МАТЕМАТИКА 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 311–330.

УДК 517.98

© *Д. О. Цветков*

ЗАДАЧА О НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВЯЗКОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ С УПРУГОЙ МЕМБРАНОЙ

Исследованы нормальные колебания вязкой стратифицированной жидкости, частично заполняющей произвольный сосуд и ограниченной сверху упругой горизонтальной мембраной. При этом рассматривается скалярная модельная задача, отражающая основные особенности векторной пространственной задачи. Получено характеристическое уравнение для собственных значений модельной задачи, изучается структура спектра и асимптотика ветвей собственных значений. Высказываются предположения о структуре спектра колебаний вязкой стратифицированной жидкости, ограниченной упругой мембраной, для произвольного сосуда. Доказано, что спектр задачи дискретен, расположен в правой комплексной полуплоскости симметрично относительно вещественной оси и имеет единственную предельную точку $+\infty$. Более того, спектр определенным образом локализован в правой полуплоскости, зона локации зависит от динамической вязкости жидкости.

Ключевые слова: эффект стратификации в вязких жидкостях, дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве, мембрана, нормальные колебания.

DOI: 10.35634/vm210211

Введение

Создание резервуаров большой емкости для хранения жидкости в сейсмоопасных районах и транспортировки жидких грузов требует тщательного анализа возможного резонансного возбуждения волновых движений жидкости. Одним из средств ограничения ее подвижности могут быть мембраны или пластинки, закрывающие свободную поверхность жидкости. В связи с этим могут возникать сильные взаимодействия, часто приводящие к пагубным последствиям, ставя под угрозу целостность системы [1]. Заметим, что механические, тепловые и другие воздействия, как правило, вызывают разделение жидкости на слои, имеющие разную плотность, что, в свою очередь, приводит к образованию внутренних волн. Это обстоятельство обуславливает интерес к исследованию влияния стратификации на собственные колебания гидроупругой системы.

К настоящему времени разработаны различные аналитические и численные подходы к изучению поведения мембраноподобных структур, взаимодействующих с жидкостью [2–19]. При этом в математической физики известны ряд методов опирающихся на функциональный анализ и теорию операторов в абстрактных гильбертовых пространствах. В качестве примера можно привести теорию квадратичных операторных пучков, которая широко используется при исследовании различных задач механики и гидродинамики, связанных с проблемой нормальных колебаний (см., например, [20–25]). Методами этой теории удалось установить ряд чрезвычайно общих и тонких результатов относительно характера нормальных колебаний и их спектра для некоторых классов задач математической физики. Общие идеи этого метода можно найти, например, в двухтомной монографии [7,8].

Отметим отдельно работы [16, 26], где с позиции функционального анализа изучались вопросы разрешимости линейных начально-краевых задач, структуры и характера спектра нормальных колебаний однородной и многослойной идеальной жидкости с упругими мембранами, а также цикл работ профессора Кононова Ю. Н. (см., например, [13, 15, 18]), где в линейной постановке рассматриваются различные ограничения жидкости мембранами в зависимости от геометрии сосуда. Для широкого круга параметров рассматриваемых механических систем проведены численные исследования собственных частот, построены приближенные решения рассматриваемых задач.

Если теория динамических свойств стратифицированной идеальной жидкости с упругой мембраной к настоящему времени сравнительно хорошо разработана, то это нельзя сказать о вязкой жидкости. Данная работа является продолжением работы [27], которая посвящена проблеме малых колебаний вязкой стратифицированной жидкости в ограниченной области с упругой мембраной на «свободной» поверхности. (Под «свободной» будем понимать верхнюю границу жидкости. Поскольку мембрана все же является механическим ограничителем движений жидкости, то этот термин используется в кавычках.) Были получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы. Таким образом, целью настоящей работы является изложение полученных результатов, относящихся к задаче о нормальных колебаниях рассматриваемой гидросистемы.

Изложение в работе проведено по следующей схеме. После введения в параграфе 1 формулируются постановки как исходной начально-краевой задачи, так и ее операторная формулировка, изложенные подробно в [27]. В параграфе 2 рассматривается скалярная модельная задача, отражающая основные особенности векторной пространственной задачи. В параграфе 3 исследуется задача о нормальных колебаниях вязкой стратифицированной жидкости в произвольном сосуде.

§ 1. Дополнительные сведения: постановка начально-краевой задачи, операторная формулировка задачи

Пусть вязкая стратифицированная жидкость, плотность которой в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси, частично заполняет неподвижный сосуд и занимает в состоянии покоя область Ω, ограниченную твердой стенкой S и горизонтальной границей Γ, на которой находится упругая мембрана. Обозначим через ρ_m поверхностную плотность мембраны, а через σ — величину ее предварительного растяжения. Считаем, что на границе $\partial\Gamma$ мембрана закреплена, то есть ее смещение равно нулю. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с сосудом, таким образом, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится на Γ. Обозначим через $\vec{n}$ единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega$ и направленный вне Ω, через $\mu = \mathrm{const} > 0$ — коэффициент динамической вязкости, а через $\rho_0 = \rho_0(x_3)$ — плотность жидкости в состоянии покоя.

Рассмотрим основной случай устойчивой стратификации жидкости по плотности:

$$0 < N^2_{\min} \leqslant N^2(x_3) \leqslant N^2_{max} = N_0^2 < \infty, \quad N^2(x_3) = -\rho_0^{-1}(x_3) g \rho_0'(x_3), \quad \rho_0(0) > 0, \tag{1.1}$$

где $N^2(x_3)$ — квадрат частоты плавучести (частоты Вейсяля–Брента).

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Обозначим через $\vec{u} = \vec{u}(t,x),\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, поле скорости в жидкости, $p = p(t,x)$ — отклонение поля давлений от равновесного давления $P_0 = P_0(x_3),\ \rho = \rho(t,x)$ — отклонение поля плотности от исходного поля $\rho_0(x_3)$, а через $\zeta = \zeta(t,\hat{x})$ ($\hat{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma$) — отклонение свободно движущейся поверхности жидкости $\Gamma(t)$ от Γ по нормали $\vec{n}$. Тогда малые движения исходной системы описываются следующей начально-краевой задачей (см. [27]):

$$\begin{gathered} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3)\left(-\nabla p - g\rho\vec{e}_3 + \mu\Delta\vec{u}\right) + \vec{f}(x,t) \quad (\text{в}\,\Omega), \\ \operatorname{div}\vec{u} = 0\ (\text{в}\,\Omega), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\rho_0 \cdot \vec{u} = 0\ (\text{в}\,\Omega), \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_i}\right)=0\ (\,i=1,2;\ \text{на}\,\Gamma\,),\qquad \int_\Gamma \zeta\,d\zeta=0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=u_n=\vec{u}\cdot\vec{n}\quad(\text{на}\,\Gamma),\quad \zeta=0\ (\text{на}\,\partial\Gamma),\quad \vec{u}=\vec{0}\ (\text{на}\,S), \tag{1.4}$$

$$\rho_m\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=\sigma\Delta_2\zeta-g\rho_0(0)\zeta+p-2\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\ (\text{на}\,\Gamma). \tag{1.5}$$

$$\vec{u}(x,0)=\vec{u}^0(x),\quad \rho(x,0)=\rho^0(x)\quad(x\in\Omega),\quad \zeta(\hat{x},0)=\zeta_0(\hat{x})\quad(\hat{x}\in\Gamma). \tag{1.6}$$

Отметим, что первое условие (1.3) основано на предположении о том, что слои вязкой жидкости свободно скользят вдоль мембраны, а второе условие — следствие условия сохранения объема Ω при колебаниях системы. Соотношения (1.4) отражают соответственно кинематическое условие на Γ, условие закрепления мембраны по контуру и условие прилипания на твердой стенке S. Граничное условие (1.5) есть второй закон Ньютона, примененный к элементу мембраны единичной площади. В начальный момент времени естественно считать заданными условия (1.6).

Для перехода к операторной формулировке задачи введем основные пространства и ряд операторов (см. [27]).

Свяжем с функцией $\rho_0=\rho_0(x_3)$ гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ вектор-функций со скалярным произведением

$$(\vec{u},\vec{v}):=\int_\Omega \rho_0(x_3)\vec{u}(x)\cdot\overline{\vec{v}(x)}\,d\Omega.$$

Имеет место следующее ортогональное разложение:

$$\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)=\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0),$$

где

$$\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)=\left\{\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)\colon \operatorname{div}\vec{v}=0\ (\text{в}\,\Omega),\ v_n=0\ (\text{на}\ \partial\Omega)\right\},$$

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)=\{\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)\colon \vec{v}=\rho_0^{-1}\nabla p,\ v_n=0\,(\text{на}\,S),\ \nabla\cdot\vec{v}=0\,(\text{в}\,\Omega),\ \int_\Gamma p\,d\Gamma=0\},$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)=\{\vec{w}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)\colon \vec{w}=\rho_0^{-1}\nabla\varphi,\ \varphi=0\ (\text{на}\,\Gamma)\}.$$

Наряду с введенными пространствами рассмотрим также гильбертово пространство $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ скалярных функций со скалярным произведением:

$$(\varphi,\psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega)}:=g^2\int_\Omega[\rho_0(x_3)N^2(x_3)]^{-1}\varphi(x)\cdot\overline{\psi(x)}\,d\Omega$$

и гильбертово пространство $L_2(\Gamma)$ со скалярным произведением

$$(\xi,\eta)_0=\int_\Gamma \xi(\hat{x})\cdot\overline{\eta(\hat{x})}\,d\Gamma,\quad \hat{x}\in\Gamma.$$

Из условия того, что $\int_\Gamma \zeta\,d\Gamma=0$ (см. (1.3)), получаем, что функция $\zeta(t,\hat{x})$ при каждом t должна принадлежать гильбертовому пространству $H_0:=L_2(\Gamma)\ominus\{1_\Gamma\}$ функций из $L_2(\Gamma)$, которые ортогональны к функции 1_Γ, тождественно равной единице.

Введем в пространстве $H_0=L_{2,\Gamma}:=L_2\,(\Gamma)\ominus\{1_\Gamma\}$ его оснащение в виде

$$H_+\subset H_0\subset H_-,\quad H_+=H^{1/2}\,(\Gamma)\cap H_0=:H_\Gamma^{1/2},\quad H_-=(H_+)^*=:\widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}.$$

Здесь через $\widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ обозначено пространство, сопряженное с $H_\Gamma^{1/2}$ с центральным пространством $L_{2,\Gamma}$. В частности, $\widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ состоит из тех элементов из $H^{-1/2}(\Gamma)$, которые продолжимы нулем в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ (см., например, [28]).

Проектируя уравнения исходной начально-краевой задачи на введенные функциональные пространства, перейдем к задаче Коши для системы дифференциально операторных уравнений, которые могут быть переписаны в виде (см. подробнее [27]):

$$\mathcal{M}\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}y = \mathcal{F}, \quad y(0) = y^0, \tag{1.7}$$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} I + \rho_m G\gamma_n & 0 & 0 \\ 0 & I_{H_0} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mu A & \sigma^{1/2}GB^{1/2} & C \\ -\sigma^{1/2}B^{1/2}\gamma_n & 0 & 0 \\ -C^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$
$$\mathcal{F} = (\vec{f}_{0,S}; 0; 0)^\tau, \quad y = (\vec{u}, \eta, \rho)^\tau.$$

Здесь $\vec{u} = \vec{u}(t)$, $\eta = \eta(t) = \sigma^{1/2}B^{1/2}\zeta(t)$, $\rho = \rho(t)$ — неизвестные функции со значениями в $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$, $H_0 = L_2(\Gamma)\ominus\{1_\Gamma\}$ и $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ соответственно, а индекс $(\ldots)^\tau$ означает операцию транспонирования матрицы.

Для понимания дальнейших рассуждений отметим ряд фактов, доказанных в работе [27], относительно свойств операторов, входящих в (1.7) и (1.8).

1. Оператор $B := P_{H_0}B_\sigma P_{H_0}$ (P_{H_0} — ортопроектор на H_0, $B_\sigma\zeta = -\Delta_2\zeta + \sigma^{-1}g\rho_0(0)\zeta$, $\mathcal{D}(B) = \{\zeta \in H^2(\Gamma) \,|\, \zeta = 0 \ (\partial\Gamma)\} \cap H_0$) — положительно определенный неограниченный в H_0 оператор с компактным положительным обратным оператором B^{-1}.

2. Операторы C и C^*, связанные с наличием стратификации, взаимно сопряжены и $\|C\| = \|C^*\| \leqslant N_0$, где N_0 определена в (1.1).

3. Оператор A^{-1} есть компактный и положительный, кроме того

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega, \rho_0) \subset \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0).$$

Отметим, что подпространство $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ связано с кинетической энергией жидкости в открытом сосуде, плотным множеством в нем является подпространство

$$\vec{J}^1_{0,S}(\Omega, \rho_0) := \{\vec{u} \mid \operatorname{div}\vec{u} = 0, \ (\text{в}\,\Omega), \ \vec{u} = \vec{0} \ (\text{на}\,S)\}$$

функций с конечной скоростью диссипации энергии (см. подробнее, например, [8, с. 132]).

4. Оператор γ_n — оператор следа и G — оператор вспомогательной задачи (задача Зарембы) взаимно сопряженные, где $\gamma_n\colon \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) \to \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$, $G\colon H_\Gamma^{1/2} \to \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$.

5. Оператор $\mathcal{M} = \operatorname{diag}(I + \rho_m G\gamma_n; I; I)$ из (1.8) является положительно определенным неограниченным оператором, действующим в $\mathcal{H} = \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) \oplus H_0 \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega)$, при этом

$$\mathcal{D}(\mathcal{M}) = \{(\vec{u}; \eta; \rho)^t \in \mathcal{H}\colon \vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega, \rho_0), \ \eta \in H_0, \ \rho \in \mathfrak{L}_2(\Omega)\}.$$

6. Оператор $\mathcal{A}$ из (1.8) с областью определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{y = (\vec{u}; \eta; \rho)^t \in \mathcal{H}\colon \vec{u} \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B^{1/2}\gamma_n), \ B^{1/2}\eta \in H_\Gamma^{1/2}, \ \rho \in \mathfrak{L}_2(\Omega)\}$$

является аккретивным оператором.

Произведем в уравнении (1.7) замену $y(t) = e^t z(t)$. В результате получим уравнение относительно z:

$$\mathcal{M}\frac{dz}{dt} + (\mathcal{A} + \varepsilon\mathcal{I})z + (\mathcal{M} - \varepsilon\mathcal{I})z = e^{-t}\mathcal{F}, \quad \mathcal{I} := \operatorname{diag}(0; I_{H_0}; I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)}), \tag{1.9}$$

где число $\varepsilon > 0$ выбрано таким образом, что $\mathcal{M} - \varepsilon\mathcal{I} \gg 0$. Это возможно, так как $\mathcal{M} \gg 0$ в $\mathcal{H}$. С операторным уравнением (1.9) ассоциируется уравнение с максимально аккретивным оператором $\mathcal{A}_\varepsilon = \overline{(\mathcal{A} + \varepsilon\mathcal{I})}$:

$$\mathcal{M}\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}_\varepsilon z + (\mathcal{M} - \varepsilon\mathcal{I})z = e^{-t}\mathcal{F}, \tag{1.10}$$

где

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon) = \{\, (\vec{u}, \eta, \rho)^t |\ \vec{u} + A^{-1/4}Q_1^*\eta \in \mathcal{D}(A),\ \vec{u} \in \mathcal{D}(B^{1/2}\gamma_n),\ \eta \in \mathcal{D}(B^{1/2}) \cap H^{3/2}(\Gamma)\,\},$$
$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -Q_1A^{-1/4} & I_{H_0} & 0 \\ -Q_2A^{-1/4} & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & Y_1 & Q_1A^{1/2}Q_2^* \\ 0 & Q_2A^{1/2}Q_1^* & Y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & A^{-1/4}Q_1^* & A^{-1/4}Q_2^* \\ 0 & I_{H_0} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} \end{pmatrix},$$

$Q_2 := C^*A^{-3/4}$, $Q_2^* = A^{-3/4}C$, $Y_1 := \varepsilon I_{H_0} + Q_1A^{1/2}Q_1^*$, $Y_2 := \varepsilon I_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} + Q_2A^{1/2}Q_2^*$.

Применение метода операторных блок-матриц, а также общей теории абстрактных дифференциально-операторных уравнений позволило доказать (см. [27]) теорему о сильной разрешимости полученной задачи Коши. Затем путем выбора начальных условий из области определения незамкнутого оператора $\mathcal{A}$ удается показать, что соответствующее решение также лежит в области определения оператора $\mathcal{A}$.

§ 2. Модельная задача

Рассмотрим решения однородной задачи (1.2)–(1.6), зависящие от t по закону $\exp(-\lambda t)$:

$$\begin{gathered} \vec{u}(t,x) = \vec{u}(x)\exp(-\lambda t), \quad p(t,x) = p(x)\exp(-\lambda t), \\ \rho(t,x) = \rho(x)\exp(-\lambda t), \quad \zeta(t,\hat{x}) = \zeta(\hat{x})\exp(-\lambda t), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где λ — комплексная частота колебаний, а $\vec{u}(x)$, $p(x)$, $\rho(x)$ и $\zeta(\hat{x})$ — искомые амплитудные функции. Подставляем (2.1) в (1.2)–(1.6), приходим к задаче на собственные значения

$$\begin{gathered} \lambda\rho_0\vec{u} = \nabla p + g\rho\vec{e}_3 - \mu\Delta\vec{u},\ (\text{в}\,\Omega), \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0\ (\text{в}\,\Omega), \quad \vec{u} = \vec{0}\ (\text{на}\,S), \\ -\lambda\rho + \nabla\rho_0 \cdot \vec{u} = 0\ (\text{в}\,\Omega), \quad \zeta = 0\ (\text{на}\,\partial\Gamma), \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i}\right) = 0\ (i = 1, 2;\ \text{на}\,\Gamma), \quad -\lambda\zeta = \vec{u}\cdot\vec{n}\ (\text{на}\,\Gamma),$$
$$\rho_m\lambda^2\zeta = \sigma\Delta_2\zeta - \rho_0 g\zeta + p - 2\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\ (\text{на}\,\Gamma), \quad \int_\Gamma \zeta\, d\zeta = 0. \tag{2.3}$$

Для уточнения характера спектра в исследуемой проблеме рассмотрим двумерный частный случай, когда $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ является прямоугольной, то есть

$$\Omega = \ \{(x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x_1 < \pi,\ 0 < x_2 < 1\}.$$

Более того, будем считать, что жидкость однородна. В этом случае спектральная задача (2.2)–(2.3) формулируется следующим образом (ν — кинематическая вязкость)

$$\begin{gathered} \lambda u = -\nu\Delta u\ (\text{в}\,\Omega), \qquad u(0,x_2) = u(\pi,x_2) = u(x_1,0) = 0, \\ \nu\lambda\frac{\partial u}{\partial x_2} + \sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - gu - \rho_m\lambda^2 u = 0 \quad (\,x_2 = 1\,). \end{gathered} \tag{2.4}$$

Данная задача получается из (2.2)–(2.3), если поле $\vec{u}(x)$ заменить на скалярную функцию $u(x)$, давление принять равным нулю, убрать условие соленоидальности, убрать условие касательных напряжений, величину $2\partial u_3/\partial x_3$ заменить на $\partial u/\partial x_2$ и, наконец, исключить $\zeta(\hat{x})$ путем замены $-\lambda\zeta = u$ (при $x_2 = 1$). Отметим, что такой способ построения модельной задачи был предложен С. Г. Крейном в работе [29] для вязкой однородной жидкости.

Лемма 1. *При $\lambda = 0$ задача имеет лишь тривиальное решение: $u \equiv 0$. Все собственные значения λ задачи (2.4) расположены в правой полуплоскости:* $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Доказательство. Первая часть леммы очевидна. Из первого уравнения и граничных условий (2.4) с помощью формулы Грина для оператора Лапласа получаем

$$\lambda \int_\Omega |u|^2\, d\Omega = -\nu \int_\Omega \Delta u\, u\, d\Omega = \nu \int_\Omega |\nabla_2 u|^2 d\Omega - \nu \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_2}\, u\, d\Gamma =$$
$$= \nu \int_\Omega |\nabla_2 u|^2 d\Omega - \frac{1}{\lambda} \int_\Gamma \left(gu - \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \rho_m \lambda^2 u \right) u\, d\Gamma =$$
$$= \nu \int_\Omega |\nabla_2 u|^2 d\Omega - \frac{1}{\lambda} \left(g \int_\Gamma |u|^2\, d\Gamma + \sigma \int_\Gamma \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 d\Gamma \right) - \lambda \rho_m \int_\Gamma |u|^2\, d\Gamma.$$

Иначе,

$$\lambda \left(\int_\Omega |u|^2\, d\Omega + \rho_m \int_\Gamma |u|^2\, d\Gamma \right) - \nu \int_\Omega |\nabla_2 u|^2 d\Omega - \frac{\overline{\lambda}}{|\lambda|^2} \left(g \int_\Gamma |u|^2\, d\Gamma + \sigma \int_\Gamma \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 d\Gamma \right),$$

а значит

$$\operatorname{Re}\lambda = \frac{\nu \displaystyle\int_\Omega |\nabla_2 u|^2 d\Omega}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2 d\Omega + \rho_m \int_\Omega |u|^2 d\Omega + \int_\Gamma \left(g\rho_0 |u|^2 + \sigma \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 \right) d\Gamma} > 0.$$

□

Решение задачи (2.4) представим в виде ряда Фурье по $\{\sin kx_1\}_{k=1}^\infty$ и рассмотрим лишь одну гармонику:

$$u(x_1, x_2) = u_k(x_2)\, \sin kx_1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда от (2.4) приходим к задаче

$$u_k''(x_2) + c u_k(x_2) = 0, \quad c := \nu^{-1}\lambda - k^2, \tag{2.5}$$
$$u_k(0) = 0, \quad \nu\lambda u_k'(1) + \left(-g - k^2\sigma - \rho_m\lambda^2\right) u_k(1) = 0.$$

Разыскивая решения задачи (2.5) в виде $\exp(\beta x_2)$, получаем следующее характеристическое уравнение $\beta^2 + c = 0$. Случаи $c = 0$ и $c < 0$ при естественных физических параметрах приводят к тривиальным решениям. Таким образом, нетривиальное решение задачи (2.5) (при $c > 0$) имеет вид

$$u_k(x_2) = \sin \sqrt{c}\, x_2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Функция (2.6) удовлетворяет уравнениям и первому граничному условию, подставляя ее во второе граничное условие, получаем уравнение

$$\nu\lambda \cos\sqrt{c} \cdot \sqrt{c} = \left(g + k^2\sigma + \rho_m\lambda^2\right) \sin\sqrt{c}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Заметим, что для нетривиальных решений (2.6) задачи (2.5) $\sqrt{c} \neq 0$, а также $\cos\sqrt{c} \neq 0$. Действительно, если $\cos\sqrt{c} = 0$, то $\sin\sqrt{c} = \pm 1$, тогда из (2.7) приходим к противоречию с утверждением леммы 1.

С учетом сказанного, перепишем уравнение (2.7) в виде

$$P_k(\lambda) = Q_k(\lambda), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.8}$$

$$Q_k(\lambda) = \frac{\nu\lambda}{g + k^2\sigma + \rho_m\lambda^2}, \quad P_k(\lambda) = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{c}}{\sqrt{c}} = 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_m^2 - c} = 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_m^2 + k^2 - \nu^{-1}\lambda}.$$

Здесь учитываем разложение функции $\operatorname{tg} z/z$ на простейшие дроби:

$$\frac{\operatorname{tg} z}{z} = 2\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_m^2 - z^2}, \quad \alpha_m = (m - 1/2)\pi, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Сравнивая качественное поведение графиков функций $P_k(\lambda)$ и $Q_k(\lambda)$, приходим к следующим выводам.

1. Уравнение (2.8) имеет при любом $k \in \mathbb{N}$ последовательность корней $\{\lambda_{km}\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_{km} \to +\infty$ при $m \to \infty$, каждый корень λ_{km} расположен на промежутке $(\widehat{\lambda}_{km}; \lambda_{km}^0)$, где $\widehat{\lambda}_{km} := \nu(\pi^2 m^2 + k^2)$ — нули функции $P_k(\lambda)$, т. е. те значения в которых $\sin\sqrt{\lambda/\nu - k^2} = 0$, а $\lambda_{km}^0 = \nu(\pi^2(m+1/2)^2 + k^2)$, т. е. точки в которых $P_k(\lambda)$ имеет вертикальные асимптоты, При $m \to \infty$ справедлива асимптотическая формула $\lambda_{km} = \lambda_{km}^0[1 + o(1)]$.

2. На промежутке $(0; \lambda_{k0}^0)$, $\lambda_{k0}^0 = \nu(\pi^2/4 + k^2)$ уравнение (2.8) может иметь либо не иметь пару вещественных положительных собственных значений (графики $P_k(\lambda)$ и $Q_k(\lambda)$ пересекаются или не пересекаются). Таким образом, кроме множества $\{\lambda_{km}\}_{m=1}^{\infty}$ существуют еще две ветки собственных значений $\{\lambda_{k0}^{\pm}\}_{k=1}^{\infty}$. Асимптотическое поведение при $k \to \infty$ упомянутой пары определяется из квадратного уравнения

$$\rho_m\lambda^2 - \nu k\lambda + (g + k^2\sigma) = 0.$$

Таким образом, в зависимости от соотношений между физическими параметрами данной задачи указанные ветки имеют различных характер асимптотического поведения. А именно: 1) если вязкость жидкости велика ($\nu^2 > 4\rho_m\sigma$), то собственные значения $\lambda_{k0}^{\pm}$ при больших k расположены на $\mathbb{R}_+$ и имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_{k0}^{\pm} = \frac{\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 4\rho_m\sigma}}{\rho_m}\, k\,[1 + o(1)];$$

2) если вязкость жидкости достаточно мала ($\nu^2 < 4\rho_m\sigma$), то собственные значения $\lambda_{k0}^{\pm}$ при больших k являются невещественными, расположены в правой комплексной полуплоскости, имеют предельную точку $\lambda = \infty$ и асимптотически примыкают к двум прямым

$$\operatorname{Im}\lambda = \pm\frac{\sqrt{4\rho_m\sigma - \nu^2}}{\nu}\operatorname{Re}\lambda.$$

§ 3. Задача о нормальных колебаниях в произвольном сосуде

Переход к квадратичному операторному пучку. Рассмотрим нормальные колебания данной гидросистемы, то есть такие решения системы (1.10) при $\mathcal{F} \equiv \vec{0}$, для которых

$$z(t) = \exp(-\lambda t)z = \exp(-\lambda t)(\vec{u}; \eta; \rho)^t.$$

Это приведет нас к следующей спектральной задаче (с учетом констант μ и σ):

$$\begin{gathered}(1-\lambda)(I+\rho_m G\gamma_n)\vec{u}+A(\mu\vec{u}+\sigma^{1/2}A^{-1/4}Q_1^*\eta)+C\rho=0,\\ (1-\lambda)\eta=\sigma^{1/2}\,B^{1/2}\gamma_n\vec{u},\quad (1-\lambda)\rho=C^*\vec{u}.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Лемма 2. $\lambda=1$ *является бесконечнократным собственным значением, которому соответствует множество относительных состояний покоя стратифицированной жидкости:*

$$\vec{u}=\vec{0},\quad \eta=0,\quad \rho=\rho(x_3)\in L_2(x_{\min},x_{\max}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lambda=1$, тогда из (3.1) получим:

$$A(\mu\vec{u}+\sigma^{1/2}A^{-1/4}Q_1^*\eta)+C\rho=0,\qquad \sigma^{1/2}\,B^{1/2}\gamma_n\vec{u}=0,\qquad C^*\vec{u}=0.$$

Используя данные соотношения, преобразуем следующее выражение:

$$\begin{aligned}0&=\big(A(\mu\vec{u}+\sigma^{1/2}A^{-1/4}Q_1^*\eta),\vec{u}\big)+(C\rho,\vec{u})=\big(\mu A^{1/2}\vec{u}+\sigma^{1/2}A^{1/2}A^{-1/4}Q_1^*\eta,A^{1/2}\vec{u}\big)+\\ &+(\rho,C^*\vec{u})=\mu\|A^{1/2}\vec{u}\|^2+\sigma^{1/2}(\eta,Q_1A^{3/4}\vec{u})=\mu\|A^{1/2}\vec{u}\|^2+\sigma^{1/2}(\eta,B^{1/2}\gamma\vec{u})=\mu\|A^{1/2}\vec{u}\|^2.\end{aligned}$$

Таким образом, поле скорости в вязкой жидкости равно нулю $\vec{u}=\vec{0}$. Дальнейшее доказательство заключается в том, чтобы показать, что $\eta=0$ и $C\rho=P_{0,S}(\rho_0^{-1}g\rho\vec{e}_3)=0$, то есть $\rho_0^{-1}g\rho\vec{e}_3$ имеет составляющую лишь в пространстве $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)$. Докажем сначала принадлежность $\rho_0^{-1}g\rho\vec{e}_3$ подпространству $\vec{G}(\Omega,\rho_0)=\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)$. С этой целью умножим скалярно

$$\sigma^{1/2}A^{3/4}Q_1^*\eta+C\rho=0$$

на произвольную функцию $\vec{w}\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$:

$$(\sigma^{1/2}A^{3/4}Q_1^*\eta,\vec{w})+(C\rho,\vec{w})=(\eta,\sigma^{1/2}B^{1/2}\gamma\vec{w})+(C\rho,\vec{w})=(C\rho,\vec{w})=0.$$

Отсюда следует, что $C\rho\in\vec{G}(\Omega,\rho_0)$, то есть $\rho_0^{-1}g\rho\vec{e}_3=\rho_0^{-1}\nabla\varphi\in\vec{G}(\Omega,\rho_0)$. Тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=0,\quad g\rho=\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}.$$

Значит, $\varphi=\varphi(x_3)$ и $\varphi=g\int_0^{x_3}\rho(\tau)\,d\tau+\varphi(0)$.

Докажем теперь, что $\rho_0^{-1}g\sigma\vec{e}_3\in\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)$. Для произвольной функции $\rho_0^{-1}\nabla p\in\in\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)$ имеем:

$$\begin{aligned}(\rho_0^{-1}\nabla p,\rho_0^{-1}\nabla\varphi)&=\int_\Omega\rho_0\cdot\rho_0^{-1}\nabla p\cdot\rho_0^{-1}\nabla\varphi\,d\Omega=\int_{\partial\Omega}\rho_0^{-1}\frac{\partial p}{\partial n}\,\varphi\,dS-\int_\Omega\nabla\cdot(\rho_0^{-1}\nabla p)\,\varphi\,d\Omega=\\ &=\int_\Gamma\rho_0^{-1}\frac{\partial p}{\partial n}\varphi(0)\,d\Gamma=\varphi(0)\int_\Gamma\rho_0^{-1}\frac{\partial p}{\partial n}\,d\Gamma=0.\end{aligned}$$

Таким образом, $\rho_0^{-1}g\rho\vec{e}_3\in\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)$, то есть $C\rho:=P_{0,S}(\rho_0^{-1}g\rho\vec{e}_3)=0$. С учетом этого свойства установим, что $\eta=0$. Для произвольной $\vec{\psi}\in\vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0)$ получаем

$$(\sigma^{1/2}A^{3/4}Q_1^*\eta,\vec{\psi})=(\eta,\sigma^{1/2}Q_1A^{-3/4}\vec{\psi})=(\eta,B^{1/2}\gamma_n\vec{\psi})=0,$$

так как $B^{1/2}\gamma_n\vec{\psi}\in H_\Gamma^{1/2}$ которое плотно в H_0, то из последнего равенства имеем $\eta=0$. □

Рассмотрим случай $\lambda \neq 1$, тогда исключая элементы η и ρ, приходим к спектральной задаче с неограниченными операторными коэффициентами:

$$(1-\lambda)(I+\rho_m G\gamma_n)\vec{u} + A\left(\mu\vec{u} + (1-\lambda)^{-1}\sigma\, A^{-1/4}Q_1^* B^{1/2}\gamma_n\vec{u}\right) + (1-\lambda)^{-1}CC^*\vec{u} = 0. \quad (3.2)$$

Осуществим замену $A^{1/2}\vec{u} = \vec{v}$, а затем применим к обеим частям (3.2) (ограниченный) оператор $A^{-1/2}$. В результате получаем задачу вида

$$\left((1-\lambda)^2 A_0 + (1-\lambda)\mu I + \sigma\, V_1^* B V_1 + V_2^* V_2\right)\vec{v} = 0, \quad (3.3)$$
$$A_0 := A^{-1} + \rho_m V_1^* V_1, \quad V_1 := \gamma_n A^{-1/2}, \quad V_1^* := A^{-1/2}G, \quad V_2 := C^* A^{-1/2}, \quad V_2^* := A^{-1/2}C.$$

Лемма 3. *Оператор $A_0 = A^{-1} + \rho_m V_1^* V_1$ действующий в $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$, является компактным положительным оператором, имеющим асимптотику*

$$\lambda_n(A_0) = \rho_m \lambda_n(V_1^* V_1)[1+o(1)] = \rho_m \left(\frac{\mathrm{mes}\,\Gamma}{16\pi}\right)^{1/2} n^{-1/2}\,[1+o(1)] \quad (n \to \infty). \quad (3.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко заметить, что оператор $V_1^* V_1$ — неотрицателен. Кроме того, как доказано (см., например, [8, с. 74]), оператор $V_1 = \gamma_n A^{-1/2}\colon \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) \to L_{2,\Gamma}$ компактен, а потому компактен и $V_1^* V_1$. Далее, имеет место асимптотическая формула (см. [8, с. 75])

$$\lambda_n(V_1^* V_1) = \left(\frac{\mathrm{mes}\,\Gamma}{16\pi}\right)^{1/2} n^{-1/2}\,[1+o(1)] \quad (n \to \infty). \quad (3.5)$$

Оператор A^{-1} является компактным положительным оператором, действующим в $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ с асимптотическим поведением собственных значений (см., например, [8, с. 10]):

$$\lambda_n(A^{-1}) = \left(\frac{\mathrm{mes}\,\Omega}{3\pi^2}\right)^{2/3} n^{-2/3}\,[1+o(1)] \quad (n \to +\infty). \quad (3.6)$$

Далее, так как операторы $V_1^* V_1$ и A^{-1} — вполне непрерывные самосопряженные неотрицательные операторы, то для ненулевых s-чисел справедливо:

$$s_n(V_1^* V_1) = \lambda_n(V_1^* V_1) \quad \text{и} \quad s_n(A^{-1}) = \lambda_n(A^{-1}). \quad (3.7)$$

С учетом (3.5), (3.6) и (3.7) имеем:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac12}\, s_n(V_1^* V_1) = \lim_{n\to\infty} n^{\frac12}\, \lambda_n(V_1^* V_1) = \left(\frac{\mathrm{mes}\,\Gamma}{16\pi}\right)^{1/2},$$
$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac12}\, s_n(A^{-1}) = \lim_{n\to\infty} n^{\frac12}\, \lambda_n(A^{-1}) = 0.$$

Таким образом (см., например, [30, с. 52]),

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac12}\, \lambda_n(V_1^* V_1 + A^{-1}) = \left(\frac{\mathrm{mes}\,\Gamma}{16\pi}\right)^{1/2},$$

отсюда следует (3.4). □

Лемма 4. *Оператор* $B_{V_1} := V_1^* B V_1$ *— неограниченный неотрицательный оператор, действующий в* $\vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0)$. *Его ядро*

$$Ker\, B_{V_1} = \{\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0)\colon \gamma_n A^{-1/2}\vec{v} = 0\} =: \vec{N}_0(\Omega,\rho_0)$$

бесконечномерно, кроме того ортогональное дополнение $\vec{M}_0(\Omega,\rho_0) := \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0) \ominus \vec{N}_0(\Omega,\rho_0)$ *также бесконечномерно. Оператор* B_{V_1} *на* $\vec{M}_0(\Omega,\rho_0)$ *положительно определен, а обратный к нему оператор* $B_{V_1}^{-1}$ *положителен и компактен, при этом*

$$\lambda_n(B_{V_1}^{-1}) = \left(\frac{mes\,\Gamma}{\pi}\right)^{1/2} n^{-1/2}[1+o(1)] \quad (n\to\infty).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Схема доказательства леммы аналогична рассуждениям на стр. 194–196 монографии [8]. □

Лемма 5. *Оператор* $V_2^*V_2 = A^{-1/2}CC^*A^{-1/2}$ *— компактный оператор, действующий в* $\vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы непосредственно следует из свойств операторов $A^{-1/2}$, C и C^*. □

Переход к линейному операторному пучку. Для удобства дальнейших рассуждений заменим спектральный параметр $\lambda - 1$ через $\widehat{\lambda}$ и тут же переобозначим $\widehat{\lambda} =: \lambda$. С учетом сказанного, перепишем задачу (3.3) в виде

$$\left(\lambda^2 A_0 - \lambda\mu I + \sigma\, B_{V_1} + V_2^*V_2\right)\vec{v} = 0. \tag{3.8}$$

Лемма 6. *Ненулевые собственные значения задачи* (3.8) *лежат в правой полуплоскости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для решений задачи (3.8) имеем

$$\lambda^2\|A_0^{1/2}\vec{v}\|^2 - \lambda\mu\|\vec{v}\|^2 + \|\widetilde{B}_V^{1/2}\vec{v}\|^2 = 0, \quad B_V := \sigma B_{V_1} + V_2^*V_2,$$

таким образом,

$$\mathrm{Re}\,\lambda = \frac{\mu\|\vec{v}\|^2}{\|A_0^{1/2}\vec{v}\|^2 + |\lambda|^{-2}\|B_V^{1/2}\vec{v}\|^2} > 0. \tag{3.9}$$

□

Перейдем от операторного пучка (3.8) к линейному операторному пучку с ограниченными операторными коэффициентами. Для этого (3.8) перепишем в виде

$$\vec{v} = \lambda\mu^{-1}A_0\vec{v} + \sigma\lambda^{-1}\mu^{-1}B_{V_1}\vec{v} + \lambda^{-1}\mu^{-1}V_2^*V_2\vec{v}. \tag{3.10}$$

Лемма 7. *Задача* (3.10) *равносильна задаче*

$$x = \lambda\mathcal{A}x, \qquad x = (\vec{\zeta},\vec{\eta})^t \in \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0) \oplus \vec{M}_0(\Omega,\rho_0), \tag{3.11}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mu^{-1}A_0 & \mu^{-1}A_0P_0 \\ -\mu^{-1}P_0A_0 & \mu\,K^{-1} - \mu^{-1}P_0A_0P_0 \end{pmatrix}, \quad K^{-1} := (\sigma B_{V_1} + V_2^*V_2)^{-1}. \tag{3.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Осуществим в (3.10) следующие замены

$$\vec{\zeta} = \lambda\mu^{-1}A_0\vec{v}, \quad \vec{\eta} = \sigma(\lambda\,\mu)^{-1}B_{V_1}\vec{v} + (\lambda\,\mu)^{-1}V_2^*V_2\vec{v},$$

при этом $\vec{\zeta} + \vec{\eta} = \vec{v}$. Таким образом, приходим к системе уравнений

$$\vec{\zeta} = \lambda\mu^{-1}A_0\,(\vec{\zeta} + \vec{\eta}), \quad \vec{\eta} = \sigma(\lambda\,\mu)^{-1}B_{V_1}\,(\vec{\zeta} + \vec{\eta}) + (\lambda\,\mu)^{-1}V_2^*V_2\,(\vec{\zeta} + \vec{\eta}), \tag{3.13}$$

где $\vec{\zeta} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$, $\vec{\eta} \in \vec{M}_0(\Omega, \rho_0) \subset \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$. Отметим, что для оператора B_{V_1} выполнены соотношения $B_{V_1} = P_0B_{V_1} = B_{V_1}P_0 = P_0B_{V_1}P_0$, где P_0 — ортопроектор на $\vec{M}_0(\Omega, \rho_0)$. Далее, согласно лемме 4, оператор $B_{V_1}^{-1}$ является компактным и положительным оператором в подпространстве $\vec{M}_0(\Omega, \rho_0)$. Кроме того, оператор $V_2^*V_2$ является ограниченным и неотрицательным (см. лемму 5). Следовательно, оператор $K^{-1} := (\sigma B_{V_1} + V_2^*V_2)^{-1}$ является компактным. С учетом сказанного, из второго уравнения (3.13) имеем

$$\lambda\mu\,K^{-1}\,\vec{\eta} = P_0\vec{\zeta} + \vec{\eta}. \tag{3.14}$$

Учитывая соотношение $P_0\vec{\eta} = \vec{\eta}$, из (3.13) и (3.14) получаем систему

$$\vec{\zeta} = \lambda\left(\mu^{-1}A_0\vec{\zeta} + \mu^{-1}A_0P_0\vec{\eta}\right), \qquad \vec{\eta} = \lambda\left(-\mu^{-1}P_0A_0\vec{\zeta} + \mu\,K^{-1}\vec{\eta} - \mu^{-1}P_0A_0P_0\vec{\eta}\right). \qquad \square$$

Лемма 8. *Спектр задачи* (3.11) *дискретен, расположен в правой комплексной полуплоскости симметрично относительно вещественной оси и имеет единственную предельную точку* $\lambda = \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\lambda = 0$ (см. обозначения перед (3.8) и лемму 2) не является собственным значением задачи (3.11), то после замены $\lambda = \nu^{-1}$ получаем задачу на собственные значения для оператора $\mathcal{A}$ из (3.12). Все элементы матричного оператора $\mathcal{A}$ являются компактными операторами, а потому спектр задачи $\mathcal{A}x = \nu x$ дискретный. Его ненулевые собственные значения конечнократны, а соответствующие корневые подпространства конечномерны. Кроме того, оператор $\mathcal{A}$ имеет точку $\nu = 0$ в качестве предельного спектра и эта точка не является собственным значением для $\mathcal{A}$. Действительно, если $\mathcal{A}x = 0$, то из представления (3.12) имеем

$$\mu^{-1}A_0\vec{\zeta} + \mu^{-1}A_0P_0\vec{\eta} = \mu^{-1}A_0(\,\vec{\zeta} + P_0\vec{\eta}\,) = \vec{0},$$
$$-\mu^{-1}P_0A_0\vec{\zeta} + \mu\,K^{-1} - \mu^{-1}P_0A_0P_0\eta = -\mu^{-1}P_0A_0(\,\vec{\zeta} + P_0\eta\,) + \mu\,K^{-1}\vec{\eta} = \vec{0}.$$

Подставляя первое уравнение во второе, имеем $K^{-1}\vec{\eta} = \vec{0}$, и так как $K^{-1} > 0$, то $\vec{\eta} = \vec{0}$. Тогда из первого уравнения получаем $A_0\vec{\zeta} = \vec{0}$ и потому $\vec{\zeta} = \vec{0}$, так как $A_0 > 0$.

Таким образом, существует ветвь $\{\nu_k(\mathcal{A})\}_{k=1}^{\infty}$ ненулевых собственных значений оператора $\mathcal{A}$, образующая дискретный спектр с предельной точкой в нуле. Поэтому задача (3.11) имеет дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(\lambda_k = \nu_k^{-1}(\mathcal{A}))$ с предельной точкой $\lambda = \infty$.

Согласно свойству (3.9) все собственные значения λ_k расположены в правой комплексной полуплоскости. При этом, учитывая свойство самосопряженности операторного пучка

$$I - \lambda\mu^{-1}A_0 - (\lambda\mu)^{-1}(\sigma B_{V_1} + V_2^*V_2)$$

задачи (3.10), получаем, что спектр задачи (3.11) симметричен относительно вещественной оси. $\square$

О локализации спектра. Проведем ряд преобразований в задаче (3.11).

Лемма 9. *Оператор, обратный к оператору $\mathcal{A}$ из* (3.12)*, имеет вид*

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mu A_0^{-1} - \mu^{-1} K & -\mu^{-1} K \\ \mu^{-1} K & \mu^{-1} K \end{pmatrix}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим уравнение $Ay = y_0$, которое равносильно следующей системе уравнений

$$\mu^{-1} A_0 \vec{\zeta} + \mu^{-1} A_0 P_0 \vec{\eta} = \vec{\zeta}_0, \quad -\mu^{-1} P_0 A_0 \vec{\zeta} + (\mu\, K^{-1} - \mu^{-1} P_0 A_0 P_0)\, \vec{\eta} = \vec{\eta}_0.$$

Из второго уравнения имеем $\mu\, K^{-1} \vec{\eta} = \vec{\eta}_0 + P_0\, (\mu^{-1} A_0 \vec{\zeta} + \mu^{-1} A_0 P_0 \eta) = \vec{\eta}_0 + P_0 \vec{\zeta}_0$. Таким образом, $\vec{\eta} = \mu^{-1} K\, (\vec{\eta}_0 + P_0 \vec{\zeta}_0)$. С учетом сказанного, из первого уравнения получаем

$$A_0 \vec{\zeta} = \mu \vec{\zeta}_0 - A_0 P_0 \vec{\eta} = \mu \vec{\zeta}_0 - \mu^{-1} A_0 P_0 K\, (\vec{\eta}_0 + P_0 \vec{\zeta}_0).$$

Применяя к последнему уравнению оператор A_0^{-1}, окончательно имеем

$$\begin{pmatrix} \vec{\zeta} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu A_0^{-1} - \mu^{-1} K & -\mu^{-1} K \\ \mu^{-1} K & \mu^{-1} K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\zeta}_0 \\ \vec{\eta}_0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Перепишем задачу (3.11) в виде $\mathcal{A}^{-1} x = \lambda x$, которое в матричной форме примет вид

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \mu A_0^{-1} - \mu^{-1} K & -\mu^{-1} K \\ \mu^{-1} K & \mu^{-1} K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\zeta} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mu^{1/2} A_0^{-1/2} - \mu^{-3/2} K A_0^{1/2} & -\mu^{-1/2} K^{1/2} \\ \mu^{-3/2} K A_0^{1/2} & \mu^{-1/2} K^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^{1/2} A_0^{-1/2} & 0 \\ 0 & \mu^{-1/2} K^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\zeta} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \\ &= \left[\begin{pmatrix} \mu^{1/2} A_0^{-1/2} & 0 \\ 0 & \mu^{-1/2} K^{1/2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu^{-3/2} K A_0^{1/2} & \mu^{-1/2} K^{1/2} \\ -\mu^{-3/2} K A_0^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \\ &\qquad \cdot \begin{pmatrix} \mu^{1/2} A_0^{-1/2} & 0 \\ 0 & \mu^{-1/2} K^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\zeta} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \vec{\zeta} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Осуществим замену

$$\begin{pmatrix} \mu^{1/2} A_0^{-1/2} & 0 \\ 0 & \mu^{-1/2} K^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\zeta} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{m} \\ \vec{q} \end{pmatrix}.$$

Применим к последнему уравнению (слева) оператор-матрицу

$$\mathrm{diag}(\mu^{-1/2} A_0^{1/2}; \mu^{1/2} K^{-1/2}),$$

в результате приходим к задаче

$$(\mathcal{I} - \mathcal{M}) z = \lambda \mathcal{D} z, \quad z = (\vec{m}, \vec{q})^t \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{M}_0(\Omega, \rho_0), \tag{3.15}$$

где $\mathcal{D} := \mathrm{diag}(\mu^{-1} A_0; \mu \sigma^{-1} K^{-1})$ является компактным положительным оператором, действующим в $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{M}_0(\Omega, \rho_0)$, $\mathcal{I}$ — единичный оператор в указанной ортогональной сумме пространств,

$$\mathcal{M} := \begin{pmatrix} \varepsilon^2 M^* M & \varepsilon M^* \\ -\varepsilon M & 0 \end{pmatrix}, \quad M := K^{1/2} A_0^{1/2}, \quad M^* := A_0^{1/2} K^{1/2}, \quad \varepsilon^2 = \mu^{-2} > 0.$$

Лемма 10. *Оператор $M = K^{1/2}A_0^{1/2}$, действующий из пространства $\vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0)$ в пространство $\vec{M}_0(\Omega,\rho_0) \subset \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0)$, является ограниченным.*

Доказательство. Рассмотрим на элементах $\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0)$ супремум отношения $\|M\vec{v}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)}/\|\vec{v}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)}$. Далее осуществим замену $A_0^{1/2}\vec{v} = \vec{w}$ и используя представления операторов A_0, $K = \sigma V_1^*BV_1 + V_2^*V_2$ (см. подробнее обозначения после (3.3)), приходим к следующему равенству:

$$\frac{\|M\vec{v}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)}}{\|\vec{v}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)}} = \frac{\sigma\|B^{1/2}\gamma_n A^{-1/2}\vec{w}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} + \|C^*A^{-1/2}\vec{w}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)}}{((A^{-1/2}+\rho_m A^{-1/4}G\gamma_n A^{-1/4})^{-1}A^{1/4}\vec{w}, A^{1/4}\vec{w})_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)}}.$$

Снова осуществляя замену $A^{1/4}\vec{w} = \vec{u}$, получаем

$$\frac{\|M\vec{v}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)}}{\|\vec{v}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)}} = \frac{\sigma\|B^{1/2}\gamma_n A^{-3/4}\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} + \|C^*A^{-3/4}\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)}}{((A^{-1/2}+\rho_m A^{-1/4}G\gamma_n A^{-1/4})^{-1}\vec{u}, \vec{u})_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)}}. \tag{3.16}$$

Отметим, что оператор $B^{1/2}\gamma_n A^{-3/4}\colon \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0) \to H_0$ является ограниченным, как и оператор $C^*A^{-3/4}$ (доказательство см. [27]). Докажем, что оператор

$$A^{-1/2}+\rho_m A^{-1/4}G\gamma_n A^{-1/4}\colon \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0) \to \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0)$$

обратим, и для обратного оператора выполнено неравенство

$$\begin{gathered}((A^{-1/2}+\rho_m A^{-1/4}G\gamma_n A^{-1/4})^{-1}\vec{v}, \vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} \geqslant k^2\|\vec{v}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)}, \\ k^2 := (\|A^{-1/2}\| + \rho_m\|\gamma_n A^{-1/4}\|^2)^{-1} > 0.\end{gathered} \tag{3.17}$$

Так как операторы $A^{-1/4}G$ и $\gamma_n A^{-1/4}$ — взаимно сопряженные и ограниченные, то оператор $A^{-1/4}G\gamma_n A^{-1/4} = (A^{-1/4}G)\cdot(\gamma_n A^{-1/4})$ ограничен и неотрицателен. Оператор $A^{-1/2}$ положителен, а значит и сумма $A^{-1/2}+\rho_m A^{-1/4}G\gamma_n A^{-1/4}$ является ограниченным положительным оператором. Таким образом, данный оператор обратим.

Далее, для любого $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0)$ имеем

$$\begin{aligned}((A^{-1/2}+\rho_m A^{-1/4}G\gamma_n A^{-1/4})\vec{u}, \vec{u})_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} = \|(A^{-1/2}+\rho_m A^{-1/4}G\gamma_n A^{-1/4})^{1/2}\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} = \\ = (A^{-1/2}\vec{u}, \vec{u})_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} + \rho_m\|\gamma_n A^{-1/4}\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} \leqslant (\|A^{-1/2}\| + \rho_m\|\gamma_n A^{-1/4}\|^2)\cdot\|\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)}.\end{aligned}$$

Пусть $(A^{-1/2}+\rho_m A^{-1/4}G\gamma_n A^{-1/4})^{1/2}\vec{u} = \vec{v}$, тогда

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} \leqslant (\|A^{-1/2}\| + \rho_m\|\gamma_n A^{-1/4}\|^2)\cdot\|(A^{-1/2}+\rho_m A^{-1/4}G\gamma_n A^{-1/4})^{-1/2}\vec{v}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} = \\ = (\|A^{-1/2}\| + \rho_m\|\gamma_n A^{-1/4}\|^2)\cdot((A^{-1/2}+\rho_m A^{-1/4}G\gamma_n A^{-1/4})^{-1}\vec{v}, \vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)},\end{aligned}$$

откуда следует (3.17) с указанной константой k^2.

Вернемся к (3.16). Из неравенства (3.17) следует оценка (на множестве гладких элементов $\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0)$)

$$\frac{\|M\vec{v}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)}}{\|\vec{v}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)}} \leqslant \Big(\sigma\|B^{1/2}\gamma_n A^{-3/4}\|^2 + \|C^*A^{-3/4}\|^2\Big)\cdot\Big(\|A^{-1/2}\| + \rho_m\|\gamma_n A^{-1/4}\|^2\Big).$$

Таким образом, оператор M ограничен в $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ и

$$\|M\| \leqslant \left[\left(\sigma\|B^{1/2}\gamma_n A^{-3/4}\|^2 + \|C^* A^{-3/4}\|^2\right) \cdot \left(\|A^{-1/2}\| + \rho_m\|\gamma_n A^{-1/4}\|^2\right)\right]^{1/2}. \tag{3.18}$$

□

С учетом доказанных свойств вернемся к задаче (3.15).

Лемма 11. *Пусть выполнено условие* $\varepsilon\|M\| < 1$*, тогда спектр задачи* (3.15) *расположен в секторе*

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{tg}\ |\arg\lambda| \leqslant l := \frac{\varepsilon\,\|M\|}{1-\varepsilon^2\,\|M\|^2}\right\}. \tag{3.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим оператор $\mathcal{M}$ в следующем виде

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 M^* M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & -i\varepsilon M^* \\ i\varepsilon M & 0 \end{pmatrix} =: \mathcal{M}_{\mathrm{Re}} + i\mathcal{M}_{\mathrm{Im}},$$

где $\mathcal{M}_{\mathrm{Re}}$ и $\mathcal{M}_{\mathrm{Im}}$ — ограниченные (в силу ограниченности M, а значит, и M^*) самосопряженные операторы.

Пусть теперь $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ — собственное значение, а $z_0 \neq 0$ — собственный элемент задачи (3.15). Из (3.15) имеем

$$\|z_0\|^2 - (\mathcal{M}_{Re} z_0, z_0) - i(\mathcal{M}_{Im} z_0, z_0) = (\mathrm{Re}\,\lambda_0 + i\mathrm{Im}\,\lambda_0)\,\|\mathcal{D}^{1/2} z_0\|^2.$$

Отделяя вещественную и мнимую части, получаем

$$\|z_0\|^2 - (\mathcal{M}_{Re} z_0, z_0) = \mathrm{Re}\,\lambda_0\,\|\mathcal{D}^{1/2} z_0\|^2, \qquad |(\mathcal{M}_{Im} z_0, z_0)| = |\mathrm{Im}\,\lambda_0|\,\|\mathcal{D}^{1/2} z_0\|^2.$$

Так как $\|\mathcal{D}^{1/2} z_0\| \neq 0$ и $\mathrm{Re}\,\lambda_0 > 0$, то получаем

$$\mathrm{tg}\ |\arg\lambda_0| = \frac{|\mathrm{Im}\,\lambda_0|}{\mathrm{Re}\,\lambda_0} = \frac{|(\mathcal{M}_{Im} z_0, z_0)|}{\|z_0\|^2 - (\mathcal{M}_{Re} z_0, z_0)}. \tag{3.20}$$

Оценим числитель и знаменатель в (3.20)

$$|(\mathcal{M}_{Im} z_0, z_0)| = \varepsilon\,| - i(M^*\vec{q}_0, \vec{m}_0) + i(M\vec{m}_0, \vec{q}_0)| \leqslant 2\varepsilon\,\|M\|\cdot\|\vec{m}_0\|\cdot\|\vec{q}_0\| \leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon\,\|M\|\cdot\left(\|\vec{m}_0\|^2 + \|\vec{q}_0\|^2\right) = 2\varepsilon\,\|M\|\,\|z_0\|^2;$$

$$(\mathcal{M}_{Re} z_0, z_0) = \varepsilon^2(M^*M\vec{m}_0, \vec{m}_0) = \varepsilon^2\,\|M\vec{m}_0\|^2 \leqslant \varepsilon^2\,\|M\|^2\,\|\vec{m}_0\|^2 \leqslant \varepsilon^2\,\|M\|^2\,\|\vec{z}_0\|^2.$$

Так как по условию леммы $\varepsilon\,\|M\| < 1$, то отсюда получаем

$$\|z_0\|^2 - (\mathcal{M}_{Re} z_0, z_0) \geqslant (1 - \varepsilon^2\,\|M\|^2)\cdot\|z_0\|^2 > 0.$$

Используя полученные оценки, для любого собственного значения $\lambda_0 = \mathrm{Re}\,\lambda_0 + i\ \mathrm{Im}\,\lambda_0$ из (3.20) имеем

$$\mathrm{tg}\ |\arg\lambda_0| = \frac{|\mathrm{Im}\,\lambda_0|}{\mathrm{Re}\,\lambda_0} \leqslant \frac{\varepsilon\,\|M\|}{1-\varepsilon^2\,\|M\|^2}.$$

□

Из полученных утверждений получаем следующую итоговую теорему.

Теорема 1. *Задача о нормальных колебаниях вязкой стратифицированной жидкости в сосуде, ограниченной упругой мембраной, имеет дискретный спектр, который расположен в правой полуплоскости симметрично относительно вещественной оси и имеет единственную предельную точку $\lambda = \infty$. Если выполнено условие*

$$\mu > \left[\left(\sigma\|B^{1/2}\gamma_n A^{-3/4}\|^2 + \|C^* A^{-3/4}\|^2\right) \cdot \left(\|A^{-1/2}\| + \rho_m\|\gamma_n A^{-1/4}\|^2\right)\right]^{1/2}, \tag{3.21}$$

то спектр задачи лежит в секториальной области

$$\Theta(\mu) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}\lambda \geqslant \operatorname{Re}\lambda_1(\mu) > 0, \quad \operatorname{tg}|\arg\lambda| \leqslant s(\mu)\}, \tag{3.22}$$

$$s(\mu) := \frac{\mu^{-1}\left[(\sigma\|B^{1/2}\gamma_n A^{-3/4}\|^2 + \|C^* A^{-3/4}\|^2) \cdot (\|A^{-1/2}\| + \rho_m\|\gamma_n A^{-1/4}\|^2)\right]^{1/2}}{1 - \mu^{-2}(\sigma\|B^{1/2}\gamma_n A^{-3/4}\|^2 + \|C^* A^{-3/4}\|^2) \cdot (\|A^{-1/2}\| + \rho_m\|\gamma_n A^{-1/4}\|^2)} > 0.$$

Доказательство. Согласно лемме 10 оператор M ограничен и допускает оценку (3.18). Если выполнено условие (3.21), то получаем неравенство $\varepsilon\|M\| < 1$, следовательно, по лемме 11 спектр задачи лежит в области (3.19), а значит и (3.22). Согласно лемме 8, а также из свойства $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \operatorname{Re}\lambda_1(\mu)$, где $\lambda \geqslant \operatorname{Re}\lambda_1(\mu)$ — первое (в порядке возрастания по $\operatorname{Re}\lambda$) собственное значение задачи, следуют все утверждения теоремы. □

Следствием теоремы является следующее утверждение: при увеличении вязкости μ угол полураствора секториальной области $\Theta(\mu)$ стремится к нулю, то есть спектр исследуемой задачи приближается к вещественной оси.

§ 4. Заключение

В параграфе 2 рассмотрена скалярная модельная задача, отражающая основные особенности векторной пространственной задачи. Получено характеристическое уравнение для собственных значений модельной задачи, изучена структура спектра и асимптотика ветвей собственных значений. А именно, установлено, что все собственные значения, кроме некоторого счетного подмножества, являются вещественными и положительными с предельной точкой $+\infty$. Выделенное счетное подмножество собственных значений при большой вязкости также расположено на положительной полуоси, но имеет отличное асимптотическое поведение: если вязкость мала, то это выделенное счетное подмножество асимптотически примыкает к двум сопряженным полупрямым в правой комплексной полуплоскости. В параграфе 3 исследована задача о нормальных колебаниях вязкой стратифицированной жидкости в произвольном сосуде. Удается установить, что спектр задачи дискретен, расположен в правой комплексной полуплоскости симметрично относительно вещественной оси и имеет единственную предельную точку $+\infty$. Удается также доказать, что спектр определенным образом локализован в правой полуплоскости, зона локации зависит от динамической вязкости жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lu D., Takizawa A., Kondo S. Overflow-induced vibration of a weir coupled with sloshing in a downstream tank // Journal of Fluids and Structures. 1997. Vol. 11. Issue 4. P. 367–393. https://doi.org/10.1006/jfls.1997.0084
2. Lakis A. A., Païdoussis M. P. Free vibration of cylindrical shells partially filled with liquid // Journal of Sound and Vibration. 1971. Vol. 19. Issue 1. P. 1–15. https://doi.org/10.1016/0022-460X(71)90417-2
3. Balendra T., Ang K. K., Paramasivam P., Lee S. L. Free vibration analysis of cylindrical liquid storage tanks // International Journal of Mechanical Sciences. 1982. Vol. 24. Issue 1. P. 47–59. https://doi.org/10.1016/0020-7403(82)90020-0

4. Cheung Y. K., Zhou D. Coupled vibratory characteristics of a rectangular container bottom plate // Journal of Fluids and Structures. 2000. Vol. 14. Issue 3. P. 339–357. https://doi.org/10.1006/jfls.1999.0272
5. Cheung Y. K., Zhou D. Hydroelastic vibration of a circular container bottom plate using the Galerkin method // Journal of Fluids and Structures. 2002. Vol. 16. Issue 4. P. 561–580. https://doi.org/10.1006/jfls.2001.0430
6. Bauer H. F., Eidel W. Hydroelastic vibrations in a two-dimensional rectangular container filled with frictionless liquid and a partly elastically covered free surface // Journal of Fluids and Structures. 2004. Vol. 19. Issue 2. P. 209–220. https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2003.11.002
7. Kopachevsky N. D., Krein S. G. Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1: self-adjoint problems for an ideal fluid. Basel: Birkhäuser, 2001. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8342-9
8. Kopachevsky N. D., Krein S. G. Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: not self-adjoint problems for a viscous fluid. Basel: Birkhäuser, 2003. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8063-3
9. Zhang Y., Wen J., Xiao Y., Wen X., Wang J. Theoretical investigation of the sound attenuation of membrane-type acoustic metamaterials // Physics Letters A. 2012. Vol. 376. Issue 17. P. 1489–1494. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2012.03.010
10. Tariverdilo S., Mirzapour J., Shahmardani M., Rezazadeh G. Free vibration of membrane/bounded incompressible fluid // Applied Mathematics and Mechanics. 2012. Vol. 33. Issue 9. P. 1167–1178. https://doi.org/10.1007/s10483-012-1613-8
11. Tarazaga P. A., Johnson M. E., Inman D. J. Experimental validation of the vibro-acoustic model of a pressurized membrane // Mechanical Systems and Signal Processing. 2014. Vol. 45. Issue 2. P. 330–345. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2013.11.013
12. Eftekhari S. A. A differential quadrature procedure for free vibration of circular membranes backed by a cylindrical fluid-filled cavity // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2017. Vol. 39. Issue 4. P. 1119–1137. https://doi.org/10.1007/s40430-016-0561-3
13. Kononov Yu. N. Dzhukha Yu. A. Influence of overload on axisymmetric oscillations of a circular membrane on the free surface of fluid in a cylindrical tank // Zbirnyk Prats’ Instytutu Matematyky NAN Ukrainy. 2017. Vol. 14. No. 2. P. 32–41. https://zbmath.org/1399.76010
14. Amaouche M., Abderrahmane H. A. An exact eigenfrequency equation for the oscillations of a viscous fluid contained in an open and rectangular vessel with a flexible wall // European Journal of Mechanics — B/Fluids. 2018. Vol. 70. P. 1–5. https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2018.02.001
15. Kononov Yu. N., Shevchenko V. P., Dzhukh Yu. O. Axially symmetric vibrations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical vessel // Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 240. Issue 1. P. 98–112. https://doi.org/10.1007/s10958-019-04338-2
16. Essaouini H., El Bakkali L., Capodanno P. Small oscillations of an ideal liquid contained in a vessel closed by an elastic circular plate, in uniform rotation // Theoretical and Applied Mechanics. 2017. Vol. 44. Issue 1. P. 35–49. https://doi.org/10.2298/TAM160123002E
17. Цветков Д. О. Колебания идеальной стратифицированной жидкости с упругой мембраной // Динамические системы. 2019. Т. 9 (37). № 1. С. 26–45. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41272951
18. Kononov Yu. N., Dzhukha Yu. O. Vibrations of two-layer ideal liquid in a rigid cylindrical vessel with elastic bases // Journal of Mathematical Sciences (New York). 2020. Vol. 246. No. 3. P. 365–383. https://zbmath.org/1448.74049
19. Choa I. H., Kimb M. H. Effect of a bottom-hinged, top-tensioned porous membrane baffle on the sloshing reduction in a rectangular tank // Applied Ocean Research. 2020. Vol. 104. Article number 102345. https://doi.org/10.1016/j.apor.2020.102345
20. Крейн М. Г., Лангер Г. К. К теории квадратичных пучков самосопряженных операторов // Доклады Академии наук СССР. 1964. Т. 154. № 6. С. 1258–1261. http://mi.mathnet.ru/dan29201
21. Крейн С. Г. О колебаниях вязкой жидкости в сосуде // Доклады Академии наук СССР. 1964. Т. 159. № 2. С. 262–265. http://mi.mathnet.ru/dan30338

22. Габов С. А., Малышева Г. Ю. Об одной спектральной задаче, связанной с колебаниями вязкой стратифицированной жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984. Т. 24. № 6. С. 893–899. http://mi.mathnet.ru/zvmmf4373
23. Essaouini H., El Bakkali L., Capodanno P. Mathematical study of the small oscillations of two nonmixing fluids, the lower inviscid, the upper viscoelastic, in an open container // Journal of Mathematical Fluid Mechanics. 2017. Vol. 19. Issue 4. P. 645–657. https://doi.org/10.1007/s00021-016-0300-7
24. Закора Д. А. Спектральный анализ одной задачи теории вязкоупругости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58. № 11. С. 1829–1843. https://doi.org/10.31857/S004446690003536-0
25. Tsvetkov D. O. Crumbled ice on the surface of a multilayered fluid // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2020. Т. 17. С. 777–801. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.056
26. Копачевский Н. Д., Орлова Л. Д., Пашкова Ю. С. Дифференциально-операторные и интегро-дифференциальные уравнения в проблеме малых колебаний гидродинамических систем // Ученые записки Симферопольского гос. ун-та. 1995. Т. 41. № 2. С. 98–108.
27. Цветков Д. О. Об одной начально-краевой задаче, возникающей в динамике вязкой стратифицированной жидкости // Известия высших учебных заведений. Математика. 2020. № 8. С. 59–73. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-8-59-73
28. Копачевский Н. Д. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм // Современная математика. Фундаментальные направления. 2015. Т. 57. С. 71–107. http://mi.mathnet.ru/cmfd273
29. Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. Гидродинамика в слабых силовых полях. О малых колебаниях вязкой жидкости в потенциальном поле массовых сил // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1966. Т. 6. № 6. С. 1054–1063. http://mi.mathnet.ru/zvmmf7442
30. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.

Поступила в редакцию 19.03.2021

Цветков Денис Олегович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического анализа, Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Таврическая академия, 295007, Россия, г. Симферополь, пр. Вернадского, 4.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1068-0102
E-mail: tsvetdo@gmail.com

Цитирование: Д. О. Цветков. Задача о нормальных колебаниях вязкой стратифицированной жидкости с упругой мембраной // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 311–330.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2021. Vol. 31. Issue 2. Pp. 311–330.

D. O. Tsvetkov

The problem of normal oscillations of a viscous stratified fluid with an elastic membrane

Keywords: stratification effect in viscous fluids, differential equation in Hilbert space, membrane, normal oscillations.

MSC2020: 76D50, 34G10, 35P05

DOI: 10.35634/vm210211

Normal oscillations of a viscous stratified fluid partially filling an arbitrary vessel and bounded above by an elastic horizontal membrane are studied. In this case, we consider a scalar model problem that reflects the main features of the vector spatial problem. The characteristic equation for the eigenvalues of the model problem is obtained, the structure of the spectrum and the asymptotics of the branches of the eigenvalues are studied. Assumptions are made about the structure of the oscillation spectrum of a viscous stratified fluid bounded by an elastic membrane for an arbitrary vessel. It is proved that the spectrum of the problem is discrete, located in the right complex half-plane symmetrically with respect to the real axis, and has a single limit point $+\infty$. Moreover, the spectrum is localized in a certain way in the right half-plane, the location zone depends on the dynamic viscosity of the fluid.

REFERENCES

1. Lu D., Takizawa A., Kondo S. Overflow-induced vibration of a weir coupled with sloshing in a downstream tank, *Journal of Fluids and Structures*, 1997, vol. 11, issue 4, pp. 367–393. https://doi.org/10.1006/jfls.1997.0084
2. Lakis A. A., Païdoussis M. P. Free vibration of cylindrical shells partially filled with liquid, *Journal of Sound and Vibration*, 1971, vol. 19, issue 1, pp. 1–15. https://doi.org/10.1016/0022-460X(71)90417-2
3. Balendra T., Ang K. K., Paramasivam P., Lee S. L. Free vibration analysis of cylindrical liquid storage tanks, *International Journal of Mechanical Sciences*, 1982, vol. 24, issue 1, pp. 47–59. https://doi.org/10.1016/0020-7403(82)90020-0
4. Cheung Y. K., Zhou D. Coupled vibratory characteristics of a rectangular container bottom plate, *Journal of Fluids and Structures*, 2000, vol. 14, issue 3, pp. 339–357. https://doi.org/10.1006/jfls.1999.0272
5. Cheung Y. K., Zhou D. Hydroelastic vibration of a circular container bottom plate using the Galerkin method, *Journal of Fluids and Structures*, 2002, vol. 16, issue 4, pp. 561–580. https://doi.org/10.1006/jfls.2001.0430
6. Bauer H. F., Eidel W. Hydroelastic vibrations in a two-dimensional rectangular container filled with frictionless liquid and a partly elastically covered free surface, *Journal of Fluids and Structures*, 2004, vol. 19, issue 2, pp. 209–220. https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2003.11.002
7. Kopachevsky N. D., Krein S. G. *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1: self-adjoint problems for an ideal fluid*, Basel: Birkhäuser, 2001. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8342-9
8. Kopachevsky N. D., Krein S. G. *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: not self-adjoint problems for a viscous fluid*, Basel: Birkhäuser, 2003. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8063-3
9. Zhang Y., Wen J., Xiao Y., Wen X., Wang J. Theoretical investigation of the sound attenuation of membrane-type acoustic metamaterials, *Physics Letters A*, 2012, vol. 376, issue 17, pp. 1489–1494. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2012.03.010
10. Tariverdilo S., Mirzapour J., Shahmardani M., Rezazadeh G. Free vibration of membrane/bounded incompressible fluid, *Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 33, issue 9, pp. 1167–1178. https://doi.org/10.1007/s10483-012-1613-8
11. Tarazaga P. A., Johnson M. E., Inman D. J. Experimental validation of the vibro-acoustic model of a pressurized membrane, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2014, vol. 45, issue 2, pp. 330–345. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2013.11.013

12. Eftekhari S. A. A differential quadrature procedure for free vibration of circular membranes backed by a cylindrical fluid-filled cavity, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2017, vol. 39, issue 4, pp. 1119–1137. https://doi.org/10.1007/s40430-016-0561-3
13. Kononov Yu. N., Dzhukha Yu. A. Influence of overload on axisymmetric oscillations of a circular membrane on the free surface of fluid in a cylindrical tank, *Zbirnyk Prats' Instytutu Matematyky NAN Ukrainy*, 2017, vol. 14, no. 2, pp. 32–41 (in Russian). https://zbmath.org/1399.76010
14. Amaouche M., Abderrahmane H. A. An exact eigenfrequency equation for the oscillations of a viscous fluid contained in an open and rectangular vessel with a flexible wall, *European Journal of Mechanics — B/Fluids*, 2018, vol. 70, pp. 1–5. https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2018.02.001
15. Kononov Yu. M., Shevchenko V. P., Dzhukh Yu. O. Axially symmetric vibrations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical vessel, *Journal of Mathematical Sciences*, 2019, vol. 240, issue 1, pp. 98–112. https://doi.org/10.1007/s10958-019-04338-2
16. Essaouini H., El Bakkali L., Capodanno P. Small oscillations of an ideal liquid contained in a vessel closed by an elastic circular plate, in uniform rotation, *Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, vol. 44, issue 1, pp. 35–49. https://doi.org/10.2298/TAM160123002E
17. Tsvetkov D. O. Oscillations of an ideal stratified fluid with an elastic membrane, *Dinamicheskie Sistemy (Simferopol')*, 2019, vol. 9 (37), no. 1, pp. 26–45 (in Russian). https://zbmath.org/1453.76031
18. Kononov Yu. M., Dzhukha Yu. O. Vibrations of two-layer ideal liquid in a rigid cylindrical vessel with elastic bases, *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, 2020, vol. 246, no. 3, pp. 365–383. https://zbmath.org/1448.74049
19. Choa I. H., Kimb M. H. Effect of a bottom-hinged, top-tensioned porous membrane baffle on the sloshing reduction in a rectangular tank, *Applied Ocean Research*, 2020, vol. 104, article number 102345. https://doi.org/10.1016/j.apor.2020.102345
20. Krejn M. G., Langer G. K. A contribution to the theory of quadratic pencils of self-adjoint operators, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1964, vol. 5, pp. 266–269. https://zbmath.org/0198.47102
21. Krejn S. G. Oscillations of a viscous fluid in a container, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1964, vol. 159, pp. 266–269 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/dan30338
22. Gabov S. A., Malysheva G. Yu. On a spectral problem connected with the oscillations of a viscous stratified fluid, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1984, vol. 24, issue 3, pp. 170–174. https://doi.org/10.1016/0041-5553(84)90066-1
23. Essaouini H., El Bakkali L., Capodanno P. Mathematical study of the small oscillations of two non-mixing fluids, the lower inviscid, the upper viscoelastic, in an open container, *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 2017, vol. 19, issue 4, pp. 645–657. https://doi.org/10.1007/s00021-016-0300-7
24. Zakora D. A. Spectral analysis of a viscoelasticity problem, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2018, vol. 58, no. 11, pp. 1761–1774. https://doi.org/10.1134/S0965542518110179
25. Tsvetkov D. O. Crumbled ice on the surface of a multilayered fluid, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2020, vol. 17, pp. 777–801. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.056
26. Kopachevskii N. D., Orlova L. D., Pashkova Yu. S. Differential-operator and integro-differential equations in the problem of small oscillations of hydrodynamic systems, *Uchenye Zapiski Simferopol'skogo Universiteta*, 1995, vol. 41, no. 2, pp. 98–108 (in Russian).
27. Tsvetkov D. O. On an initial-boundary value problem which arises in the dynamics of a viscous stratified fluid, *Russian Mathematics*, 2020, vol. 64, issue 8, pp. 50–63. https://doi.org/10.3103/S1066369X20080071
28. Kopachevsky N. D. Abstract Green formulas for triples of Hilbert spaces and sesquilinear forms, *Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 225, issue 2 pp. 226–264. https://doi.org/10.1007/s10958-017-3470-9
29. Kopachevskii N. D., Myshkis A. D. Hydrodynamics in weak fields of force. The small oscillations of a viscous liquid in a potential field of force, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1966, vol. 6, no. 6, pp. 150–161. https://doi.org/10.1016/0041-5553(66)90167-4
30. Gokhberg I. C., Krein M. G. *Vvedenie v teoriyu lineinykh nesamosopryazhennykh operatorov v gil'bertovom prostranstve* (Introduction to the theory of linear non-self-adjoint operators in Hilbert space), Moscow: Nauka, 1965.

Received 19.03.2021

Tsvetkov Denis Olegovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Taurida Academy, pr. Vernadskogo, 4, Simferopol, 295007, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1068-0102
E-mail: tsvetdo@gmail.com

Citation: D. O. Tsvetkov. The problem of normal oscillations of a viscous stratified fluid with an elastic membrane, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 2, pp. 311–330.