МАТЕМАТИКА 2022. Т. 32. Вып. 2. С. 228–239.

УДК 517.946

© *Г. У. Уразбоев, М. М. Хасанов*

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В данной работе рассматривается уравнение Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным интегральным источником. Показано, что уравнение Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным интегральным источником может быть проинтегрировано методом обратной спектральной задачи. Определена эволюция спектральных данных оператора Штурма–Лиувилля с периодическим потенциалом, связанного с решением уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным интегральным источником. Полученные результаты позволяют применить метод обратной задачи для решения уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций.

Ключевые слова: КдФ отрицательного порядка, самосогласованный источник, обратная спектральная задача.

DOI: 10.35634/vm220205

В 1967 году в работе [1] американских ученых К. Гарднера, Дж. Грина, М. Крускала и Р. Миуры была установлена интегрируемость уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) в классе «быстроубывающих» по x функций с помощью метода обратной задачи рассеяния для уравнения Штурма–Лиувилля.

С помощью обратной задачи для оператора Штурма–Лиувилля с периодическим потенциалом в работах [2–8] и др. показана полная интегрируемость уравнения КдФ в классе конечнозонных периодических и квазипериодических функций.

В работах [9–12] было рассмотрено уравнение КдФ с самосогласованным источником, в классе быстроубывающих функций, а в работе [13] изучено уравнение КдФ с самосогласованным источником в классе периодических функций. Матричное уравнение КдФ с самосогласованным источником в классе быстроубывающих функций было исследовано в работе [14].

В работе [15] с помощью метода обратной задачи было проинтегрировано уравнение мКдФ с самосогласованным источником в классе периодических функций. Общее нагруженное уравнение КдФ с интегральным источником в классе быстроубывающих комплекснозначных функций было исследовано в работе [16]. Изучению нелинейного уравнения Шредингера и уравнению КдФ с нагруженным членом в классе периодических функций посвящены работы [17, 18].

Периодические решения дискретного модифицированного уравнения КдФ с самосогласованным источником изучены в работе [19].

Эволюция данных рассеяния спектральной задачи, связанной с нелинейным эволюционным уравнением Гарри Дима с самосогласованным источником интегрального типа, выведена в работе [20].

Большинство исследований, касающихся изучения интегрируемых уравнений с самосогласованным источником, связаны с нелинейными эволюционными уравнениями положительного порядка.

Изучению уравнения КдФ отрицательного порядка посвящены работы [21, 22]. В частности, J. M. Verosky [21] при изучении симметрий и отрицательных степеней рекурсивного оператора получил следующее уравнение КдФ отрицательного порядка:

$$\begin{cases} q_t = p_x, \\ p_{xxx} + 4qp_x + 2q_x p = 0. \end{cases} \tag{0.1}$$

S. Y. Lou [22] представил дополнительные симметрии, основанные на обратимом рекурсивном операторе системы КдФ, и, в частности, вывел уравнение КдФ отрицательного порядка в следующем виде

$$q_t = 2pp_x, \quad p_{xx}+qp = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{p_{xx}}{p}\right)_t + 2pp_x = 0. \tag{0.2}$$

Изучение интегрируемых иерархий отрицательного порядка играют важную роль в теории остроконечных солитонов [23, 24]. В работе [25] изучена иерархия уравнения КдФ отрицательного порядка, в частности, уравнений (0.1) и (0.2).

В работах [25–30] были изучены гамильтонова структура, бесконечное множество законов сохранения, N-солитонные, квазипериодические волновые решения для уравнения КдФ отрицательного порядка.

В данной работе метод обратной спектральной задачи применяется к интегрированию уравнения КдФ отрицательного порядка с самосогласованным интегральным источником в классе периодических функций.

Рассмотрим следующее уравнение КдФ отрицательного порядка с самосогласованным источником

$$\begin{cases} q_t = 2pp_x + 2\displaystyle\int_0^\infty \beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)\left(\psi_+(x,\lambda,t)\cdot\psi_-(x,\lambda,t)\right)_x d\lambda, \\ pq + p_{xx} = 0, \end{cases} \quad t>0, \quad x\in R^1, \tag{0.3}$$

с начальным условием

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x),$$
$$p(x,t)|_{x=0} = p_0(t),$$

где $q_0(x)$ и $p_0^2(t)$ — действительные функции, причем $q_0(x)$ — периодическая функция. Требуется найти действительные функции $q(x,t)$ и $p^2(x,t)$, которые π-периодические по переменной x:

$$p^2(x+\pi,t) \equiv p^2(x,t), \quad q(x+\pi,t) \equiv q(x,t), \quad t \geqslant 0, \qquad x \in R^1,$$

и удовлетворяют условиям гладкости:

$$\begin{aligned} q(x,t) &\in C_t^1(t>0)\cap C(t\geqslant 0), \\ p(x,t) &\in C_x^2(t>0)\cap C(t\geqslant 0). \end{aligned} \tag{0.4}$$

Здесь $\beta(\lambda,t) \in C([0,\ \infty)\times[0,\ \infty))$ — заданная действительная функция, имеющая равномерную асимптотику $\beta(\lambda,t) = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$, $\lambda\to\infty$, $\psi_\pm(x,\lambda,t)$ — решения Флоке (см. § 1) уравнения Штурма–Лиувилля

$$L(t)y \equiv -y'' + (-q(x,t))y = \lambda\, y, \quad x \in R^1, \tag{0.5}$$

(нормированные условием $\psi_\pm(0,\lambda,t) = 1$), а $s(x,\lambda,t)$ — решение уравнения (0.5), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,t) = 0$, $s'(0,\lambda,t) = 1$.

Цель данной работы — дать процедуру построения решения $(q(x,t), p(x,t), \psi_\pm(x,\lambda,t))$ задачи (0.3)–(0.4) в рамках обратной спектральной задачи для оператора Штурма–Лиувилля с периодическим коэффициентом.

§ 1. Обратная спектральная задача

В этом пункте, для полноты изложения, приведем некоторые основные сведения, касающиеся обратной спектральной задачи для оператора Штурма–Лиувилля с периодическим потенциалом (см. [31–37]).

Рассмотрим следующий оператор Штурма–Лиувилля на всей прямой

$$Ly \equiv -y'' + (-q(x))y = \lambda\, y, \quad x \in R^1, \tag{1.1}$$

где $q(x)$ — действительная непрерывная π — периодическая функция.

Обозначим через $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ решения уравнения (1.1), удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda) = 1$, $c'(0,\lambda) = 0$ и $s(0,\lambda) = 0$, $s'(0,\lambda) = 1$. Функция $\Delta(\lambda) = c(\pi,\lambda) + s(\pi,\lambda)$ называется функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла для оператора Штурма–Лиувилля (1.1). Следующее утверждение составляет содержание теоремы Флоке: при $\Delta^2(\lambda) - 4 \neq 0$ уравнение (1.1) имеет два линейно независимых решения, имеющих вид: $\psi_\pm(x,\lambda) = \rho_\pm^{\frac{x}{\pi}} \cdot p_\pm(x,\lambda)$, где $p_\pm(x,\lambda)$ — π-периодические функции по x, и $\rho_\pm = (\Delta(\lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4})/2$; при $\Delta(\lambda) = 2$ уравнение (1.1) имеет решение с периодом π; при $\Delta(\lambda) = -2$ уравнение (1.1) имеет решение с антипериодом π. Если положить $\psi_\pm(0,\lambda) = 1$, то

$$\psi_\pm(x,\lambda) = c(x,\lambda) + \frac{s'(\pi,\lambda) - c(\pi,\lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s(\pi,\lambda)} s(x,\lambda). \tag{1.2}$$

Эти решения принято называть решениями Флоке.

Спектр оператора (1.1) чисто непрерывный и совпадает со следующим множеством

$$E = \{\lambda \in R^1 \colon \ -2 \leqslant \Delta(\lambda) \leqslant 2\} = [\lambda_0, \lambda_1] \bigcup [\lambda_2,\ \lambda_3] \bigcup \ldots \bigcup [\lambda_{2n}, \lambda_{2n+1}] \bigcup \ldots .$$

Интервалы $(-\infty, \lambda_0)$, $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n = 1, 2, \ldots$, называются лакунами. Здесь λ_0, λ_{4k-1}, λ_{4k} — собственные значения периодической задачи $(y(0) = y(\pi),\ y'(0) = y'(\pi))$, а λ_{4k+1}, λ_{4k+2} — собственные значения антипериодической задачи $(y(0) = -y(\pi),\ y'(0) = -y'(\pi))$ для уравнения (1.1).

Пусть ξ_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — корни уравнения $s(\pi,\lambda) = 0$. Отметим, что ξ_n, $n = 1, 2, \ldots,$ совпадают с собственными значениями задачи Дирихле $(y(0) = y(\pi) = 0)$ для уравнения (1.1), кроме того выполняются следующие включения $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n = 1, 2, \ldots$.

Числа ξ_n, $n = 1, 2, \ldots,$ вместе со знаками $\sigma_n = \operatorname{sign}\{s'(\pi,\xi_n) - c(\pi,\xi_n)\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ называются спектральными параметрами задачи (1.1). Спектральные параметры ξ_n, σ_n, $n = 1, 2, \ldots,$ и границы λ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ спектра называются спектральными данными оператора (1.1). Восстановление коэффициента $q(x)$ по спектральным данным называется обратной спектральной задачей для оператора (1.1).

Спектр оператора Штурма–Лиувилля с коэффициентом $q(x + \tau)$ не зависит от действительного параметра τ, а спектральные параметры зависят от τ: $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n = 1, 2, \ldots$. Спектральные параметры удовлетворяют следующей системе уравнений Дубровина

$$\frac{d\xi_n}{d\tau} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)\sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)}\times$$

$$\times \sqrt{(\xi_n - \lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}, \quad n \geqslant 1.$$

Система уравнений Дубровина и следующая формула следов

$$q(\tau,t) = -\lambda_0 - \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau,t))$$

дают метод решения обратной задачи.

§ 2. Основной результат

Основной результат настоящей работы заключается в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть* $(q(x,t), p(x,t), \psi_{\pm}(x,\lambda,t))$ *— решение задачи* (0.3)–(0.4)*. Тогда спектр оператора* (0.5) *не зависит от параметра* t*, а спектральные параметры* $\xi_n(t)$*,* $n = 1, 2, \ldots,$ *удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:*

$$\begin{gathered}\dot{\xi}_n = 2(-1)^{n+1}\sigma_n(t)\left\{\frac{1}{2\xi_n}p^2(0,t) + \int_0^{\infty}\frac{s(\pi,\lambda,t)\beta(\lambda,t)}{\lambda-\xi_n}d\lambda\right\}\times \\ \times\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}}, \qquad n \geqslant 1,\end{gathered} \tag{2.1}$$

где знак $\sigma_n(t)$ *меняется на противоположный при каждом столкновении точки* $\xi_n(t)$ *с границами своей лакуны* $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$*. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:*

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, \quad n \geqslant 1, \tag{2.2}$$

где ξ_n^0*,* σ_n^0*,* $n \geqslant 1$*, — спектральные параметры оператора Штурма–Лиувилля с коэффициентом* $q_0(x)$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вводя обозначение

$$G(x,t) = 2\int_0^{\infty}\beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)\left(\psi_+(x,\lambda,t)\cdot\psi_-(x,\lambda,t)\right)_x d\lambda,$$

уравнение (0.3) можно переписать в виде

$$\begin{cases} q_t = 2pp_x + G(x,t), \\ pq + p_{xx} = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Обозначим через $y_n(x,t)$, $n = 1, 2, \ldots,$ ортонормированные собственные функции задачи Дирихле $(y(0) = 0,\ y(\pi) = 0)$ для уравнения (0.5), соответствующие собственным значениям $\xi_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots.$

Дифференцируя по t тождество $(L(t)y_n, y_n) = \xi_n$, и используя симметричность оператора $L(t)$, имеем

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_n &= (L\dot{y}_n + (-q_t)y_n, y_n) + (Ly_n, \dot{y}_n) = (\dot{y}_n, Ly_n) + (Ly_n, \dot{y}_n) + ((-q_t)y_n, y_n) = \\ &= \xi_n((y_n, y_n))^{\dot{}} + ((-q_t)y_n, y_n) = -\int_0^{\pi}q_t(x,t)y_n^2(x,t)\,dx.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь $(\cdot\,,\,\cdot)$ — скалярное произведение пространства $L_2(0,\ \pi)$.

Подставляя (2.3) в (2.4) находим

$$\dot{\xi}_n = -2\int_0^{\pi}y_n^2(x,t)pp_x\,dx - \int_0^{\pi}y_n^2(x,t)G(x,t)\,dx. \tag{2.5}$$

Интегрируя по частям первый интеграл в равенстве (2.5), имеем

$$2\int_0^\pi y_n^2 pp_x\,dx = \int_0^\pi y_n^2\,d(p^2) = y_n^2p^2\big|_0^\pi - 2\int_0^\pi y_ny_n'p^2\,dx = -2\int_0^\pi y_ny_n'p^2\,dx.$$

Из уравнения (0.5) вытекает следующее равенство

$$y_n = -\frac{1}{\xi_n}(y_n'' + qy_n).$$

Используя эти тождества и второе уравнение (2.3), получим

$$2\int_0^\pi y_n^2pp_xdx = \frac{1}{2\xi_n}[(y_n')^2(\pi,t) - (y_n')^2(0,t)]p^2(0,t). \tag{2.6}$$

Теперь займемся вычислением второго интеграла в равенстве (2.5):

$$\int_0^\pi G\cdot y_n^2dx = \int_0^\infty s(\pi,\lambda,t)\beta(\lambda,t)\left\{2\int_0^\pi y_n^2\cdot(\psi_+\psi_-)'dx\right\}d\lambda.$$

Интегрируя по частям, нетрудно видеть, что

$$2\int_0^\pi y_n^2\cdot(\psi_+\psi_-)'dx = \frac{1}{\xi_n-\lambda}\cdot[(y_n')^2(\pi,t) - (y_n')^2(0,t)],$$

таким образом,

$$\int_0^\pi G\cdot y_n^2dx = [(y_n')^2(\pi,t) - (y_n')^2(0,t)]\cdot\int_0^\infty \frac{s(\pi,\lambda,t)\beta(\lambda,t)}{\xi_n-\lambda}d\lambda. \tag{2.7}$$

Подставляя выражения (2.6) и (2.7) в (2.5) получим равенство

$$\dot{\xi}_n = [(y_n')^2(\pi,t) - (y_n')^2(0,t)]\times\left\{-\frac{1}{2\xi_n}p^2(0,t) - \int_0^\infty\frac{s(\pi,\lambda,t)\beta(\lambda,t)}{\xi_n-\lambda}d\lambda\right\}. \tag{2.8}$$

Используя равенства

$$y_n(x,t) = \frac{1}{c_n(t)}s(x,\xi_n(t),t),$$

$$c_n^2(t) \equiv \int_0^\pi s^2(x,\xi_n(t),t)dx = s'(\pi,\xi_n(t),t)\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}$$

имеем

$$(y_n')^2(\pi,t) - (y_n')^2(0,t) = \frac{1}{\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}}\left(s'(\pi,\xi_n(t),t) - \frac{1}{s'(\pi,\xi_n(t),t)}\right).$$

Подставляя сюда выражение

$$s'(\pi,\xi_n,t) - \frac{1}{s'(\pi,\xi_n,t)} = \sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2\left(\xi_n(t)\right)-4},$$

получим

$$(y_n')^2(\pi,t) - (y_n')^2(0,t) = \frac{\sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2\left(\xi_n(t)\right)-4}}{\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}}.$$

Здесь $\sigma_n(t) = \operatorname{sign}\left\{s'(\pi,\xi_n(t),t) - c(\pi,\xi_n(t),t)\right\}$.

Из разложений

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = 4\pi^2(\lambda_0 - \lambda) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \lambda)(\lambda_{2k} - \lambda)}{k^4},$$

$$s(\pi, \lambda, t) = \pi \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k(t) - \lambda}{k^2}$$

следует, что

$$\begin{gathered}(y_n')^2(\pi, t) - (y_n')^2(0, t) = 2(-1)^n \sigma_n(t) \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \times \\ \times \sqrt{(\xi_n - \lambda_0) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Из (2.8) и (2.9) получим (2.1).

Теперь докажем независимость от t собственных значений λ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, периодической и антипериодической задач для уравнения Штурма–Лиувилля (0.5). Аналогично формуле (2.8) можно показать, что

$$\dot{\lambda}_n(t) = \int_0^{\pi} G(x, t) v_n^2(x, t)\, dx,$$

где $v_n(x, t)$ — нормированная собственная функция периодической или антипериодической задачи для уравнения Штурма–Лиувилля (0.5). Учитывая вид функции $G(x, t)$, и действуя как прежде, получим $\dot{\lambda}_n(t) = 0$. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Если мы вместо $q(x, t)$ рассмотрим $q(x + \tau, t)$, то собственные значения периодической и антипериодической задачи не зависят от параметров τ и t, а собственные значения ξ_n задачи Дирихле и знаки σ_n зависят от τ и t: $\xi_n = \xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n = \sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \geqslant 1$. В этом случае, система* (2.1) *примет вид*

$$\begin{gathered}\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^{n+1} \sigma_n(\tau, t) \left\{ \frac{1}{2\xi_n} p^2(\tau, t) + \int_0^{\infty} \frac{s(\pi, \lambda, t, \tau)\beta(\lambda, t)}{\lambda - \xi_n} d\lambda \right\} \times \\ \times \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \times \sqrt{(\xi_n - \lambda_0) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}, \qquad n \geqslant 1.\end{gathered} \tag{2.10}$$

Здесь

$$s(\pi, \lambda, t, \tau) = \pi \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k(t, \tau) - \lambda}{k^2}.$$

Учитывая формулы следов

$$q(\tau, t) = -\lambda_0 - \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau, t)), \tag{2.11}$$

$$\begin{gathered}p^2(\tau, t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\tau} \frac{\partial \xi_k(s, t)}{\partial t} ds + 2 \int_0^{\infty} \beta(\lambda, t) s(\pi, \lambda, t) d\lambda - \\ - 2 \int_0^{\infty} \beta(\lambda, t) s(\pi, \lambda, t) \left(\psi_+(\tau, \lambda, t) \cdot \psi_-(\tau, \lambda, t)\right) d\lambda + p_0^2(t).\end{gathered} \tag{2.12}$$

Следствие 2. *Эта теорема дает метод решения задачи* (0.3)–(0.4). *Действительно, обозначим через* λ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t)$, $n = 1, 2, \ldots$, *спектральные данные задачи*

$$-y'' + (-q(x + \tau, t))y = \lambda\, y, \quad x \in R^1.$$

Найдем спектральные данные λ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n = 1, 2, \ldots$, для уравнения

$$-y'' + (-q_0(x + \tau))y = \lambda y, \quad x \in R^1.$$

Решаем задачу Коши $\xi_n(\tau, t)\,|_{t=0} = \xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n(\tau, t)\,|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau)$, $n = 1, 2, \ldots$, для системы уравнений Дубровина (2.10). По формуле следов (2.11) находим решение $q(x, t)$ задачи (0.3)–(0.4), после чего из (1.2) определяем решения Флоке $\psi_\pm(x, \lambda, t)$, и затем из формулы (2.12) определяем $p^2(x, t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Method for solving the Korteweg–de Vries equation // Physical Review Letters. 1967. Vol. 19. Issue 19. P. 1095–1097. http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1095
2. Новиков С. П. Периодическая задача Кортевега–де Фриза. I. // Функциональный анализ и его приложения. 1974. Т. 8. Вып. 3. С. 54–66. http://mi.mathnet.ru/faa2358
3. Дубровин Б. А., Новиков С. П. Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега–де Фриза // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1974. Т. 67. № 6. С. 2131–2143.
4. Марченко В. А. Периодическая задача Кортевега–де Фриса // Математический сборник (новая серия). 1974. Т. 95 (135). № 3 (11). С. 331–356. http://mi.mathnet.ru/msb3757
5. Дубровин Б. А. Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза в классе конечнозонных потенциалов // Функциональный анализ и его приложения. 1975. Т. 9. Вып. 3. С. 41–51. http://mi.mathnet.ru/faa2261
6. Итс А. Р., Матвеев В. Б. Операторы Шрёдингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриса // Теоретическая и математическая физика. 1975. Т. 23. № 1. С. 51–68. http://mi.mathnet.ru/tmf3750
7. Lax P. D. Periodic solutions of the KdV equations // Nonlinear wave motion. Providence: AMS, 1974. P. 85–96. https://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0344645
8. Lax P. D. Periodic solutions of the KdV equation // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1975. Vol. 28. Issue 1. P. 141–188. https://doi.org/10.1002/cpa.3160280105
9. Мельников В. К. Метод интегрирования уравнения Кортевега–де Вриса с самосогласованным источником. Препринт № 2-88-11/798. Дубна: ОИЯИ, 1988. https://s3.cern.ch/inspire-prod-files-d/d3b9e5b61499cfe7675c6be753aeca7c
10. Leon J., Latifi A. Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves // Journal of Physics A: Mathematical and General. 1990. Vol. 23. No. 8. P. 1385–1403. https://doi.org/10.1088/0305-4470/23/8/013
11. Уразбоев Г. У., Хасанов А. Б. Интегрирование уравнения Кортевега–де Фриза с самосогласованным источником при начальных данных типа «ступеньки» // Теоретическая и математическая физика. 2001. Т. 129. № 1. С. 38–54. https://doi.org/10.4213/tmf518
12. Хасанов А. Б., Уразбоев Г. У. Интегрирование общего уравнения КдФ с правой частью в классе быстроубывающих функций // Узбекский математический журнал. 2003. № 2. С. 53–59.
13. Хасанов А. Б., Яхшимуратов А. Б. Об уравнении Кортевега–де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций // Теоретическая и математическая физика. 2010. Т. 164. № 2. С. 214–221. https://doi.org/10.4213/tmf6535
14. Bondarenko N., Freiling G., Urazboev G. Integration of the matrix KdV equation with self-consistent sources // Chaos, Solitons and Fractals. 2013. Vol. 49. P. 21–27. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2013.02.010

15. Яхшимуратов А. Б., Хасанов М. М. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 4. С. 536–543. https://doi.org/10.1134/S0374064114040116
16. Хасанов А. Б., Хоитметов У. А. Интегрирование общего нагруженного уравнения Кортевега–де Фриза с интегральным источником в классе быстроубывающих комплекснозначных функций // Известия высших учебных заведений. Математика. 2021. № 7. С. 52–66. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-7-52-66
17. Хасанов А. Б., Хасанов М. М. Интегрирование нелинейного уравнения Шрёдингера с дополнительным членом в классе периодических функций // Теоретическая и математическая физика. 2019. Т. 199. № 1. С. 60–68. https://doi.org/10.4213/tmf9581
18. Яхшимуратов А. Б., Матёкубов М. М. Интегрирование нагруженного уравнения Кортевега–де Фриза в классе периодических функций // Известия высших учебных заведений. Математика. 2016. № 2. С. 87–92. http://mi.mathnet.ru/ivm9085
19. Babadjanova A., Kriecherbauer T., Urazboev G. The periodic solutions of the discrete modified KdV equation with a self-consistent source // Applied Mathematics and Computation. 2020. Vol. 376. 125136. http://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125136
20. Urazboev G. U., Babadjanova A. K., Saparbaeva D. R. Integration of the Harry Dym equation with an integral type source // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. 2021. Vol. 31. Issue 2. P. 285–295. https://doi.org/10.35634/vm210209
21. Verosky J. M. Negative powers of Olver recursion operators // Journal of Mathematical Physics. 1991. Vol. 32. Issue 7. P. 1733–1736. https://doi.org/10.1063/1.529234
22. Lou S. Symmetries of the KdV equation and four hierarchies of the integrodifferential KdV equations // Journal of Mathematical Physics. 1994. Vol. 35. Issue 5. P. 2390–2396. http://doi.org/10.1063/1.530509
23. Degasperis A., Procesi M. Asymptotic integrability // Symmetry and perturbation theory. Singapore: World Scientific, 1999. P. 23–37.
24. Zhang G., Qiao Z. Cuspons and smooth solitons of the Degasperis–Procesi equation under inhomogeneous boundary condition // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. 2007. Vol. 10. Issue 3. P. 205–225. https://doi.org/10.1007/s11040-007-9027-2
25. Qiao Z., Fan E. Negative-order Korteweg–de Vries equations // Physical Review E. 2012. Vol. 86. Issue 1. 016601. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.016601
26. Chen J. Quasi-periodic solutions to a negative-order integrable system of 2-component KdV equation // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2018. Vol. 15. Issue 3. 1850040. https://doi.org/10.1142/S0219887818500408
27. Qiao Z., Li J. Negative-order KdV equation with both solitons and kink wave solutions // Europhysics Letters. 2011. Vol. 94. No. 5. 50003. https://doi.org/10.1209/0295-5075/94/50003
28. Zhao S., Sun Y. A discrete negative order potential Korteweg–de Vries equation // Zeitschrift für Naturforschung A. 2016. Vol. 71. Issue 12. P. 1151–1158. https://doi.org/10.1515/zna-2016-0324
29. Rodriguez M., Li J., Qiao Z. Negative order KdV equation with no solitary traveling waves // Mathematics. 2022. Vol. 10. No. 1. Article 48. https://doi.org/10.3390/math10010048
30. Wazwaz A.-M. Negative-order KdV equations in (3+1) dimensions by using the KdV recursion operator // Waves in Random and Complex Media. 2017. Vol. 27. Issue 4. P. 768–778. https://doi.org/10.1080/17455030.2017.1317115
31. Kuznetsova M. Necessary and sufficient conditions for the spectra of the Sturm–Liouville operators with frozen argument // Applied Mathematics Letters. 2022. Vol. 131. 108035. https://doi.org/10.1016/j.aml.2022.108035
32. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 2. М.: ИЛ, 1961.
33. Magnus W., Winkler W. Hill's equation. New York: Interscience Publishers, 1966.
34. Станкевич И. В. Об одной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла // Доклады Академии наук СССР. 1970. Т. 192. № 1. С. 34–37. http://mi.mathnet.ru/dan35384
35. Марченко В. А., Островский И. В. Характеристика спектра оператора Хилла // Математический сборник (новая серия). 1975. Т. 97 (139). № 4 (8). С. 540–606. http://mi.mathnet.ru/msb3807

36. Trubowitz E. The inverse problem for periodic potentials // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1977. Vol. 30. Issue 3. P. 321–337. https://doi.org/10.1002/cpa.3160300305
37. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 28.03.2022

Принята к публикации 28.05.2022

Уразбоев Гайрат Уразалиевич, д. ф.-м. н., Ургенчский государственный университет, 220100, Узбекистан, г. Ургенч, ул. Х. Алимджан, 14.
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7420-2516
E-mail: gayrat71@mail.ru

Хасанов Музаффар Машарипович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Ургенчский государственный университет, 220100, Узбекистан, г. Ургенч, ул. Х. Алимджан, 14.
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2347-1484
E-mail: hmuzaffar@mail.ru

Цитирование: Г. У. Уразбоев, М. М. Хасанов. Интегрирование уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 2. С. 228–239.

MATHEMATICS 2022. Vol. 32. Issue 2. Pp. 228–239.

G. U. Urazboev, M. M. Hasanov

Integration of the negative order Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions

Keywords: negative-order KdV, self-consistent source, inverse spectral problem.

MSC2020: 35P25, 35P30, 35Q51, 35Q53, 37K15

DOI: 10.35634/vm220205

In this paper, we consider the negative order Korteweg–de Vries equation with a self-consistent integral source. It is shown that the negative-order Korteweg–de Vries equation with a self-consistent integral source can be integrated by the method of the inverse spectral problem. The evolution of the spectral data of the Sturm–Liouville operator with a periodic potential associated with the solution of the negative order Korteweg–de Vries equation with a self-consistent integral source is determined. The obtained results make it possible to apply the inverse problem method to solve the negative order Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions.

REFERENCES

1. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Method for solving the Korteweg–de Vries equation, *Physical Review Letters*, 1967, vol. 19, issue 19, pp. 1095–1097. http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1095
2. Novikov S. P. The periodic problem for the Korteweg–de Vries equation, *Functional Analysis and Its Applications*, 1974, vol. 8, issue 3, pp. 236–246. https://doi.org/10.1007/BF01075697
3. Dubrovin B. A., Novikov S. P. Periodic and conditionally periodic analogs of the many-soliton solutions of the Korteweg–de Vries equation, *Soviet Physics — JETP*, 1975, vol. 40, no. 6, pp. 1058–1063.
4. Marchenko V. A. The periodic Korteweg–de Vries problem, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1974, vol. 24, issue 3, pp. 319–344. http://doi.org/10.1070/SM1974v024n03ABEH002189
5. Dubrovin B. A. Periodic problems for the Korteweg–de Vries equation in the class of finite band potentials, *Functional Analysis and Its Applications*, 1975, vol. 9, issue 3, pp. 215–223. https://doi.org/10.1007/BF01075598
6. Its A. R., Matveev V. B. Schrödinger operators with finite-gap spectrum and N-soliton solutions of the Korteweg–de Vries equation, *Theoretical and Mathematical Physics*, 1975, vol. 23, issue 1, pp. 343–355. https://doi.org/10.1007/BF01038218
7. Lax P. Periodic solutions of the KdV equations, *Nonlinear wave motion*, Providence: AMS, 1974, pp. 85–96. https://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0344645
8. Lax P D. Periodic solutions of the KdV equation, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1975, vol. 28, issue 1, p. 141–188. https://doi.org/10.1002/cpa.3160280105
9. Mel'nikov V. K. *Metod integrirovaniya uravneniya Kortevega–de Vrisa s samosoglasovannym istochnikom* (A method for integrating the Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source), Preprint no. 2-88-11/798. Dubna: Joint Institute for Nuclear Research, 1988. https://s3.cern.ch/inspire-prod-files-d/d3b9e5b61499cfe7675c6be753aeca7c
10. Leon J., Latifi A. Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1990, vol. 23, no. 8, pp. 1385–1403. https://doi.org/10.1088/0305-4470/23/8/013
11. Urasboev G. U., Khasanov A. B. Integrating the Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source and "steplike" initial data, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2001, vol. 129, no. 1, pp. 1341–1356. https://doi.org/10.1023/A:1012463310382
12. Khasanov A. B., Urazboev G. U. Integration of the general KdV equation with the right hand side in the class of rapidly decreasing functions, *Uzbek Mathematical Journal*, 2003, no. 2, pp. 53–59.

13. Khasanov A. B., Yakhshimuratov A. B. The Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2010, vol. 164, issue 2, pp. 1008–1015. https://doi.org/10.1007/s11232-010-0081-8
14. Bondarenko N., Freiling G., Urazboev G. Integration of the matrix KdV equation with self-consistent sources, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2013, vol. 49, pp. 21–27. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2013.02.010
15. Yakhshimuratov A. B., Khasanov M. M. Integration of the modified Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions, *Differential Equations*, 2014, vol. 50, issue 4, pp. 533–540. https://doi.org/10.1134/S0012266114040119
16. Khasanov A. B., Hoitmetov U. A. Integration of the general loaded Korteweg–de Vries equation with an integral type source in the class of rapidly decreasing complex-valued functions, *Russian Mathematics*, 2021, vol. 65, issue 7, pp. 43–57. https://doi.org/10.3103/S1066369X21070069
17. Hasanov A. B., Hasanov M. M. Integration of the nonlinear Schrödinger equation with an additional term in the class of periodic functions, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2019, vol. 199, issue 1, pp. 525–532. https://doi.org/10.1134/S0040577919040044
18. Yakhshimuratov A. B., Matyokubov M. M. Integration of a loaded Korteweg–de Vries equation in a class of periodic functions, *Russian Mathematics*, 2016, vol. 60, issue 2, pp. 72–76. https://doi.org/10.3103/S1066369X16020110
19. Babadjanova A., Kriecherbauer T., Urazboev G. The periodic solutions of the discrete modified KdV equation with a self-consistent source, *Applied Mathematics and Computation*, 2020, vol. 376, 125136. http://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125136
20. Urazboev G. U., Babadjanova A. K., Saparbaeva D. R. Integration of the Harry Dym equation with an integral type source, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 2, pp. 285–295. https://doi.org/10.35634/vm210209
21. Verosky J. M. Negative powers of Olver recursion operators, *Journal of Mathematical Physics*, 1991, vol. 32, issue 7, pp. 1733–1736. https://doi.org/10.1063/1.529234
22. Lou S. Symmetries of the KdV equation and four hierarchies of the integrodifferential KdV equations, *Journal of Mathematical Physics*, 1994, vol. 35, issue 5, pp. 2390–2396. http://doi.org/10.1063/1.530509
23. Degasperis A., Procesi M. Asymptotic integrability, *Symmetry and perturbation theory*, Singapore: World Scientific, 1999, pp. 23–37.
24. Zhang G., Qiao Z. Cuspons and smooth solitons of the Degasperis–Procesi equation under inhomogeneous boundary condition, *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, 2007, vol. 10, issue 3, pp. 205–225. https://doi.org/10.1007/s11040-007-9027-2
25. Qiao Z., Fan E. Negative-order Korteweg–de Vries equations, *Physical Review E*, 2012, vol. 86, issue 1, 016601. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.016601
26. Chen J. Quasi-periodic solutions to a negative-order integrable system of 2-component KdV equation, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2018, vol. 15, issue 3, 1850040. https://doi.org/10.1142/S0219887818500408
27. Qiao Z., Li J. Negative-order KdV equation with both solitons and kink wave solutions, *Europhysics Letters*, 2011, vol. 94, no. 5, 50003. https://doi.org/10.1209/0295-5075/94/50003
28. Zhao S., Sun Y. A discrete negative order potential Korteweg–de Vries equation, *Zeitschrift für Naturforschung A*, 2016, vol. 71, issue 12, pp. 1151–1158. https://doi.org/10.1515/zna-2016-0324
29. Rodriguez M., Li J., Qiao Z. Negative order KdV equation with no solitary traveling waves, *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 1, article 48. https://doi.org/10.3390/math10010048
30. Wazwaz A.-M. Negative-order KdV equations in (3+1) dimensions by using the KdV recursion operator, *Waves in Random and Complex Media*, 2017, vol. 27, issue 4, pp. 768–778. https://doi.org/10.1080/17455030.2017.1317115
31. Kuznetsova M. Necessary and sufficient conditions for the spectra of the Sturm–Liouville operators with frozen argument, *Applied Mathematics Letters*, 2022, vol. 131, 108035. https://doi.org/10.1016/j.aml.2022.108035
32. Titchmarsh E. C. *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations.*

Part 2, London: Oxford University Press, 1958.
33. Magnus W., Winkler W. *Hill's equation*, New York: Interscience Publishers, 1966.
34. Stankevich I. V. A certain inverse spectral analysis problem for Hill's equation, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1970, vol. 192, no. 1, pp. 34–37. http://mi.mathnet.ru/eng/dan35384
35. Marchenko V. A., Ostrovskii I. V. A characterization of the spectrum of Hill's operator, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1975, vol. 26, no. 4, pp. 493–554. http://doi.org/10.1070/SM1975v026n04ABEH002493
36. Trubowitz E. The inverse problem for periodic potentials, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1977, vol. 30, issue 3, pp. 321–337. https://doi.org/10.1002/cpa.3160300305
37. Levitan B. M., Sargsyan I. S. *Operatory Shturma–Liuvillya i Diraka* (Sturm–Liouville and Dirac operators), Moscow: Nauka, 1988.

Received 28.03.2022

Accepted 28.05.2022

Gayrat Urazalievich Urazboev, Doctor of Physics and Mathematics, Urgench State University, ul. Kh. Alimdjan, 14, Urgench, 220100, Uzbekistan.
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7420-2516
E-mail: gayrat71@mail.ru

Muzaffar Masharipovich Hasanov, Candidate of Physics and Mathematics, Urgench State University, ul. Kh. Alimdjan, 14, Urgench, 220100, Uzbekistan.
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2347-1484
E-mail: hmuzaffar@mail.ru

Citation: G. U. Urazboev, M. M. Hasanov. Integration of the negative order Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 2, pp. 228–239.