^m$  ( $m \leq n$ ) — выход системы,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  — матрица полного ранга,  $m \leq n$ ,  $\bar{\varepsilon}$  — некоторое фиксированное положительное число.

Функции  $f_1: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f_2: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$  предполагаются непрерывными и непрерывно-дифференцируемыми по  $x$ . Также предполагается, что функции  $f_1$ ,  $f_2$  удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \|f_1(t, x)\| &\leq l_1(t)(1 + \|x\|), \\ \|f_2(t, x)\| &\leq l_2(t), & t_0 \leq t \leq t_0 + \bar{\varepsilon}, & & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

где  $l_1(\cdot) \in \mathbb{L}_1[t_0, t_0 + \bar{\varepsilon}]$ ,  $l_2(\cdot) \in \mathbb{L}_2[t_0, t_0 + \bar{\varepsilon}]$ .

Под  $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_1[t_0, t_0 + \bar{\varepsilon}]$ ,  $\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2[t_0, t_0 + \bar{\varepsilon}]$  будем понимать, соответственно, пространства интегрируемых и интегрируемых с квадратом скалярных или вектор-функций на  $[t_0, t_0 + \bar{\varepsilon}]$ . Управление  $u(t)$  будем выбирать из пространства  $\mathbb{L}_2[t_0, t_0 + \bar{\varepsilon}]$  вектор-функций, скалярное произведение в котором определено равенством

$$(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_0 + \bar{\varepsilon}} u^\top(t)v(t) dt.$$

Управление  $u(\cdot)$  ограничим шаром радиуса  $\mu$ ,  $\mu > 0$ :

$$\|u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}^2 = (u(\cdot), u(\cdot)) \leq \mu^2. \quad (1.2)$$

В условиях описанных предположений каждому  $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$  соответствует единственное абсолютно непрерывное решение  $x(t) = x(t, u(\cdot))$  системы (1.1), определенное на интервале  $[t_0, t_0 + \bar{\varepsilon}]$ .

Все траектории  $x(t)$  системы (1.1), отвечающие удовлетворяющим (1.2) управлениям, лежат внутри некоторого компактного множества  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

Дадим здесь несколько определений, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Пусть  $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ .

**Определение 1.** Множеством достижимости  $G(\varepsilon)$  системы (1.1) в пространстве состояний в момент времени  $t_0 + \varepsilon$  назовем множество всех концов траекторий  $x(t_0 + \varepsilon) \in \mathbb{R}^n$ , которые могут быть порождены управлениями  $u(t) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu) = \{u: \|u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}^2 \leq \mu^2\}$ :

$$G(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n: \exists u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu), x = x(t_0 + \varepsilon, x^0, u(\cdot))\}.$$

**Определение 2.** Множеством достижимости  $G_y(\varepsilon)$  системы (1.1) по выходу  $y = Cx$  будем называть множество всех выходов  $y(t_0 + \varepsilon)$ , соответствующих концам траекторий  $x(t_0 + \varepsilon)$ , порожденных управлениями  $u(t) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu)$ :

$$G_y(\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^m: \exists u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu), y = Cx(t_0 + \varepsilon, x^0, u(\cdot))\}.$$

В приведенных выше определениях можно считать, что  $\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2[t_0, t_0 + \varepsilon]$ , либо  $\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2[t_0, t_0 + \bar{\varepsilon}]$ . Нетрудно понять, что для любого из этих пространств мы получаем одно и то же множество достижимости. Будем далее считать, что  $\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2[t_0, t_0 + \varepsilon]$ .

Если матрица  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  такова, что в каждой ее строке только один элемент равен 1, а остальные равны 0, а в каждом столбце содержится не более одного ненулевого элемента, то  $y = Cx$  состоит из  $m$  координат вектора  $x$ , а множество достижимости  $G_y(\varepsilon)$  представляет собой проекцию множества  $G(\varepsilon)$  на  $m$ -мерную координатную плоскость.

Заметим, что  $G_y(\varepsilon) = CG(\varepsilon)$ .

**Определение 3.** Пусть  $x(t, u(\cdot))$  — движение, отвечающее управлению  $u(\cdot)$ . Тогда назовем систему

$$\delta \dot{x} = A(t)\delta x + B(t)\delta u, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon, \quad \delta x(t_0) = 0, \quad (1.3)$$

линеаризацией системы (1.1) вдоль траектории  $x(t, u(\cdot))$ , если  $A(t) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(t, x(t, u(\cdot))) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(t, x(t, u(\cdot)))u(\cdot)$ ,  $B(t) = f_2(t, x(t, u(\cdot)))$ . Здесь  $A(t)$  представляет собой матрицу Якоби функции  $f_1 + f_2 u(\cdot)$ , вычисленную вдоль траектории  $x(t, u(\cdot))$ .

**Определение 4.** Симметричная матрица, определенная равенством

$$W(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} X(t_0 + \varepsilon, t)B(t)B^\top(t)X^\top(t_0 + \varepsilon, t) dt,$$

называется грамианом управляемости системы (1.3) на интервале времени  $t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon$ .

**Определение 5.** Симметричная матрица, определенная равенством

$$W_y(\varepsilon) = C \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} X(t_0 + \varepsilon, t)B(t)B^\top(t)X^\top(t_0 + \varepsilon, t) dt C^\top = CW(\varepsilon)C^\top,$$

называется грамианом управляемости системы (1.3) на интервале времени  $t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon$  по выходу  $y$ .

Система (1.3) вполне управляема на  $[t_0, t_0 + \varepsilon]$  тогда и только тогда, когда ее грамиан управляемости  $W(\varepsilon)$  — положительно определенная матрица. Система (1.3) вполне управляема на  $[t_0, t_0 + \varepsilon]$  по выходу  $y = Cx$  тогда и только тогда, когда грамиан управляемости  $W_y(\varepsilon)$  — положительно определенная матрица.

## § 2. Преобразование грамиана управляемости линеаризованной системы при замене времени

Исследование выпуклости и асимптотического поведения множеств достижимости нелинейных систем на малых интервалах времени основано на исследовании асимптотики собственных чисел грамиана управляемости линеаризованных систем в нормированном времени [10, 13].

Если провести замену времени  $t = \varepsilon\tau + t_0$  и принять обозначения  $z(\tau) = x(\varepsilon\tau + t_0)$  и  $v(\tau) = \varepsilon u(\varepsilon\tau + t_0)$ , тогда (1.1) примет вид

$$\dot{z}(\tau) = \tilde{f}_1(\tau, z(\tau)) + \tilde{f}_2(\tau, z(\tau))v(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad z(0) = x_0, \quad (2.1)$$

где  $\tilde{f}_1(\tau, z) = \varepsilon f_1(\varepsilon\tau + t_0, z)$ ,  $\tilde{f}_2(\tau, z) = f_2(\varepsilon\tau + t_0, z)$ , а управление  $v(t)$  удовлетворяет ограничениям

$$\int_0^1 v^\top(\tau)v(\tau) d\tau \leq (\mu\sqrt{\varepsilon})^2. \quad (2.2)$$

Обозначим через  $\tilde{G}(\varepsilon)$  множество достижимости данной системы в момент времени  $\tau = 1$ :

$$\tilde{G}(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{R}^n : \exists v(\cdot) \in \mathbb{L}_2[0, 1], \|v(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2[0, 1]}^2 \leq (\mu\sqrt{\varepsilon})^2, z = z(1, x^0, v(\cdot))\}.$$

По аналогии с (1.3), линеаризуем (2.1) вдоль траектории  $z(\tau, v(\tau)) = x(\varepsilon\tau + t_0, \varepsilon u(\varepsilon\tau + t_0))$ :

$$\delta\dot{z} = \varepsilon A(\varepsilon\tau + t_0)\delta z(\tau) + B(\varepsilon\tau + t_0)\delta v(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad \delta z(0) = 0, \quad (2.3)$$

Фундаментальную матрицу  $X_\varepsilon(\tau, \xi)$  системы (2.3) определим, как решение уравнения

$$\frac{dX_\varepsilon(\tau, \xi)}{d\tau} = \varepsilon A(\varepsilon\tau + t_0)X_\varepsilon(\tau, \xi), \quad X_\varepsilon(\tau, \tau) = I.$$

Фундаментальные матрицы систем (1.3) и (2.3) эквивалентны с учетом замены времени и обозначения  $\tilde{X}_\varepsilon(\tau, \xi) = X(\varepsilon\tau + t_0, \varepsilon\xi + t_0)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dX(t, \zeta)}{dt} &= A(t)X(t, \zeta), \\ \zeta &= \varepsilon\xi + t_0, \quad t = \varepsilon\tau + t_0, \\ \frac{dX(\varepsilon\tau + t_0, \varepsilon\xi + t_0)}{d(\varepsilon\tau + t_0)} &= A(\varepsilon\tau + t_0)X(\varepsilon\tau + t_0, \varepsilon\xi + t_0), \\ \frac{dX_\varepsilon(\tau, \xi)}{d\tau} &= \varepsilon A(\varepsilon\tau + t_0)X_\varepsilon(\tau, \xi), \quad X_\varepsilon(\tau, \tau) = I. \end{aligned}$$

Обозначим через  $\tilde{W}(\varepsilon)$  грамиан управляемости системы (2.3) на отрезке  $[0, 1]$ . Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Для множеств достижимости и грамианов управляемости систем (1.1) и (2.1) имеют место равенства

$$\tilde{G}(\varepsilon) = G(\varepsilon), \quad \tilde{G}_y(\varepsilon) = G_y(\varepsilon), \quad \tilde{W}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}W(\varepsilon).$$

**Доказательство.** Действительно, равенство областей достижимости следует из равенств  $x(t_0 + \varepsilon) = z(1)$  и, соответственно,  $y(t_0 + \varepsilon) = Cz(1)$ , где  $x(t) = x(t, u(\cdot))$ ,  $y(t) = Cx(t, u(\cdot))$ ,  $z(\tau) = z(\tau, \nu(\cdot))$ ,  $\nu(\tau) = \varepsilon u(\varepsilon\tau + t_0)$ .

Для грамианов управляемости мы имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(\varepsilon) &= \int_0^1 X_\varepsilon(1, \tau) B(\varepsilon\tau + t_0) B^\top(\varepsilon\tau + t_0) X_\varepsilon^\top(1, \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 X(t_0 + \varepsilon, \varepsilon\tau + t_0) B(\varepsilon\tau + t_0) B^\top(\varepsilon\tau + t_0) X^\top(t_0 + \varepsilon, \varepsilon\tau + t_0) d(\varepsilon\tau + t_0) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} X(t_0 + \varepsilon, t) B(t) B^\top(t) X^\top(t_0 + \varepsilon, t) dt = \frac{1}{\varepsilon} W(\varepsilon). \end{aligned}$$

□

Таким образом, грамиан линейризованной системы с замененным временем (2.3) может быть выражен через грамиан линейризованной в исходном времени системы (1.3). При получении достаточных условий выпуклости МД и проведении численных расчетов удобно работать с системой (2.3).

### § 3. О выпуклости множеств достижимости по выходу на малых интервалах времени

В этом параграфе исследуется асимптотика множеств достижимости по выходу  $y = Cx$  на малых временных промежутках, и, в частности, проекций этих множеств на координатные плоскости. Условия выпуклости определяются поведением грамиана управляемости по выходу при малых  $\varepsilon$ . Минимальное собственное число грамиана не должно стремиться к нулю слишком быстро при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Этим определяется не только выпуклость, но и соответствующее асимптотическое поведение МД. При выполнении данных условий, МД оказывается близким по форме к эллипсоиду.

Будем далее считать выполненным следующее предположение.

**Предположение 1.** Функции  $f_1(t, x)$ ,  $f_2(t, x)$  имеют непрерывные производные по  $x$ , удовлетворяющие условиям Липшица:  $\forall t \in [t_0; t_0 + \bar{\varepsilon}]$ ,  $x_1, x_2 \in D$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial f_1}{\partial x}(t, x_1) - \frac{\partial f_1}{\partial x}(t, x_2) \right\| &\leq l_3 \|x_1 - x_2\|, \\ \left\| \frac{\partial f_2}{\partial x}(t, x_1) - \frac{\partial f_2}{\partial x}(t, x_2) \right\| &\leq l_4 \|x_1 - x_2\|, \end{aligned}$$

где  $l_3 \geq 0$ ,  $l_4 \geq 0$ .

Условием управляемости линейризованной системы (1.3) является положительная определенность грамиана управляемости  $\widetilde{W}(\varepsilon)$ , то есть его минимальное собственное число  $\nu(\varepsilon)$  должно быть строго положительно. Строго говоря, для проверки управляемости системы (1.3) следует рассматривать грамиан  $W(\varepsilon)$ , но в силу утверждения 1 и для удобства дальнейших рассуждений будем рассматривать  $\widetilde{W}(\varepsilon)$ .

Аналогично, для управляемости по выходу  $y$  необходимо, чтобы минимальное собственное число  $\nu^y(\varepsilon)$  симметричной матрицы  $\widetilde{W}_y(\varepsilon) = C\widetilde{W}(\varepsilon)C^\top$  также было положительным.

Для определения близости множества достижимости нелинейной системы к множеству достижимости линейризованной системы при малых  $\varepsilon$  будем использовать расстояние Банаха–Маэура.

Напомним, что расстоянием Банаха–Мазура между выпуклыми компактными множествами  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$  называют величину  $\rho(X, Y)$ , определенную равенством

$$\rho(X, Y) := \log(r(X, Y) \cdot r(Y, X)),$$

где  $r(X, Y) = \inf\{t \geq 1: tX \supset Y\}$ .

Пусть  $X = X(\varepsilon), Y = Y(\varepsilon)$  — выпуклые компактные множества, такие, что  $0 \in \text{int } X(\varepsilon), 0 \in \text{int } Y(\varepsilon)$  при  $0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ . Тогда, следуя [11], назовем множества  $X(\varepsilon)$  и  $Y(\varepsilon)$  *асимптотически эквивалентными*, если  $\rho(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Приведем далее достаточное условие асимптотической эквивалентности, выраженное через хаусдорфово расстояние  $h$  между ними.

**Теорема 1** (см. [12]). *Выполнения следующих условий достаточно для того, чтобы множества  $X(\varepsilon)$  и  $Y(\varepsilon)$  были асимптотически эквивалентны:*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h(X(\varepsilon), Y(\varepsilon))}{\delta_{\min}(Y(\varepsilon))} = 0,$$

где  $\delta_{\min}(Y(\varepsilon)) = \inf_{\|y\|=1} \delta(y|Y(\varepsilon))$ , а  $\delta(y|Y(\varepsilon))$  — опорная функция множества  $Y(\varepsilon)$ .

**Теорема 2.** *При достаточно малых  $\varepsilon$  множество достижимости  $G_y(\varepsilon)$  системы (1.1) по выходу  $y = Cx$  выпукло и асимптотически эквивалентно множеству  $W_y^{1/2}(\varepsilon)B_{\mathbb{R}^n}(0, \mu) + Cx(t_0 + \varepsilon, 0)$ , если найдутся такие  $K > 0, \alpha > 0, 0 < \varepsilon_0 < \bar{\varepsilon}$ , что для всех  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$*

$$\nu^y(\varepsilon) \geq \begin{cases} K\varepsilon^{3-\alpha}, & \text{если } f_2(t, x) \text{ не зависит от } x, \\ K\varepsilon^{1-\alpha}, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь  $W_y^{1/2}(\varepsilon)$  — арифметический квадратный корень из матрицы  $W_y(\varepsilon)$ ,  $B_{\mathbb{R}^n}(0, \mu)$  — евклидов шар радиуса  $\mu$  в  $\mathbb{R}^n$

**Доказательство.** При фиксированном  $\varepsilon$  введем отображение  $F_\varepsilon: \mathbb{L}_2[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , зависящее от параметра  $\varepsilon$  равенством  $F_\varepsilon(v(\cdot)) = z(1, v(\cdot))$ , где  $z(\tau, v(\cdot))$  — траектория системы (2.1), соответствующая управлению  $v(\cdot)$ . Тогда композиция  $H_\varepsilon: \mathbb{L}_2[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k$  отображений  $F_\varepsilon$  и  $C$  есть  $H_\varepsilon(v(\cdot)) = CF_\varepsilon(v(\cdot)) = Cz(1, v(\cdot))$ . В силу (2.2), мы имеем  $H_\varepsilon(B_{\mathbb{L}_2[0, 1]}(0, \varrho(\varepsilon))) = \tilde{G}_y(\varepsilon) = G_y(\varepsilon)$ , где  $\varrho(\varepsilon) = \mu\sqrt{\varepsilon}$ .

Отображение  $H_\varepsilon$  непрерывно дифференцируемо по Фреше для  $\forall v(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2[0, 1]}(0, \varrho(\varepsilon))$ , как композиция непрерывно дифференцируемых отображений, и его производная Фреше  $H'_\varepsilon: \mathbb{L}_2[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k$  определена равенством

$$H'_\varepsilon(v(\cdot))\delta v = C\delta z(1) = CF'_\varepsilon(v(\cdot))\delta v,$$

где  $\delta z(1)$  — решение линеаризованной системы (2.3) с нулевыми начальными условиями и управлением  $\delta v(\tau)$ ,  $F'_\varepsilon(v(\cdot))$  — производная Фреше отображения  $F_\varepsilon$ . Для  $F'_\varepsilon$  имеет место равенство (см., например, [13])

$$F'_\varepsilon(v(\cdot)) = X_\varepsilon(1, \tau, v(\cdot))B_\varepsilon(\tau, v(\cdot)), \quad \tau \in [0, 1], \quad (3.2)$$

где  $X_\varepsilon(1, \tau, v(\cdot))$  — фундаментальная матрицы системы (2.3), матрицы которой  $A_\varepsilon(\tau), B_\varepsilon(\tau)$  зависят от  $v(\cdot)$ . Из (3.2) следует, что  $H'_\varepsilon(v(\cdot))$  есть не что иное, как

$$H'_\varepsilon(v(\cdot)) = CX_\varepsilon(1, \tau, v(\cdot))B_\varepsilon(\tau, v(\cdot)), \quad \tau \in [0, 1],$$



Можно доказать, что  $F'_\varepsilon(v(\cdot))$  — липшицева:

$$\|F'_\varepsilon(v_1(\cdot)) - F'_\varepsilon(v_2(\cdot))\| \leq L(\varepsilon) \|v_1(\cdot) - v_2(\cdot)\| \quad (3.3)$$

при  $v \in B_{\mathbb{L}_2[0,1]}(0, \rho(\varepsilon))$ , но тогда и  $H'_\varepsilon(v(\cdot))$  — липшицева. Доказательство проводится по схеме работы [13]. При этом  $L(\varepsilon) = L_0 + L_1\varepsilon$ , где  $L_0 = 0$ , если  $f_2(t, x)$  не зависит от  $x$ . Тогда можно оценить максимальный радиус  $\rho(\varepsilon)$  гильбертова шара  $B_{\mathbb{L}_2[0,1]}(0, \rho(\varepsilon))$ , образ которого  $F_\varepsilon(B_{\mathbb{L}_2[0,1]}(0, \rho(\varepsilon)))$  будет выпуклым (см. [7, 10]):

$$\rho(\varepsilon) \leq \frac{\sqrt{\nu(\varepsilon)}}{2L(\varepsilon)}. \quad (3.4)$$

Теперь проведем аналогичные рассуждения для  $H_\varepsilon$ . Аналог неравенства (3.3) имеет вид

$$\|H'_\varepsilon(v_1(\cdot)) - H'_\varepsilon(v_2(\cdot))\| \leq L(\varepsilon) \|v_1(\cdot) - v_2(\cdot)\|,$$

где для константы Липшица  $L(\varepsilon) = L_0 + L_1\varepsilon$  отображения  $H_\varepsilon$  сохраним то же обозначение, что и в (3.3). А неравенство (3.4) перепишем так, чтобы найти условие, при котором множество достижимости системы (2.1) по выходу  $\tilde{G}_y(1) = H_\varepsilon(B_{\mathbb{L}_2[0,1]}(0, \varrho(\varepsilon)))$  будет выпуклым:

$$4\varrho^2(\varepsilon)L^2(\varepsilon) = 4\mu^2\varepsilon L^2(\varepsilon) \leq \nu^y(\varepsilon), \quad (3.5)$$

где  $\varrho(\varepsilon) = \mu\sqrt{\varepsilon}$ .

В случае, если функция  $f_2(t, x)$  не зависит от  $x$ , то  $L(\varepsilon) = L_1\varepsilon$ , а (3.5) принимает вид  $\nu^y(\varepsilon) \geq 4\mu^2L_1^2\varepsilon^3$ . Это неравенство будет выполнено, если  $K\varepsilon^{3-\alpha} \geq 4\mu^2L_1^2\varepsilon^3$ , что равносильно соотношению  $\varepsilon \geq \varepsilon_1 := \left(\frac{K}{4\mu^2L_1^2}\right)^{1/\alpha}$ . Таким образом, множество достижимости  $G_y(\varepsilon)$  выпукло при  $0 \leq \varepsilon \leq \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ .

В другом случае, если  $f_2(t, x)$  зависит от  $x$ ,  $L(\varepsilon) = L_0 + L_1\varepsilon$ , а (3.5) принимает вид  $\nu^y(\varepsilon) \geq 4\mu^2\varepsilon(L_0 + L_1\varepsilon)^2$ . Учитывая, что  $\nu^y(\varepsilon) \geq K\varepsilon^{1-\alpha}$ , достаточно доказать, что  $K\varepsilon^{1-\alpha} \geq 4\mu^2\varepsilon(L_0 + L_1\varepsilon)^2$ . Последнее неравенство выполняется при  $\varepsilon \leq \varepsilon_2 := \left(\frac{K}{4\mu^2(L_0 + L_1\varepsilon_0)^2}\right)^{1/\alpha}$ . Следовательно,  $G_y(\varepsilon)$  выпукло, если  $0 \leq \varepsilon \leq \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_2\}$ .

Множество  $W_y^{1/2}(\varepsilon)B_{\mathbb{R}^n}(0, \mu) + Cx(t_0 + \varepsilon, 0) = H'_\varepsilon(0)B_{\mathbb{L}_2[0,1]}(0, \varrho(\varepsilon)) + H_\varepsilon(0)$  есть не что иное, как множество достижимости по выходу линеаризованной системы (2.3).

Доказательство асимптотической эквивалентности проекций множеств достижимости нелинейной и линеаризованной систем проводится по той же схеме, что и доказательство следствий теоремы 2 в [12]. Оценим сверху хаусдорфово расстояние между образами гильбертова шара  $H_\varepsilon(B_{\mathbb{L}_2[0,1]}(0, \varrho(\varepsilon)))$  и  $H'_\varepsilon(0)B_{\mathbb{L}_2[0,1]}(0, \varrho(\varepsilon)) + H_\varepsilon(0)$ :

$$h(G_y(\varepsilon), H'_\varepsilon(0)B_{\mathbb{L}_2[0,1]}(0, \varrho(\varepsilon)) + H_\varepsilon(0)) \leq L(\varepsilon)\varrho^2(\varepsilon).$$

А так как  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(\varepsilon)\varrho^2(\varepsilon) = 0$ , то и  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(G_y(\varepsilon), H'_\varepsilon(0)B_{\mathbb{L}_2[0,1]}(0, \varrho(\varepsilon)) + H_\varepsilon(0)) = 0$ .

Множество достижимости линеаризованной системы — конечномерный эллипсоид и его наименьшая полуось  $\delta_{\min}(H'_\varepsilon(0)B_{\mathbb{L}_2[0,1]}(0, \varrho(\varepsilon))) = \varrho(\varepsilon)\sqrt{\nu^y(\varepsilon)}$ . Следовательно,

$$\frac{h(G_y(\varepsilon), H'_\varepsilon(0)B_{\mathbb{L}_2[0,1]}(0, \varrho(\varepsilon)) + H_\varepsilon(0))}{\delta_{\min}(H'_\varepsilon(0)B_{\mathbb{L}_2[0,1]}(0, \varrho(\varepsilon)))} \leq \frac{L(\varepsilon)\varrho(\varepsilon)}{\sqrt{\nu^y(\varepsilon)}}.$$

При выполнении условий (3.1) в первом случае ( $f_2(t, x)$  не зависит от  $x$ ) имеем

$$\frac{L(\varepsilon)\varrho(\varepsilon)}{\sqrt{\nu^y(\varepsilon)}} \leq \frac{L_1\varepsilon\mu\sqrt{\varepsilon}}{K^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{3}{2}-\frac{\alpha}{2}}} = L_1\mu K^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Во втором случае

$$\frac{L(\varepsilon)\varrho(\varepsilon)}{\sqrt{\nu^y(\varepsilon)}} \leq \frac{(L_0 + L_1\varepsilon)\mu\sqrt{\varepsilon}}{K^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}} = (L_0 + L_1\varepsilon)\mu K^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{\alpha/2} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Таким образом условия теоремы 1 выполнены, а значит множества  $H'_\varepsilon(0)B_{\mathbb{L}_2[0,1]}(0, \varrho(\varepsilon)) + H_\varepsilon(0)$  и  $G_y(\varepsilon)$  асимптотически эквивалентны.  $\square$

**Утверждение 2.** Пусть  $W_1, W$  – симметричные матрицы, причем  $W_1 = CWC^\top$ , где  $C$  – матрица полного ранга размерности  $m \times n$ ,  $m \leq n$ , а  $\nu(W)$ ,  $\nu(W_1)$  и  $\nu(CC^\top)$  – наименьшие собственные числа соответствующих матриц. Тогда

$$\nu(W_1) \geq \nu(CC^\top)\nu(W).$$

**Доказательство.** Действительно,

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad x^\top W_1 x = x^\top CWC^\top x \geq \nu(W) \|C^\top x\|^2, \quad \nu(W) \|C^\top x\|^2 = \nu(W) x^\top CC^\top x.$$

Следовательно,

$$\nu(W_1) = \min_{\|x\|=1} x^\top W_1 x \geq \nu(W) \min_{\|x\|=1} x^\top CC^\top x = \nu(CC^\top)\nu(W). \quad \square$$

Применяя утверждение к грамиану управляемости линеаризованной системы  $\widetilde{W}(\varepsilon)$ , грамиану управляемости по выходу  $\widetilde{W}_y(\varepsilon)$  и их наименьшим собственным числам  $\nu^y(\varepsilon)$  и  $\nu(\varepsilon)$ , получим

$$\nu^y(\varepsilon) \geq \nu(CC^\top)\nu(\varepsilon),$$

где  $\nu(CC^\top)$  не зависит от  $\varepsilon$ . Значит асимптотика  $\nu^y(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  не может быть хуже асимптотики  $\nu(\varepsilon)$ , если  $C$  – матрица полного ранга. Это соответствует очевидному факту: если множество  $G(\varepsilon)$  выпуклое, то и для всех возможных матриц полного ранга  $C$  соответствующие множества  $G_y(\varepsilon)$  выпуклы. Однако невыпуклое множество  $G(\varepsilon)$  может иметь выпуклые проекции, что продемонстрировано в одном из примеров.

#### § 4. О выпуклости двумерных проекций множеств достижимости уницикла на малых промежутках времени

Исследуем проекции множеств достижимости на примере системы третьего порядка

$$\dot{x}_1 = \cos(x_3), \quad \dot{x}_2 = \sin(x_3), \quad \dot{x}_3 = u(t), \quad 0 \leq t \leq \varepsilon \quad (4.1)$$

при интегральных ограничениях на управление

$$\int_0^1 u^2(t) dt \leq 1$$

и нулевых начальных условиях  $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$ .

Система (4.1) известна как уницикл или машина Дуббинса. При геометрическом ограничении на управление ( $|u(t)| \leq 1$ ) проекции множества достижимости данной системы на двумерное пространство координат  $(x_1, x_2)$  были исследованы в [14]. Общая трехмерная картина множества достижимости получена в работе [3] (см. также [15]).



Запишем решение  $x(t, u(t))$ , порожденное нулевым управлением  $u(t) \equiv 0$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= 0 \longrightarrow x_3(t) = x_3(0) + 0 = 0, \\ \dot{x}_2 &= \sin(x_3(t)) = \sin(0) \longrightarrow x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t 0 \, d\tau = 0, \\ \dot{x}_1 &= \cos(x_3(t)) = \cos(0) \longrightarrow x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t 1 \, d\tau = t. \end{aligned}$$

Матрицы линеаризованной системы не зависят от  $t$  и имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Пара  $(A, B)$ , очевидно, не является вполне управляемой. Выпишем фундаментальную матрицу системы (4.2), а затем получим грамиан управляемости линеаризованной системы

$$\begin{aligned} \dot{X}(t, t_1) &= A(t)X(t, t_1), \quad X(t_1, t_1) = I, \quad X(t, \tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ W(\varepsilon) &= \int_0^\varepsilon X(\varepsilon, t)BB^\top X^\top(\varepsilon, t)dt = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon^2}{3} & \frac{\varepsilon^2}{2} \\ 0 & \frac{\varepsilon^2}{2} & \varepsilon \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Сделаем замену времени и перепишем грамиан управляемости в виде

$$\widetilde{W}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}W(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon^2}{3} & \frac{\varepsilon^2}{2} \\ 0 & \frac{\varepsilon^2}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь последовательно рассмотрим проекции системы (4.1) на координатные плоскости  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_3)$ ,  $(x_2, x_3)$ .

1. Рассмотрим плоскость  $(x_1, x_2)$ . Матрица  $C$  для этой проекции имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Грамиан управляемости в нормированном времени

$$\widetilde{W}_{x_1, x_2}(\varepsilon) = C\widetilde{W}(\varepsilon)C^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon^2}{3} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что матрица  $\widetilde{W}_{x_1, x_2}(\varepsilon)$  вырожденная. Следовательно, система (4.1) не управляема по выходу  $(x_1, x_2)$ , а значит, достаточное условие выпуклости множества достижимости по выходу  $G_{x_1, x_2}(\varepsilon)$  не выполняется. Множество  $G_{x_1, x_2}(\varepsilon)$  полученное в численном эксперименте показано на рисунке 1-I. Отметим, что в работе [10] при помощи принципа максимума доказано, что  $G(\varepsilon)$  невыпукло. Из данного доказательства также следует, что  $G_{x_1, x_2}(\varepsilon)$  тоже не является выпуклой.

В этой работе для построения множеств достижимости мы используем алгоритм, основанный на методе Монте-Карло [16, 17]. Удовлетворяющее интегральным ограничениям управление  $u(t)$  представляется в виде линейной комбинации ортогональных полиномов.

Коэффициенты этого разложения — равномерно распределенные случайные нормированные векторы. Перебирая такие векторы, будем получать программные управления, удовлетворяющие ограничениям (1.2). Концы траекторий, порожденные такими управлениями, покрывают множество достижимости.

2. Теперь рассмотрим проекцию на плоскость  $(x_1, x_3)$ . Выпишем матрицы  $C$  и  $\widetilde{W}_{x_1, x_3}(\varepsilon)$ :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{W}_{x_1, x_3}(\varepsilon) = C\widetilde{W}(\varepsilon)C^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ситуация аналогична предыдущему случаю: матрица  $\widetilde{W}_{x_1, x_3}(\varepsilon)$  вырождена, достаточное условие выпуклости не выполняется. Результат численного моделирования приведен на рисунке 1-III.

3. Наконец, перейдем к плоскости  $(x_2, x_3)$ . Здесь

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{W}_{x_2, x_3}(\varepsilon) = C\widetilde{W}(\varepsilon)C^T = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon^2}{3} & \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{\varepsilon}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае матрица  $\widetilde{W}_{x_2, x_3}(\varepsilon)$  не вырождена и ее минимальное собственное число  $\nu^{x_2, x_3} = \frac{\varepsilon^2}{12} + O(\varepsilon^4)$  удовлетворяет критерию (3.1) при достаточно малых  $\varepsilon$ , и множество достижимости по выходу  $G_{x_2, x_3}(\varepsilon)$ , как следует из теоремы 2, выпукло и асимптотически эквивалентно соответствующему множеству достижимости линеаризованной системы, что и проиллюстрировано на рисунке 1-V. Пунктирной линией на рисунке показана точная граница множества достижимости линеаризованной системы, сдвинутая на  $Cx(\varepsilon, 0)$ . Из рисунка видно, что эта граница (эллипс) практически совпадает с границей МД нелинейной системы.

Немного изменим рассмотренный пример для того, чтобы линеаризованная система оставалась управляемой. Итак, рассматривается нелинейная система

$$\dot{x}_1 = \cos(x_3), \quad \dot{x}_2 = \sin(x_3), \quad \dot{x}_3 = 1 + u(t), \quad 0 \leq t \leq \varepsilon, \quad (4.3)$$

при интегральных ограничениях на управление

$$\int_0^1 u^2(t) dt \leq 1$$

и нулевых начальных условиях  $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$ . Фактически, это то же самое, что рассматривать исходную систему при ограничении  $\int_0^1 (u(t) - 1)^2 dt \leq 1$ .

Порожденное нулевым управлением  $u(t) \equiv 0$  решение обозначим  $x(t, 0) = x(t)$  и будем использовать его как опорное.

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = 1 &\longrightarrow x_3(t) = x_3(0) + t = t, \\ \dot{x}_2 = \sin(x_3(t)) = \sin(t) &\longrightarrow x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t \sin(\tau) d\tau = 1 - \cos(t), \\ \dot{x}_1 = \cos(x_3(t)) = \cos(t) &\longrightarrow x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t \cos(\tau) d\tau = \sin(t). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Выпишем матрицы линеаризованной вдоль траектории (4.4) системы

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin(t) \\ 0 & 0 & \cos(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для изучения грамиана управляемости выпишем фундаментальную матрицу линеаризованной системы

$$X(t, \tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos(t) - \cos(t_1) \\ 0 & 1 & \sin(t) - \sin(t_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Грамиан управляемости имеет вид

$$W(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon X(\varepsilon, t) B B^\top X^\top(\varepsilon, t) dt =$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon - \frac{3}{4} \sin(2\varepsilon) + \frac{1}{2} \varepsilon \cos(2\varepsilon) & \frac{3}{2} \cos^2(\varepsilon) - \cos(\varepsilon) + \frac{1}{2} \varepsilon \sin(2\varepsilon) - \frac{1}{2} & \varepsilon \cos(\varepsilon) - \sin(\varepsilon) \\ * & \frac{3}{4} \sin(2\varepsilon) + \frac{1}{2} \varepsilon + \varepsilon \sin^2(\varepsilon) - 2 \sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) + \varepsilon \sin(\varepsilon) - 1 \\ * & * & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее, будем заменять элементы симметричных матриц под главной диагональю на символ «\*» для лаконичной записи. Проведем замену времени  $t = \varepsilon \tau$  и выпишем грамиан управляемости  $\widetilde{W}(\varepsilon)$  линеаризованной системы в новом времени  $\tau$ :

$$\widetilde{W}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} W(\varepsilon) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2(\varepsilon) - \frac{3}{4\varepsilon} \sin(2\varepsilon) + \frac{1}{2} & \cos(\varepsilon) \sin(\varepsilon) + \frac{1}{2\varepsilon} (3 \cos^2(\varepsilon) - 2 \cos(\varepsilon) - 1) & \cos(\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \sin(\varepsilon) \\ * & \frac{3}{2} - \frac{2 \sin(\varepsilon) - \frac{3 \cos(\varepsilon) \sin(\varepsilon)}{2}}{\varepsilon} - \cos(\varepsilon)^2 & \sin(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} (\cos(\varepsilon) - 1) \\ * & * & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее последовательно рассмотрим проекции системы (4.3) на координатные плоскости  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_3)$ ,  $(x_2, x_3)$ .

1. Будем рассматривать проекцию  $G_{x_1, x_2}(\varepsilon)$  области достижимости системы (4.3) на плоскость первых двух фазовых координат. Матрица проектирования будет иметь вид

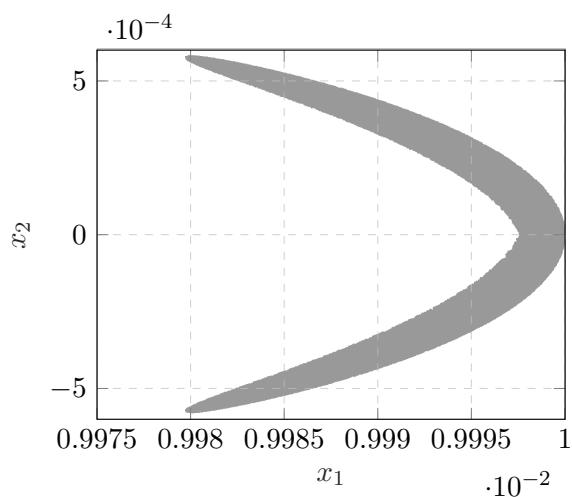
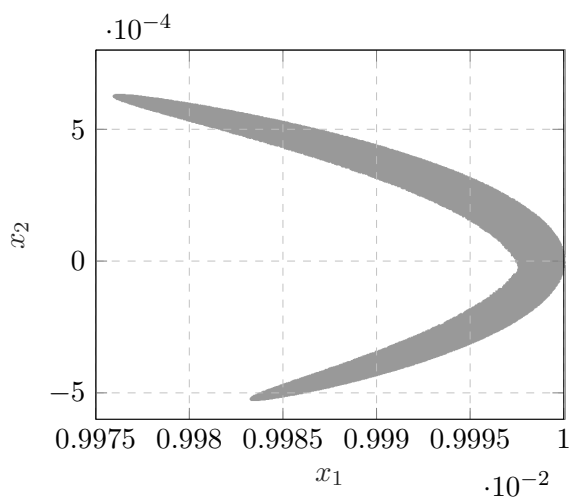
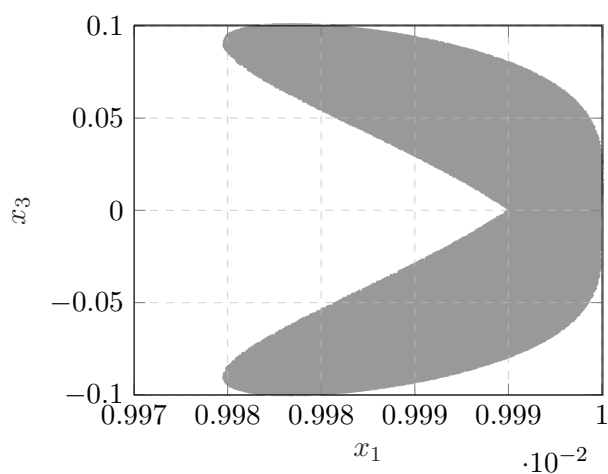
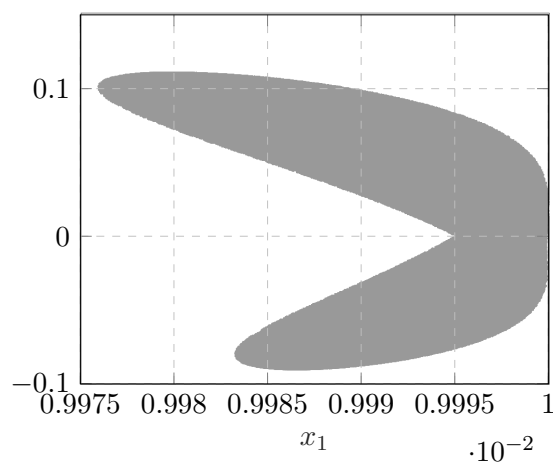
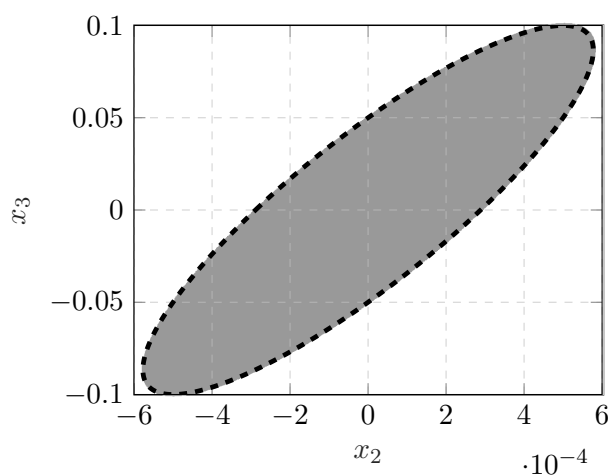
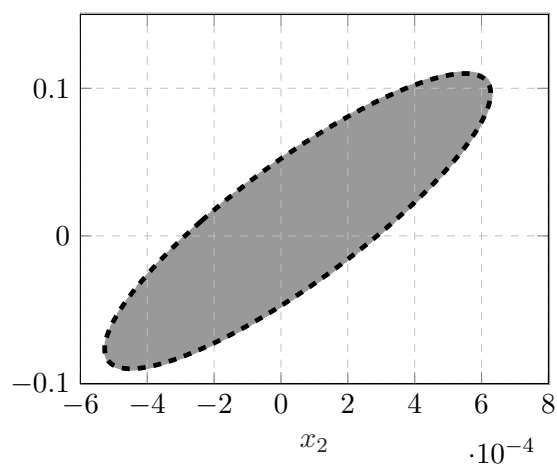
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда:

$$\widetilde{W}_{x_1, x_2}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos^2(\varepsilon) - \frac{3}{4\varepsilon} \sin(2\varepsilon) + \frac{1}{2} & \cos(\varepsilon) \sin(\varepsilon) + \frac{1}{2\varepsilon} (3 \cos^2(\varepsilon) - 2 \cos(\varepsilon) - 1) \\ * & \frac{3}{2} - \frac{1}{\varepsilon} \left( 2 \sin(\varepsilon) - \frac{3 \cos(\varepsilon) \sin(\varepsilon)}{2} \right) - \cos(\varepsilon)^2 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Для исследования асимптотики  $\nu^{x_1, x_2}(\varepsilon)$  — минимального собственного числа матрицы  $\widetilde{W}_{x_1, x_2}(\varepsilon)$ , перепишем (4.5), разложив тригонометрические функции в ряд вблизи точки  $\varepsilon = 0$ :

$$\widetilde{W}_{x_1, x_2}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{2\varepsilon^4}{15} + O(\varepsilon^6) & -\frac{5\varepsilon^3}{24} + O(\varepsilon^5) \\ -\frac{5\varepsilon^3}{24} + O(\varepsilon^5) & \frac{\varepsilon^2}{3} - \frac{3\varepsilon^4}{20} + O(\varepsilon^6) \end{pmatrix}.$$

**(I):**  $G_{x_1, x_2}(\varepsilon)$  системы (4.1)**(II):**  $G_{x_1, x_2}(\varepsilon)$  системы (4.3)**(III):**  $G_{x_1, x_3}(\varepsilon)$  системы (4.1)**(IV):**  $G_{x_1, x_3}(\varepsilon)$  системы (4.3)**(V):**  $G_{x_2, x_3}(\varepsilon)$  системы (4.1)**(VI):**  $G_{x_2, x_3}(\varepsilon)$  системы (4.3)**Рис. 1.** Результаты численного эксперимента для  $\varepsilon = 0.01$

Минимальное собственное число  $\nu^{x_1, x_2}(\varepsilon) = \frac{1}{120}\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6)$ , а  $\varepsilon^4 < \varepsilon^{3-\alpha}$  для всех  $\alpha > 0$  при достаточно малых  $\varepsilon$ , то есть достаточное условие выпуклости  $G_{x_1, x_1}(\varepsilon)$  не выполняется. Результаты численного моделирования, приведенные на рисунке 1-II, показывают невыпуклость проекции.

2. Перейдем к плоскости  $(x_1, x_3)$ :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{W}_{x_2, x_3}(\varepsilon) = C\widetilde{W}(\varepsilon)C^T = \begin{pmatrix} \cos^2(\varepsilon) - \frac{3}{4\varepsilon} \sin(2\varepsilon) + \frac{1}{2} & \cos(\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \sin(\varepsilon) \\ * & 1 \end{pmatrix}.$$

Так же как и в случае плоскости  $(x_1, x_2)$ , разложим компоненты  $\widetilde{W}_{x_1, x_3}(\varepsilon)$  в ряд вблизи точки  $\varepsilon = 0$ :

$$\widetilde{W}_{x_1, x_3}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{2\varepsilon^4}{15} + O(\varepsilon^6) & -\frac{\varepsilon^2}{3} + O(\varepsilon^4) \\ -\frac{\varepsilon^2}{3} + O(\varepsilon^4) & 1 \end{pmatrix}.$$

Минимальное собственное число  $\nu^{x_1, x_3} = \frac{1}{45}\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6)$  матрицы  $\widetilde{W}_{x_1, x_3}(\varepsilon)$  также не удовлетворяет условию (3.1). Соответствующий результат численного построения проекции множества достижимости показан на рисунке 1-IV.

3. Последний случай — плоскость  $(x_2, x_3)$ :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{W}_{x_2, x_3}(\varepsilon) = C\widetilde{W}(\varepsilon)C^T = \\ = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{2 \sin(\varepsilon) - \frac{3 \cos(\varepsilon) \sin(\varepsilon)}{2}}{\varepsilon} - \cos(\varepsilon)^2 & \sin(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}(\cos(\varepsilon) - 1) \\ * & 1 \end{pmatrix}.$$

Точно так же разложим  $\widetilde{W}_{x_2, x_3}(\varepsilon)$  в ряд:

$$\widetilde{W}_{x_2, x_3}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon^2}{3} + O(\varepsilon^4) & \frac{\varepsilon}{2} + O(\varepsilon^3) \\ \frac{\varepsilon}{2} + O(\varepsilon^3) & 1 \end{pmatrix}.$$

Минимальное собственное число в этом случае равно  $\nu^{x_2, x_3}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{12} + O(\varepsilon^4)$ , то есть удовлетворяет условию (3.1). Выпуклость этой проекции проиллюстрирована на рисунке 1-VI. Как и на рисунке 1-V, здесь пунктирной линией показана точная граница множества достижимости линеаризованной системы.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в региональном научно-образовательном центре НОЦ ИММ УрО РАН, «Уральский математический центр».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kurzanski A. B., Varaiya P. Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation. Basel: Birkhäuser, 2014. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-10277-1>
2. Вдовин С. А., Тарасьев А. М., Ушаков В. Н. Построение множества достижимости интегратора Брокетта // Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68. № 5. С. 707–724. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17670066>

3. Пацко В. С., Пятко С. Г., Федотов А. А. Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 8–16. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17252513>
4. Горнов А. Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука, 2009.
5. Guseinov K. G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V. N. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls // Nonlinear Differential Equations and Applications. 2007. Vol. 14. No. 1–2. P. 57–73. <https://doi.org/10.1007/s00030-006-4036-6>
6. Filippova T. F. Ellipsoidal estimates of reachable sets for control systems with nonlinear terms // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50. Issue 1. P. 15355–15360. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.2460>
7. Polyak B. T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L2 bounded controls // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. A: Mathematical Analysis. 2004. Vol. 11. P. 255–267.
8. Поляк Б. Т. Локальное программирование // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 9. С. 1324–1331. <http://mi.mathnet.ru/zvmmf1285>
9. Gusev M. I. On convexity of reachable sets of a nonlinear system under integral constraints // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. Issue 32. P. 207–212. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.382>
10. Гусев М. И., Осипов И. О. Асимптотическое поведение множеств достижимости на малых временных промежутках // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 3. С. 86–99. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-3-86-99>
11. Goncharova E., Ovseevich A. Small-time reachable sets of linear systems with integral control constraints: birth of the shape of a reachable set // Journal of Optimization Theory and Applications. 2016. Vol. 168. No. 2. P. 615–624. <https://doi.org/10.1007/s10957-015-0754-4>
12. Gusev M. I. The limits of applicability of the linearization method in calculating small-time reachable sets // Ural Mathematical Journal. 2020. Vol. 6. No. 1. P. 71–83. <https://doi.org/10.15826/umj.2020.1.006>
13. Gusev M. I. Estimates of the minimal eigenvalue of the controllability Gramian for a system containing a small parameter // Mathematical Optimization Theory and Operations Research. Cham: Springer, 2019. P. 461–473. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-22629-9\\_32](https://doi.org/10.1007/978-3-030-22629-9_32)
14. Cockayne E. J., Hall G. W. C. Plane motion of a particle subject to curvature constraints // SIAM Journal on Control. 1975. Vol. 13. No. 1. P. 197–220. <https://doi.org/10.1137/0313012>
15. Пацко В. С., Федотов А. А. Множество достижимости в момент для машины Дубинса в случае одностороннего поворота // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 143–155. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-1-143-155>
16. Зыков И. В., Осипов И. О. Программа для построения методом Монте-Карло множеств достижимости нелинейных систем с интегральными ограничениями на управление, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020661557, 2020.
17. Zykov I. V. An algorithm for constructing reachable sets for systems with multiple integral constraints // Mathematical Analysis With Applications. Cham: Springer, 2020. P. 51–60. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-42176-2\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-030-42176-2_6)

Поступила в редакцию 21.12.2020

Осипов Иван Олегович, аспирант, отдел оптимального управления, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3071-535X>  
E-mail: [i.o.osipov@imm.uran.ru](mailto:i.o.osipov@imm.uran.ru)

**Цитирование:** И. О. Осипов. О выпуклости множеств достижимости по части координат нелинейных управляемых систем на малых промежутках времени // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 210–225.



**I. O. Osipov****On the convexity of the reachable set with respect to a part of coordinates at small time intervals**

*Keywords:* nonlinear control systems, reachable sets, integral constraints, convexity, linearization, small time interval, asymptotics.

MSC2020: 93B03

DOI: [10.35634/vm210204](https://doi.org/10.35634/vm210204)

We investigate the convexity of the reachable sets for some of the coordinates of nonlinear systems with integral constraints on the control at small time intervals. We have proved sufficient convexity conditions in the form of constraints on the asymptotics of the eigenvalues of the Gramian of the controllability of a linearized system for some of the coordinates. There are two nonlinear third-order systems under study as examples. The system linearized along a trajectory generated by zero control is uncontrollable, and the system in the other example is completely controllable. We investigate the sufficient conditions for convexity of projection of reachable sets. Numerical modeling has been carried out, demonstrating the non-convexity of some projections even for small time intervals.

**Funding.** The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center.

## REFERENCES

1. Kurzhanski A. B., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation*, Basel: Birkhäuser, 2014. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-10277-1>
2. Vdovin S. A., Taras'yev A. M., Ushakov V. N. Construction of the attainability set of a Brockett integrator, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, vol. 68, no. 5, pp. 631–646. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2004.09.001>
3. Patsko V. S., Pyatko S. G., Fedotov A. A. Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2003, vol. 42, no. 3, pp. 320–328. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41191054>
4. Gornov A. Yu. *Vychislitel'nye tekhnologii resheniya zadach optimal'nogo upravleniya* (Computational technologies for solving optimal control problems), Novosibirsk: Nauka, 2009.
5. Guseinov K. G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V. N. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls, *Nonlinear Differential Equations and Applications*, 2007, vol. 14, no. 1–2, pp. 57–73. <https://doi.org/10.1007/s00030-006-4036-6>
6. Filippova T. F. Ellipsoidal estimates of reachable sets for control systems with nonlinear terms, *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50, issue 1, pp. 15355–15360. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.2460>
7. Polyak B. T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L2 bounded controls, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. A: Mathematical Analysis*, 2004, vol. 11, pp. 255–267.
8. Polyak B. T. Local programming, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2001, vol. 41, no. 9, pp. 1259–1266. <https://zbmath.org/?q=an:1040.90048>
9. Gusev M. I. On convexity of reachable sets of a nonlinear system under integral constraints, *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, issue 32, pp. 207–212. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.382>
10. Gusev M. I., Osipov I. O. Asymptotic behavior of reachable sets on small time intervals, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2020, vol. 309, suppl. 1, pp. 52–64. <https://doi.org/10.1134/S0081543820040070>
11. Goncharova E., Ovseevich A. Small-time reachable sets of linear systems with integral control constraints: birth of the shape of a reachable set, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2016, vol. 168, no. 2, pp. 615–624. <https://doi.org/10.1007/s10957-015-0754-4>
12. Gusev M. I. The limits of applicability of the linearization method in calculating small-time reachable sets, *Ural Mathematical Journal*, 2020, vol. 6, no. 1, pp. 71–83. <https://doi.org/10.15826/umj.2020.1.006>

13. Gusev M. I. Estimates of the minimal eigenvalue of the controllability Gramian for a system containing a small parameter, *Mathematical Optimization Theory and Operations Research*, Cham: Springer, 2019, pp. 461–473. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-22629-9\\_32](https://doi.org/10.1007/978-3-030-22629-9_32)
14. Cockayne E. J., Hall G. W. C. Plane motion of a particle subject to curvature constraints, *SIAM Journal on Control*, 1975, vol. 13, no. 1, pp. 197–220. <https://doi.org/10.1137/0313012>
15. Patsko V. S., Fedotov A. A. Attainability set at instant for one-side turning Dubins car, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 143–155 (in Russian). <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-1-143-155>
16. Zykov I. V., Osipov I. O. A program for constructing the reachable sets of nonlinear systems with integral control constraints by the Monte Carlo method, certificate of state registration of a computer program No. 2020661557, 2020.
17. Zykov I. V. An algorithm for constructing reachable sets for systems with multiple integral constraints, *Mathematical Analysis With Applications*, Cham: Springer, 2020, pp. 51–60. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-42176-2\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-030-42176-2_6)

Received 21.12.2020

Osipov Ivan Olegovich, Post-Graduate Student, Department of Optimal Control, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3071-535X>

E-mail: [i.o.osipov@imm.uran.ru](mailto:i.o.osipov@imm.uran.ru)

**Citation:** I. O. Osipov. On the convexity of the reachable set with respect to a part of coordinates at small time intervals, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 2, pp. 210–225.