

УДК 521.92, 517.928.7

© П. С. Красильников

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕЦЕССИИ ЭКЗОПЛАНЕТЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННЫХ МОМЕНТОВ ТРЕХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ЭВОЛЮЦИИ ОРБИТЫ СПУТНИКА

Исследуется нерезонансная эволюция угла наклона оси вращения гипотетической экзо-Земли в гравитационном поле звезды, спутника планеты (экзо-Луны) и внешней планеты (экзо-Юпитера). Считаем, что экзо-Земля является динамически симметричным твердым телом ($A = B$), эллипсоид инерции которого близок к сфере. Полагаем также, что обе планеты движутся по кеплеровским эллипсам вокруг звезды. Траектория спутника — эволюционирующий эллипс с фокусом в экзо-Земле: эволюционирует долгота восходящего узла орбиты спутника на плоскости «эклиптики» и аргумент перигентра.

В предположении, что частоты орбитального эллиптического движения есть величины порядка единицы, получены канонические усредненные уравнения возмущенных колебаний оси вращения экзо-Земли, содержащие параметры, медленно меняющиеся со временем. В предположении, что массы планет малы по сравнению с массой звезды, получены в первом приближении метода малого параметра упрощенные уравнения колебаний оси вращения планеты. Интеграция этих уравнений дает явную зависимость угла наклона оси вращения экзо-Земли от времени. Показано, что гравитационные моменты от внешней планеты формируют вековую, долгопериодическую моду колебаний с частотой, равной частоте невозмущенной прецессии оси собственного вращения экзо-Земли. Влияние экзо-Луны сводится к появлению короткопериодических гармоник с частотой, близкой к частоте прецессии долготы восходящего узла орбиты экзо-Луны.

Проведены расчеты для двух экзопланетных систем: для системы, подобной Солнечной, и для планетной системы 7 Canis Majoris. Описан эффект дестабилизации (стабилизации) колебаний по углу нутации оси вращения экзо-Земли под действием гравитационных моментов от экзо-Луны и экзо-Юпитера.

Ключевые слова: угол наклона оси вращения планеты, экзопланетная система, усредненные уравнения, эффект дестабилизации.

DOI: [10.35634/vm220210](https://doi.org/10.35634/vm220210)

Введение

Известно, что жизнь на планете зависит от ряда факторов. Одним из таких факторов является наклон оси вращения планеты к плоскости ее орбиты [1–5]. Небольшой наклон приводит к появлению времен года и обеспечивает плавное распределение температуры по земному шару. Небольшие периодические изменения в угле наклона приводят к ледниковым периодам с циклами в 3000–4000 лет [6–8], при углах наклона в 90 градусов невозможна жизнь на Земле [9]. Поэтому исследованию наклона оси Земли (экзопланеты), его влиянию на климат планеты посвящены работы многих исследователей [10–12]. К примеру, известны результаты численного исследования прецессии Земли, изменения ее угла нутации, инсоляции поверхности Земли [13–15], в которой отмечается «стабилизирующая» роль Луны, так как Луна резко уменьшает амплитуду нутационных колебаний Земли, вызванных эволюцией орбиты Земли, и стабилизирует угол нутации в окрестности 23,5 градусов. В то же время исследования, проведенные в работе [16], указывают на то, что влияние спутника планеты, отличной от Земли, может быть как стабилизирующим, так и дестабилизирующим.

В статье [17] исследуется влияние больших планет на изменение эксцентриситета орбиты Земли и влияние его на климат Земли. Статьи [18, 19] посвящены исследованиям нутационных колебаний оси собственных вращений Сатурна под действием гравитационных моментов от Солнца с учетом резонансных воздействий со стороны Нептуна. В работе [20] предлагается альтернативная модель исследования прецессии Сатурна под действием гравитационных моментов от Солнца, Юпитера и спутников планеты: показано, что возмущения от Юпитера вносят основной вклад в эволюцию угла нутации Сатурна. Отметим также статью [22], в которой получены асимптотические формулы для колебаний по углу нутации и углу прецессии планеты в планетной нерезонансной задаче многих тел для случая «быстрых орбитальных движений» небесных тел (базисные частоты таких движений рассматриваются как величины порядка единицы). Отметим, что в этих исследованиях используется, как правило, метод усреднения, находящий широкое применение в задачах небесной механики, см. к примеру, [23, 24, 26, 29, 30].

Цель статьи — получить асимптотические формулы, описывающие колебания по углу нутации оси вращения экзo-Земли под действием гравитационных моментов от массивной звезды, массивного спутника экзo-Земли (экзo-Луны) и внешней планеты (экзo-Юпитера) при условии эволюции кеплеровских элементов орбиты спутника по лунному типу, когда эволюционирует долгота восходящего узла и аргумент перицентра орбиты. Эта задача отличается от исследованной ранее (см. [22]): пропадают некоторые из первых интегралов усредненных уравнений вращения. Как следствие, меняется топология вращений, меняются методы исследований.

Отметим, что исследованию вращений небесных тел с учетом эволюции орбиты посвящены многие работы. В пионерской работе [25] дано аналитическое описание второго и третьего законов Кассини во вращении Луны на эволюционирующей орбите при условии, что Луна находится в гравитационном поле одного притягивающего центра (Земли) и отсутствуют резонансы. В статье [26] показано, что равновесия Кассини (положения равновесия оси вращения Луны во вращающейся перигейной системе координат) представляют собой предельные равновесия под действием приливных моментов трения. Статья [27] посвящена исследованию топологии нерезонансных движений вектора кинетического момента Луны на небесной сфере на эволюционирующей орбите, описана связь этих результатов с законами Кассини. Исследования на эту же тему были проведены независимо в работе [28]. В монографии [29] исследованы законы Кассини с учетом резонанса 1:1.

Есть цикл работ, в которых законы Кассини применяются для исследований вращений некоторых планет солнечной системы. Так, на основе работы [25] были исследованы колебания угла наклона оси вращения Сатурна, ее равновесия Кассини с учетом эволюции орбиты Сатурна под действием резонансного притяжения Нептуна [18, 19]. В статье [30] малые колебания оси вращения Меркурия в окрестности первого равновесия Кассини используются для определения некоторых качественных характеристик структуры ядра Меркурия.

Исследование колебаний планеты под действием гравитационных моментов от звезды и спутника планеты с учетом эволюции орбиты спутника (экзo-Луны) имеют более сложный характер, отличный от законов Кассини. Таковой является задача о лунно-солнечной прецессии оси собственного вращения Земли. Впервые эту задачу исследовал Тиссеран [31]. Подробное описание задачи с учетом не только эволюции орбиты Луны, но и эволюции орбиты Земли (медленно меняется со временем эксцентриситет орбиты Земли) содержится также в монографии Смарта [32]. В монографии [29] задача исследована методом усреднения, впервые получены первые интегралы усредненных уравнений, описана топология движений вектора кинетического момента Земли. Отметим только, что критические углы наклона i ([33–35]), при которых наблюдается эволюция эксцентриситета

орбиты Луны ($e \rightarrow 1$), требуют отдельных исследований.

Задачу о вращении планеты под действием трех гравитационных моментов от звезды, спутника планеты и внешней планеты с учетом эволюции орбиты спутника мы рассматриваем в общей небесно-механической постановке. Она обладает достоинствами: результаты исследований можно применить как к планетам солнечной системы, так и к экзопланетам, находящимся за пределами солнечной системы, если будут известны массово-инерционные характеристики этих планет и параметры их орбитального движения. Небесно-механическая постановка задачи позволит исследовать общие закономерности вращения планеты в рамках принятой модели, избегая частности, которыми обременены, подчас, исследования вращений планет солнечной системы.

§ 1. Постановка задачи

Итак, рассмотрим небесно-механическую модель — планетную задачу четырех тел, одно из которых — твердое тело (обозначим его как экзо-Землю), остальные тела — материальные точки (звезда, спутник планеты и внешняя планета). Исследуем прецессию экзо-Земли под действием гравитационных моментов от звезды, спутника и внешней планеты (экзо-Юпитера). Считаем, что исследуемая планета является динамически-симметричным телом с главными центральными моментами инерции $A = B \neq C$.

Предположим, что масса m_1 звезды превалирует над массой m исследуемой экзо-Земли, массой m_2 спутника (экзо-Луны) и массой m_3 внешней планеты (экзо-Юпитера). Задачу рассмотрим в ограниченной постановке, предполагая, что взаимные расстояния между экзо-Землей и внешними планетами существенно больше характерных размеров исследуемой планеты. Тогда вращение самой планеты не влияет на движение ее центра масс. Будем считать также, что внешняя планета и экзо-Земля движутся по кеплеровским эллипсам с фокусом в звезде и со средними частотами ω_3 и ω соответственно. Такое допущение естественно для внешней планеты, так как она находится на значительном удалении как от звезды, так и от экзо-Земли, поэтому возмущения в кеплеровских элементах ее орбиты дают пренебрежимо малый вклад в силовую функцию задачи. Однако этого нельзя сказать о кеплеровских элементах орбиты самой экзо-Земли, так как близость массивного спутника усиливает влияние эволюции этих элементов. Тем не менее, мы пренебрегаем медленным изменением элементов орбиты экзо-Земли, планируя исследовать их влияние в будущем.

Введем инерциальную систему координат $OXYZ$ с началом O , расположенным в звезде, плоскость OXY которой совпадает с плоскостью орбиты исследуемой планеты (плоскостью «эклиптики»), ось OX направим в перигей орбиты экзо-Земли, а OZ направим по нормали к плоскости OXY . В центр масс планеты поместим начало кёниговой системы координат $Mx_1y_1z_1$, направление осей которой совпадает с направлением осей абсолютной системы координат $OXYZ$, $Mxyz$ — подвижные оси, направленные по главным центральным осям инерции планеты. Для описания вращения планеты воспользуемся каноническими переменными Депри–Андуайе $l, \varphi_2, \varphi_3, L, I_2, I_3$, которые задают ориентацию системы координат $Mxyz$ относительно кёниговых осей $Mx_1y_1z_1$ и которые приспособлены для применения методов теории возмущений.

Вращение планеты вокруг собственного центра масс в переменных Депри–Андуайе описывается канонической системой уравнений с гамильтонианом

$$H = \frac{I_2^2 - L^2}{2A} + \frac{L^2}{2C} + \sum_{i=1}^3 U_i, \quad U_i = \frac{3\mu_i}{2R_i^3} (C - A)\gamma_i^2. \quad (1.1)$$

Здесь A, C — экваториальный и осевой моменты инерции планеты, $\mu_i = fm_i$, где f — гравитационная постоянная, R_i — расстояние между центром масс M и центром масс i -го

тяжелого тела, γ_i — косинус угла между радиус-вектором \mathbf{R}_i и осью вращения планеты Mz . Явные выражения для γ_i как функции переменных Депри–Андуайе опускаем (см. [21]), а радиус-вектор \mathbf{R}_i имеет следующий вид:

$$R_i = (R_{iX}, R_{iY}, R_{iZ}), \quad R_{iX} = (X - X_i), \quad R_{iY} = (Y - Y_i), \quad R_{iZ} = (Z - Z_i),$$

где X, Y, Z ($Z = 0$) — абсолютные координаты центра масс планеты, X_i, Y_i, Z_i — абсолютные координаты центра масс i -го тела. Здесь и далее индекс $i = 1$ отвечает звезде, $i = 2$ — спутнику планеты, $i = 3$ — внешней планете. Очевидно, что $X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$.

В силу постановки задачи эти координаты являются известными функциями времени. Так, абсолютные координаты исследуемой планеты M вычисляются по формулам

$$X = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} \cos \nu, \quad Y = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} \sin \nu, \quad Z = 0, \quad (1.2)$$

где a, e, ν — большая полуось, эксцентриситет и истинная аномалия орбитального движения экзо-Земли.

Абсолютные координаты спутника планеты (материальной точки массы m_2) имеют более сложный вид, так как спутник совершает сложное движение: он движется по эволюционирующей кеплеровской орбите с фокусом в экзо-Земле, в то время как сама планета непрерывно перемещается по кеплеровскому эллипсу с фокусом в звезде. Поэтому траектория спутника описывается квазипериодической функцией времени. В дальнейших исследованиях мы будем иметь дело не с абсолютными координатами спутника, а с координатами $(X - X_2), (Y - Y_2), (Z - Z_2)$ его относительного движения по отношению к M .

Относительные координаты спутника планеты описываются формулами (см. [36])

$$\begin{aligned} X - X_2 &= \sin \Omega_2 \sin i_2 \zeta_2 + [\cos \Omega_2 \cos \varpi_2 - \sin \Omega_2 \cos i_2 \sin \varpi_2] \xi_2 - \\ &\quad - [\cos \Omega_2 \sin \varpi_2 + \sin \Omega_2 \cos i_2 \times \cos \varpi_2] \eta_2, \\ Y - Y_2 &= -\cos \Omega_2 \sin i_2 \zeta_2 + [\sin \Omega_2 \cos \varpi_2 + \cos \Omega_2 \cos i_2 \sin \varpi_2] \xi_2 + \\ &\quad + [-\sin \Omega_2 \sin \varpi_2 + \cos \Omega_2 \cos i_2 \times \cos \varpi_2] \eta_2, \\ Z - Z_2 &= \sin i_2 \sin \varpi_2 \xi_2 + \sin i_2 \cos \varpi_2 \eta_2 + \cos i_2 \zeta_2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь Ω_2 — долгота восходящего узла плоскости орбиты спутника на плоскости OXY , ϖ_2 — аргумент перицентра орбиты, i_2 — наклонение орбиты спутника к плоскости OXY ; ξ_2, η_2, ζ_2 — координаты спутника в перигейной системе координат $M\xi_2\eta_2\zeta_2$ с началом в экзо-Земле: ось $M\xi_2$ направлена в перигей орбиты спутника, ось $M\eta_2$ получим поворотом оси $M\xi_2$ в плоскости орбиты спутника на 90° в направлении его движения, ось аппликат $M\zeta_2$ направим по нормали к плоскости орбиты спутника так, чтобы оси $M\xi_2\eta_2\zeta_2$ были правоориентированы.

Координаты спутника в перигейной системе координат таковы:

$$\xi_2 = \frac{a_2(1 - e_2^2)}{1 + e_2 \cos \nu_2} \cos \nu_2, \quad \eta_2 = \frac{a_2(1 - e_2^2)}{1 + e_2 \cos \nu_2} \sin \nu_2, \quad \zeta_2 = 0. \quad (1.4)$$

Напомним, что параметры Ω_2, ϖ_2 медленно эволюционируют со временем.

Так как относительные координаты спутника планеты в его кеплеровском движении с фокусом в экзо-Земле описываются теми же формулами, что и абсолютные координаты кеплеровского движения внешней планеты с фокусом в звезде, то абсолютные координаты X_3, Y_3, Z_3 внешней планеты и ее перигейные координаты вычисляются по формулам (1.3), (1.4) соответственно с условием замены нижнего индекса 2 на 3.

§ 2. Нерезонансные вращения экзо-Земли в отсутствии эволюции орбиты спутника

Нерезонансные вращения планеты в ограниченной задаче N тел в отсутствии медленной эволюции траекторий небесных тел, входящих в систему, описаны в статьях [22, 37, 38]. Причем в статье [22] основное внимание уделяется планетной системе, получены явные асимптотические формулы колебаний по углу нутации и углу прецессии оси вращения исследуемой планеты при условии, что планета не имеет спутников. В монографии [21] описаны резонансные и нерезонансные вращения космического аппарата в ограниченной задаче трех тел.

Обобщим исследования статьи [22], учитывая гравитационные моменты от спутника, тем более, что эти результаты понадобятся в дальнейшем. Предположим, что эллипсоид планеты близок к сфере, т. е. $C = J_0 + \varepsilon C_1$, $A = J_0 + \varepsilon A_1$, где $\varepsilon \ll 1$, J_0 — момент инерции тела сферической структуры. Раскладывая функцию Гамильтона задачи в ряд по ε , получим

$$H = \frac{I_2^2}{2J_0} + \varepsilon H_1 + o(\varepsilon),$$

$$H_1 = -\frac{1}{2J_0^2} [L^2 C_1 + (I_2^2 - L^2) A_1] + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{R_i^3} (C_1 - A_1) \gamma_i^2, \quad \mu_i = f m_i.$$

Функция H_1 содержит силовые функции гравитационного воздействия со стороны звезды, спутника планеты и внешней планеты, f — универсальная гравитационная постоянная. Из уравнений Гамильтона следует, что φ_2 ($\dot{\varphi}_2 \sim I_2/J_0$) есть быстрая переменная вращательных движений, в то время как $l, \varphi_3, L, I_2, I_3$ — медленные переменные. Считаем, что в системе отсутствуют резонансы между частотами $\omega, \omega_i, I_2/J_0$ ($i = 2, 3$), где ω — среднее движение планеты, ω_2 — частота орбитального движения спутника относительно экзо-Земли, ω_3 — частота орбитального движения внешней планеты. Заметим, что частота ω_1 орбитального движения звезды равна нулю. Предполагаем также, что частоты $\omega, \omega_2, \omega_3$ — величины порядка единицы (рассматриваем «быстрые» орбитальные движения небесных тел).

После усреднения по быстрым переменным $\theta = \omega t, \theta_2 = \omega_2 t, \theta_3 = \omega_3 t$ орбитальных движений и переменной φ_2 вращательного движения приходим к разделению по канонически сопряженным переменным в усредненном гамильтониане (см. [22], где описано аналогичное разделение движений в случае отсутствия спутника экзо-Земли):

$$\begin{aligned} \bar{H}_1 &= F(I_2, L, l)G(I_2, I_3, \varphi_3), \\ F(I_2, L, l) &= -(C_1 - A_1) \left(\frac{2}{3} - \sin^2 \delta_2 \right), \\ G &= \frac{I_2^2}{2J_0^2} + \frac{9}{4} (-D_1 \sin^2 \varphi_3 - D_2 \cos^2 \varphi_3 + D_3 + D_4 \sin 2 \varphi_3) \sin^2 \delta_1 - \\ &\quad - \sin 2 \delta_1 (D_5 \sin \varphi_3 - D_6 \cos \varphi_3), \quad \cos \delta_1 = \frac{I_3}{I_2}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Угол нутации δ_1 и угол прецессии φ_3 задают ориентацию вектора кинетического момента I_2 , практически совпадающего с осью вращения планеты, в поступательно движущемся пространстве $Mx_1y_1z_1$, связанном с центром масс планеты. Угол φ_3 отсчитывается от оси Mx_1 , параллельной оси OX абсолютной системы координат.

Параметры D_i являются функционалами на множестве квазипериодических орбит спутника, внешней планеты (экзо-Юпитера) и самой экзо-Земли. Они таковы:

$$D_k = D_k^{(1)} + D_k^{(2)} + D_k^{(3)} \quad (k = 1, \dots, 6), \tag{2.2}$$

где

$$\begin{aligned} D_1^{(i)} &= \mu_i D_{iX^2}, & D_2^{(i)} &= \mu_i D_{iY^2}, & D_3^{(i)} &= \mu_i D_{iZ^2}, \\ D_4^{(i)} &= \mu_i D_{iXY}, & D_5^{(i)} &= \mu_i D_{iXZ}, & D_6^{(i)} &= \mu_i D_{iYZ}, \\ D_{i\rho^2} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \frac{R_{i\rho}^2}{R_i^5} d\theta d\theta_2 d\theta_3, & D_{i\rho\nu} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \frac{R_{i\rho} R_{i\nu}}{R_i^5} d\theta d\theta_2 d\theta_3, \end{aligned}$$

ρ и ν принимают значения X, Y, Z . Отметим, что параметры $D_k^{(1)}$ обусловлены воздействием звезды, $D_k^{(2)}$ — спутником планеты, $D_k^{(3)}$ — внешней планетой (экзо-Юпитером).

При вычислении функционалов D_k удобно перейти от средних аномалий $\theta, \theta_2, \theta_3$ к истинным аномалиям ν, ν_2, ν_3 по формулам

$$\frac{d\theta}{d\nu} = \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos \nu)^2}, \quad \frac{d\theta_i}{d\nu_i} = \frac{(1 - e_i^2)^{3/2}}{(1 + e_i \cos \nu_i)^2} \quad (i = 2, 3).$$

Наиболее просто вычисляются параметры $D_k^{(1)}$, отвечающие случаю задачи двух тел «звезда–экзо-Земля». Они имеют следующий вид:

$$D_1^{(1)} = D_2^{(1)} = \frac{f m_1 (1 - e^2)^{3/2}}{2p^3}, \quad D_3^{(1)} = D_4^{(1)} = D_5^{(1)} = D_6^{(1)} = 0.$$

Несколько сложнее вычисляются параметры $D_k^{(2)}$. Полагая $\Xi = \frac{\mu_2}{2a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2}}$, учитывая выражения для $(X - X_2), (Y - Y_2), (Z - Z_2)$ (см. (1.3), (1.4)) и независимость подынтегральных выражений от ν, ν_3 , получим

$$\begin{aligned} D_1^{(2)} &= \frac{\mu_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(X - X_2)^2}{R_2^5} \frac{(1 - e_2^2)^{3/2}}{(1 + e_2 \cos \nu_2)^2} d\nu_2 = \Xi (\cos^2 \Omega_2 \sin^2 i_2 + \cos^2 i_2), \\ D_2^{(2)} &= \frac{\mu_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(Y - Y_2)^2}{R_2^5} \frac{(1 - e_2^2)^{3/2}}{(1 + e_2 \cos \nu_2)^2} d\nu_2 = \Xi (-\cos^2 \Omega_2 \sin^2 i_2 + 1), \\ D_3^{(2)} &= \frac{\mu_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(Z - Z_2)^2}{R_2^5} \frac{(1 - e_2^2)^{3/2}}{(1 + e_2 \cos \nu_2)^2} d\nu_2 = \Xi \sin^2 i_2, \\ D_4^{(2)} &= \frac{\mu_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(X - X_2)(Y - Y_2)}{R_2^5} \frac{(1 - e_2^2)^{3/2}}{(1 + e_2 \cos \nu_2)^2} d\nu_2 = \Xi \sin \Omega_2 \cos \Omega_2 \sin^2 i_2, \\ D_5^{(2)} &= \frac{\mu_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(X - X_2)(Z - Z_2)}{R_2^5} \frac{(1 - e_2^2)^{3/2}}{(1 + e_2 \cos \nu_2)^2} d\nu_2 = -\Xi \sin \Omega_2 \sin i_2 \cos i_2, \\ D_6^{(2)} &= \frac{\mu_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(Y - Y_2)(Z - Z_2)}{R_2^5} \frac{(1 - e_2^2)^{3/2}}{(1 + e_2 \cos \nu_2)^2} d\nu_2 = \Xi \cos \Omega_2 \sin i_2 \cos i_2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Параметры $D_k^{(3)}$, обусловленные влиянием внешней планеты массы m_3 , представляют собой кратные интегралы по ν, ν_3 . Они вычисляются так же, как и параметры $D_k^{(2)}$ с условием замены нижнего индекса 2 в подынтегральных выражениях на индекс 3. Однако они не имеют простого аналитического представления, поэтому явный вид этих параметров мы опускаем, тем более что параметры $D_k^{(3)}$ не содержат эволюционирующих кеплеровских элементов Ω_2, ϖ_2 орбиты спутника.

Далее, учитывая независимость \bar{H}_1 от φ_2 и времени t , имеем полный набор первых интегралов в инволюции:

$$I_2 = \text{const}, \quad F(I_2, L, l) = \text{const}, \quad \tilde{G}(I_2, I_3, \varphi_3) = \text{const}.$$

Здесь

$$\tilde{G} = (-D_1 \sin^2 \varphi_3 - D_2 \cos^2 \varphi_3 + D_3 + D_4 \sin 2\varphi_3) \sin^2 \delta_1 - \sin 2\delta_1 (D_5 \sin \varphi_3 - D_6 \cos \varphi_3). \quad (2.4)$$

Интеграл $F = \text{const}$ описывает регулярную прецессию планеты вокруг вектора кинетического момента \mathbf{I}_2 на постоянном угловом расстоянии δ_2 (для планет солнечной системы этот угол мал, им можно пренебречь). Интеграл $\tilde{G} = \text{const}$ описывает движение вектора \mathbf{I}_2 в кёниговом пространстве. Качественная картина вращений вектора \mathbf{I}_2 на небесной сфере представлена в работах [21, 37].

Эволюционные уравнения колебаний по φ_3, I_3 имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_3}{dt} &= \Lambda \frac{\partial \tilde{G}}{\partial I_3}, & \frac{dI_3}{dt} &= -\Lambda \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \varphi_3}, \\ \Lambda &= \varepsilon \frac{9}{4} F = \frac{3}{4} (A - C) (3 \cos^2 \delta_2 - 1). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Очевидно, уравнения (2.5) являются каноническими уравнениями с функцией Гамильтона $\Lambda \tilde{G}(I_3, \varphi_3)$, где $\Lambda \sim \varepsilon$.

В планетной задаче четырех тел параметры $\mu_2 = fm_2, \mu_3 = fm_3$ являются малыми, так как $m_2 \ll m_1, m_3 \ll m_1$. Поэтому постоянные параметры D_k разбиваются естественным образом на невозмущенную часть $D_k^{(1)}$ порядка единицы, задаваемую гравитационными моментами от Солнца, и возмущенную часть $D_k^* = D_k^{(2)} + D_k^{(3)}$, имеющую первый порядок малости по малым параметрам μ_2, μ_3 .

Разложим интеграл \tilde{G} уравнений (2.5) в ряд по малым параметрам μ_2, μ_3 , учитывая представление I_3 в виде ряда по этим параметрам:

$$I_3 = I_{31} + I_3^* + \dots, \quad I_3^* = \sum_{i=2}^3 \mu_i I_{3i}.$$

Здесь $I_{31} = \text{const}$ (импульс вычисляется при $\mu_2 = \mu_3 = 0$).

Принимая во внимание каноничность замены переменных $I_3, \varphi_3 \rightarrow I_3^*, \varphi_3$

$$I_3 = I_{31} + I_3^*, \quad \varphi_3 = \varphi_3,$$

получим, с точностью до членов второго порядка малости по μ_2, μ_3 и постоянных слагаемых, укороченное выражение для этого интеграла:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(I_3^*, \varphi_3) &= 2 \frac{D_1^{(1)} \cos \delta_{11} I_3^*}{I_2} + (-D_1^* \sin^2 \varphi_3 - D_2^* \cos^2 \varphi_3 + D_3^* + D_4^* \sin 2\varphi_3) \times \\ &\times \sin^2 \delta_{11} - \sin 2\delta_{11} (D_5^* \sin \varphi_3 - D_6^* \cos \varphi_3), \quad \cos \delta_{11} = \frac{I_{31}}{I_2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь угол δ_{11} — величина постоянная и представляет собой невозмущенный угол нутации оси вращения экзо-Земли в задаче двух тел (планета–звезда).

В случае $\delta_{11} \approx \pi/2$ первый член, входящий в правую часть равенства (2.6), имеет более высокий порядок малости по сравнению с остальными членами выражения (2.6). Поэтому поведение угла нутации в окрестности плоскости экватора планеты требует отдельных исследований, учитывающих влияние членов второго порядка малости по μ_2, μ_3 и выше.

§ 3. Вращения планеты с учетом эволюции орбиты спутника

Исследуем вращения экзо-Земли с учетом эволюции орбиты спутника по лунному типу, когда эволюционирует долгота восходящего узла Ω_2 и аргумент перицентра ϖ_2 орбиты:

$$\Omega_2 = \Omega_{20} + \varepsilon_1 t, \quad \varpi_2 = \varpi_{20} + \varepsilon_2 t \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1).$$

Отметим, что скорость ε_1 прецессии узла Ω_2 орбиты спутника экзо-Земли вычисляется в теории движения Луны Понтекулана [32]:

$$\varepsilon_1 = -\frac{3}{4} \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2.$$

Уточняется это выражение в теории Луны Хилла–Брауна [32]:

$$\varepsilon_1 = -\frac{3}{4} \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 + \frac{57}{32} \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^3.$$

Формулы для ε_2 мы не приводим, так как усредненные уравнения колебаний оси вращения экзо-Земли не зависят от ϖ_2 .

Усреднение по быстрым координатам поступательных и вращательных движений сохраняет разделение переменных в гамильтониане \bar{H}_1 (см. (2.1)), сохраняется величина кинетического момента планеты ($I_2 = \text{const}$), так как \bar{H}_1 не зависит от φ_2 , но при этом пропадают интегралы $F = \text{const}$, $\tilde{G} = \text{const}$ по причине зависимости усредненных уравнений от времени. Уравнения колебаний по I_3, φ_3 (см. (2.5), (2.6)) также сохраняют свой вид, при этом параметры $D_k^{(2)}$ зависят от медленно меняющейся величины $\tau = \varepsilon_1 t$. В дальнейшем полагаем $\delta_2 = 0$, поэтому $\Lambda = (3/2)(A - C) \sim \varepsilon$.

Отметим, что уравнения (2.5) совпадают, с точностью до обозначений фазовых переменных и замены силовой функции U на $\Lambda \tilde{G}$, с уравнениями колебаний оси вращения Земли под действием гравитационных моментов от Луны и Солнца (см. [32]). Смарт учитывает эволюцию долготы восходящего узла и аргумента перицентра орбиты Луны и эволюцию эксцентриситета орбиты Земли, поэтому параметры D_j в его исследованиях — медленные функции времени. Значения параметров D_j в нашем случае отличаются от аналогичных параметров Смарта в силу различия в выборе систем координат, но при этом имеет место тождественное совпадение структуры силовой функции U Смарта с силовой функцией $\Lambda \tilde{G}$ нашей задачи; мы также учитываем дополнительные гравитационные моменты от экзо-Юпитера, но пренебрегаем эволюцией эксцентриситета орбиты экзо-Земли.

Эволюция орбиты спутника планеты ведет к эволюции параметров $D_k^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_1^{(2)}(\tau) &= \Xi (\cos^2(\Omega_0 + \tau) \sin^2 i_2 + \cos^2 i_2), & \tilde{D}_2^{(2)}(\tau) &= \Xi (-\cos^2(\Omega_0 + \tau) \sin^2 i_2 + 1), \\ \tilde{D}_3^{(2)}(\tau) &= \Xi \sin^2 i_2, & \tilde{D}_4^{(2)}(\tau) &= \frac{\Xi}{2} \sin 2(\Omega_0 + \tau) \sin^2 i_2, \\ \tilde{D}_5^{(2)}(\tau) &= -\Xi \sin(\Omega_0 + \tau) \sin i_2 \cos i_2, & \tilde{D}_6^{(2)}(\tau) &= \Xi \cos(\Omega_0 + \tau) \sin i_2 \cos i_2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Отсюда сразу следует, что медленная эволюция по углу ϖ_2 не проявляет себя в первом приближении метода усреднения, так как коэффициенты (3.1) не зависят от ϖ_2 .

Преобразованная функция (2.6) примет вид

$$\tilde{G}^{(e)}(I_3^*, \varphi_3, \tau) = \tilde{G}|_{D_k^{(2)} \rightarrow \tilde{D}_k^{(2)}(\tau)}. \quad (3.2)$$

Очевидно, в отсутствии эволюции орбиты функция $\tilde{G}^{(e)}$ совпадает с функцией \tilde{G} .

После подстановки $\tilde{G}^{(e)}(I_3^*, \varphi_3, \tau)$ в равенства (2.5) получим уравнения относительно I_3^*, φ_3 . Интегрируя их, найдем изменение канонически сопряженных переменных I_3^*, φ_3 в функции времени:

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \Lambda K t + \varphi_{30}, \\ I_3^* &= \left[D_5^{(3)} \frac{\sin \varphi_3}{K} - D_6^{(3)} \frac{\cos \varphi_3}{K} - \frac{\Lambda \Xi}{2(K\Lambda - \varepsilon_1)} \cos \alpha \sin 2i_2 \right] \sin 2\delta_{11} - \\ &- \left[\frac{\Lambda \Xi}{4(K\Lambda - \varepsilon_1)} \cos 2\alpha (1 - \cos 2i_2) + \left(\frac{D_1^{(3)} - D_2^{(3)}}{2K} \cos 2\varphi_3 + \frac{D_4^{(3)}}{K} \sin 2\varphi_3 \right) \right] \sin^2 \delta_{11}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь

$$K = \frac{2D_1^{(1)} \cos \delta_{11}}{C\omega_r}, \quad \Xi = \frac{\mu_2}{2a_2^3(1 - e_2^2)^{3/2}}, \quad \alpha = (K\Lambda - \varepsilon_1)t - \Omega_{20} + \varphi_{30}. \quad (3.4)$$

Несложно видеть, что выражение

$$K\Lambda = \frac{3}{2} \frac{(A - C)}{C} \frac{\omega^2 \cos \delta_{11}}{(1 - e^2)^{3/2} \omega_r}$$

совпадает с классической формулой для частоты прецессии симметричной планеты в центральном поле тяготения. Обозначим эту частоту как ω_0 , тогда $\varphi_3 = (\omega_0 t + \varphi_{30})$. Вращение по углу φ_3 является монотонным и не зависящим от гравитационных моментов со стороны экзо-Юпитера и экзо-Луны.

Для угла нутации

$$\delta_1 = \arccos \left(\frac{I_{31} + I_3^* + \dots}{I_2} \right)$$

имеем, раскладывая эту формулу в ряд по малым параметрам μ_i , следующее выражение:

$$\delta_1 = \delta_{11} - \frac{I_3^*}{C\omega_r \sin \delta_{11}} + \dots, \quad \varphi_3 = \omega_0 t + \varphi_{30}.$$

Здесь δ_{11} есть угол наклона (угол нутации) оси планеты под действием гравитационных моментов от звезды, ω_r — угловая скорость собственного вращения планеты вокруг оси динамической симметрии, $I_2 \approx C\omega_r$, так как вектор угловой скорости планеты имеет одну превалирующую компоненту ω_r , остальные компоненты малы.

Из последних формул следует явное выражение для угла нутации как функции времени:

$$\begin{aligned} \delta_1(t) &= \delta_{11} + \frac{\cos \delta_{11}}{C\omega_r} \left[\frac{\Lambda \Xi}{(\omega_0 - \varepsilon_1)} \cos \alpha \sin 2i_2 - 2D_5^{(3)} \frac{\sin \varphi_3}{K} + 2D_6^{(3)} \frac{\cos \varphi_3}{K} \right] + \\ &+ \frac{\sin \delta_{11}}{C\omega_r} \left[\frac{\Lambda \Xi}{4(\omega_0 - \varepsilon_1)} \cos 2\alpha (1 - \cos 2i_2) + \left(\frac{D_1^{(3)} - D_2^{(3)}}{2K} \cos 2\varphi_3 + \frac{D_4^{(3)}}{K} \sin 2\varphi_3 \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из этой формулы явствует, что наблюдаются малые колебания в окрестности невозмущенного значения угла нутации $\delta_1 = \delta_{11}$, обусловленного гравитационными моментами от Солнца. Колебания являются квазипериодическими с базисными частотами ω_0 и $(\omega_0 - \varepsilon_1)$. Так как $\omega_0 \ll \varepsilon_1$, то колебания, вызванные воздействием экзо-Юпитера (гармоники с коэффициентами $D_j^{(3)}$), являются долгопериодическими, в то время, как воздействие со стороны

спутника экзo-Земли — короткопериодическое с частотой, близкой к ε_1 (см. члены, содержащие $\cos \alpha$ и $\cos 2\alpha$).

Расчеты эволюции угла нутации δ_1 проводились для значений параметров системы Земля–Луна–Солнце–экзo-Юпитер с учетом выбора астрономических единиц измерения $M_\odot = 1$, $L = 1$ а. е., $T = T_\oplus/2\pi$. Здесь M_\odot — масса Солнца, $T = T_\oplus$ — астрономический год. Большинство параметров взято с астрономических сайтов [40], из статьи [41] и приведены к астрономическим единицам.

Рассмотрим случай, когда траектории исследуемой экзo-Земли, спутника и экзo-Юпитера являются эллипсами, плоскость орбиты спутника составляет угол 5.155° с плоскостью движения экзo-Земли, наклон орбиты внешней планеты полагаем равным 45° , отсутствуют спин-орбитальные резонансы. Невозмущенный угол δ_{11} наклона оси вращения экзo-Земли считаем равным текущему наклону Земли — 23.439° . Астрономические параметры таковы:

$$\begin{aligned} \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 3.69430 \cdot 10^{-8}, \quad \mu_3 = 0.00095, \quad a = 1, \quad a_2 = 2.56956 \cdot 10^{-3}, \quad a_3 = 1.5, \\ e = 0.01671, \quad e_2 = 0.0549, \quad e_3 = 0.3, \quad i_2 = 0.08980, \quad i_3 = \pi/4, \quad \delta_{11} = 0.40909, \\ \omega = 1, \quad \omega_2 = 13.36823, \quad \Omega_3 = \pi/3, \quad \varpi_3 = \pi/4, \\ \varepsilon_1 = -0.05588, \quad (C - A) = 5.88088 \cdot 10^{-18}, \quad \omega_r = 366.24217, \quad C = 1.80516 \cdot 10^{-15}. \end{aligned}$$

Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \Xi = 1.09369, \quad K = 1.38776 \cdot 10^{12}, \quad \omega_0 = 1.22419 \cdot 10^{-5}, \quad \Lambda = -8.82132 \cdot 10^{-18}, \\ D_1^{(1)} = D_2^{(1)} = 0.5, \quad D_1^{(3)} = 2.01808 \cdot 10^{-3}, \quad D_2^{(3)} = 2.42044 \cdot 10^{-3}, \\ D_4^{(3)} = 4.74395 \cdot 10^{-4}, \quad D_5^{(3)} = 3.20035 \cdot 10^{-4}, \quad D_6^{(3)} = 1.9483 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Начальные данные: $\Omega_{20} = 0$, $\varphi_{30} = 0$.

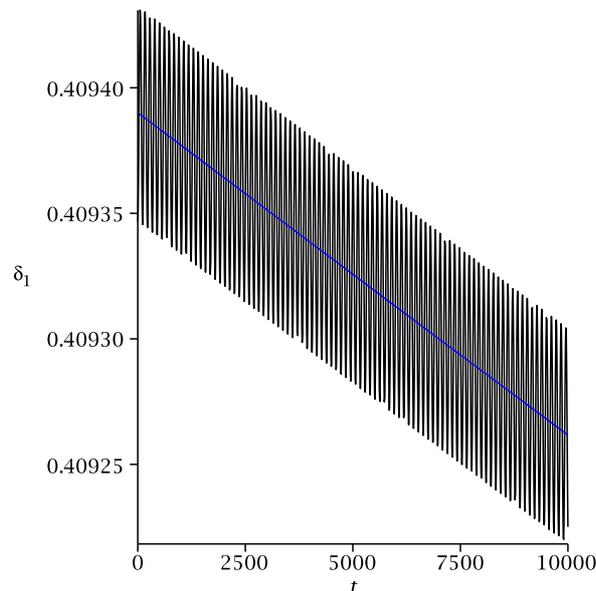


Рис. 1. Нутационные колебания экзoпланеты с учетом влияния спутника и внешней планеты

Голубая кривая — график зависимости δ_1 от времени t под воздействием внешней планеты, черная кривая описывает изменения угла нутации при совместном воздействии гравитационных моментов от внешней планеты и спутника. Таким образом, на медленную,

долгопериодическую эволюцию накладываются быстрые колебания с амплитудой порядка $5 \cdot 10^{-5}$ рад, вызванные гравитационными моментами от экзо-Луны.

Медленную, долгопериодическую эволюцию угла нутации экзо-Земли мы можем рассматривать как стабилизирующее (или дестабилизирующее) влияние экзо-Юпитера на вращение экзо-Земли. Для этого введем понятие стабилизирующего внешнего воздействия. Будем говорить, что влияние экзо-Юпитера является стабилизирующим для экзо-Земли, если угол нутации убывает, так как при малых углах нутации мы наблюдаем появление времен года и плавное распределение температуры по поверхности планеты. Возрастание этого угла ведет к усложнению динамики вращения планеты, вплоть до появления хаотических вращений ([9–14]), когда жизнь на планете становится невозможной. Поэтому возрастание угла нутации мы будем рассматривать как дестабилизирующий фактор. Помимо этого, часто наблюдаются колебания по углу нутации в окрестности его невозмущенного значения, обусловленного влиянием звезды. Если гравитационное возмущение увеличивает амплитуду этих колебаний, будем говорить об эффекте дестабилизации, в противном случае — о стабилизирующем влиянии возмущения.

Итак, на спадающих участках голубой кривой имеем уменьшение угла нутации со временем (эффект стабилизации под воздействием экзо-Юпитера), на возрастающих — увеличение этого угла (эффект дестабилизации). Возмущающие гравитационные моменты от экзо-Луны вызывают высокочастотные колебания в окрестности медленно эволюционирующего угла нутации (см. рис. 1). Поэтому влияние экзо-Луны является дестабилизирующим. Заметим, что это заключение противоречит выводам статей [13–15]. Дело в том, что здесь мы сталкиваемся с разными постановками задачи и, как следствие, имеем разные результаты. Напомню, что в цитируемых статьях Луна резко уменьшает амплитуду нутационных колебаний Земли, вызванных эволюцией орбиты Земли, и, как следствие, стабилизирует угол нутации в окрестности 23,5 градусов. Влияние Юпитера не рассматривалось в силу его малости.

Теперь заметим, что из формулы для Ξ следует, что амплитуда этих колебаний пропорциональна a_2^{-3} , поэтому с увеличением a_2 (реальная Луна медленно удаляется от Земли) дестабилизирующее влияние спутника будет уменьшаться. Отметим, что в начальный момент времени колебания наблюдаются в окрестности «возмущенного» наклона δ_{11}^* , отличного от δ_{11} ($\delta_{11}^* = 0.40939 > \delta_{11}$). Объяснения этому факту дано в статье [22].

На рис. 2 показана зависимость угла наклона δ_1 под действием моментов от спутника без учета влияния экзо-Юпитера. Такое возможно для случая плоских круговых орбит внешней планеты и круговой орбиты самой экзо-Земли: всегда имеем $D_3^{(3)} = D_4^{(3)} = D_5^{(3)} = D_6^{(3)} = 0$, $D_1^{(3)} = D_2^{(3)}$, поэтому в уравнении (3.5) исчезают члены с параметрами $D_j^{(3)}$. Расчеты проводились при указанных выше значениях параметров, при $i_3 = 0$, $e_3 = 0$, $e = 0$.

На рис. 2 пунктиром указано невозмущенное значение δ_{11} угла нутации экзо-Земли, красная кривая — график колебаний по углу нутации при $a_2 = 2.56956 \cdot 10^{-3}$, синяя кривая отвечает случаю $a_2 = 1.50 \cdot 10^{-3}$. Видно, что колебания угла наклона оси происходит в окрестности невозмущенного значения δ_{11} ; уменьшение большой полуоси орбиты спутника ведет к увеличению амплитуды колебаний, вызванных влиянием спутника планеты. Таким образом, дестабилизирующее влияние экзо-Луны возрастает при уменьшении a_2 .

Отметим также, что при $i_3 \neq 0$, $e_3 \neq 0$, $e \neq 0$ экзо-Юпитер будет оказывать влияние на вращение экзо-Земли, так как параметры $D_j^{(3)} \neq 0$. Переход от случая нулевых значений i_3 , e_3 , e к ненулевым возможен как при стабилизирующем влиянии экзо-Юпитера, так и при дестабилизирующем, в зависимости от принадлежности угла нутации «нулевого» случая к нисходящим (восходящим) участкам кривой долгопериодической эволюции угла нутации (синяя кривая на рис. 1).

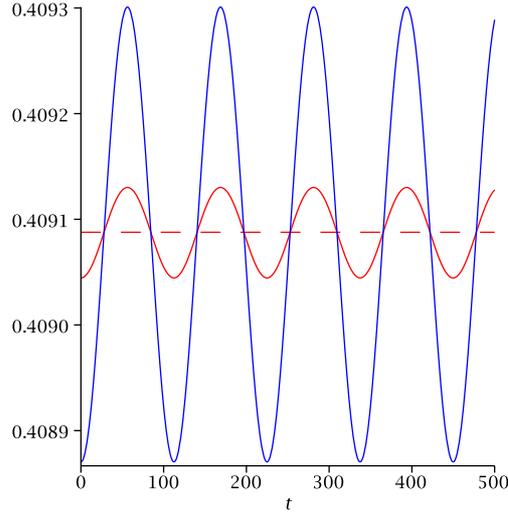


Рис. 2. Нутационные колебания экзопланеты в отсутствии влияния внешней планеты

Рассмотрим примеры планетных экзосистем. К сожалению, до сих пор не обнаружено ни одного спутника планеты в планетных системах, отличных от Солнечной. В качестве примера эволюции угла наклона δ_1 оси вращения экзo-Земли исследуем изменение этого угла для одной из двух экзопланет, входящих в планетную систему 7 Canis Majoris, постулируя наличие спутника у этой планеты при условии отсутствия спин-орбитального резонанса. Согласно каталогу экзопланет (см. [39]), параметры планет 7 Canis Majoris c, 7 Canis Majoris b, а также звезды (red giant class K1.5III-IVFe1 B) характеризуются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \mu_1 = 1.3, \quad \mu = 0.00064, \quad \mu_3 = 0.00138, \quad a = 2.153 \text{ а. е.}, \quad a_3 = 1.758 \text{ а. е.}, \\ e = 0.08, \quad e_3 = 0.06, \quad \omega = \sqrt{\mu_1 + \mu}/a^{3/2} = 0.3610, \quad \omega_3 = \sqrt{\mu_1 + \mu_3}/a_3^{3/2} = 0.4894. \end{aligned}$$

Здесь в качестве экзo-Земли выбрана планета 7 Canis Majoris c с массовым параметром μ , экзo-Юпитером считаем 7 Canis Majoris b с массовым параметром μ_3 . В качестве единиц измерения выбираем характерные значения предыдущего случая: $M_\odot = 1$, $L = 1 \text{ а. е.}$, $T = T_\oplus/2\pi = 58.13$ дней. Поэтому универсальная гравитационная постоянная f равна единице (точное значение есть $f = 0.9999195747$), следовательно, параметры $\mu_i = fm_i$ практически совпадают с массами m_i .

Параметры спутника экзo-Земли полагаем близкими к параметрам Луны:

$$\begin{aligned} \mu_2 = 4 \cdot 10^{-7}, \quad a_2 = 0.01, \quad e_2 = 0, \quad i_2 \in [0, \pi/50], \quad \omega_2 = \sqrt{\mu}/a_2^{3/2} = 25.298, \\ \varepsilon_1 = -1.527 \cdot 10^{-4}, \quad (C - A) = 5.88088 \cdot 10^{-18}, \quad \omega_r = 366.24217, \quad C = 1.80516 \cdot 10^{-15}, \end{aligned}$$

при этом, как и в предыдущем случае,

$$i_3 = \pi/4, \quad \delta_{11} = 0.40909, \quad \Omega_3 = \pi/3, \quad \varpi_3 = \pi/4.$$

На рис. 3 представлены графики нутационных колебаний экзo-Земли при разных значениях угла наклона i_2 плоскости орбиты экзo-Луны к плоскости движения экзo-Земли (плоскости эклиптики) Здесь пунктирной прямой обозначено невозмущенное значение угла нутации $\delta_1 = \delta_{11}$, черная, синяя и красная кривые отвечают углам наклона $i_2 = \pi/50, \pi/10, 2.7\pi/10$ соответственно, коричневая кривая — $i_2 = \pi/2$. Отсюда следует, что начальное увеличение угла i_2 с малых значений до $2.7\pi/10$ ведет к увеличению размаха колебаний

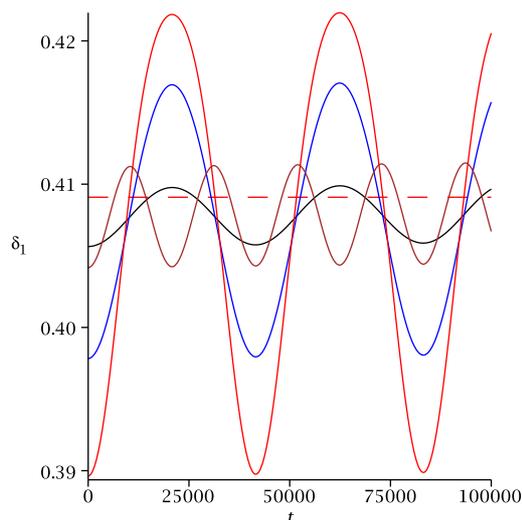


Рис. 3. Возмущенные нутационные колебания экзопланеты под действием гравитационных моментов экзo-Луны и экзo-Юпитера

$\Delta = (\max i_2 - \min i_2)$ вплоть до значений $\Delta = 0.032$ рад, последующее увеличение угла i_2 ведет к уменьшению размаха колебаний. Это значит, что максимальное дестабилизирующее влияние Луны наблюдается при $i_2 = 2.7\pi/10$, малые и большие углы наклона ведут к незначительным возмущениям в угле нутации.

Исследовано также влияние угла наклона i_3 плоскости орбиты экзo-Юпитера 7 Canis Majoris b к плоскости орбиты экзo-Земли 7 Canis Majoris c на изменения по углу нутации δ_1 . Показано, что независимо от значений угла i_3 размах колебаний по углу нутации сохраняется при фиксированных параметрах экзo-Луны.

§ 4. Заключение

Исследована нерезонансная эволюция угла наклона оси вращения осесимметричной экзo-Земли под действием гравитационных моментов от звезды, спутника планеты (экзo-Луны) и внешней планеты (экзo-Юпитера). Получена в явном виде асимптотическая формула, описывающая изменение угла нутации δ_1 со временем, когда траектории основных планет являются кеплеровскими эллипсами, в то время, как траектория экзo-Луны — эволюционирующий эллипс.

Показано, что колебания по углу нутации являются квазипериодическими с двумя базисными частотами — с частотой ω_0 невозмущенной прецессии оси вращения экзo-Земли и с частотой, равной разности частот $(\omega_0 - \varepsilon_1)$ невозмущенной прецессии оси вращения экзoпланеты и прецессии долготы восходящего узла орбиты экзo-Луны. Основной вклад внешней планеты в эволюцию угла нутации — появление долгопериодических колебаний с частотой ω_0 . Влияние экзo-Луны сводится к появлению короткопериодических гармоник с частотой близкой к частоте ε_1 прецессии долготы восходящего узла орбиты экзo-Луны (имеем $\omega_0 \ll \varepsilon_1$).

Проведены расчеты эволюционирующих колебаний по углу нутации для системы Земля–Луна–Солнце с учетом гипотетического влияния внешней планеты — экзo-Юпитера, и для экзoпланетной системы 7 Canis Majoris, состоящей из звезды (red giant) и двух экзoпланет — 7 Canis Majoris b и 7 Canis Majoris c. Показано, что влияние экзo-Луны в системе Земля–Луна–Солнце–экзo-Юпитер является дестабилизирующим, однако эффект дестабилизации уменьшается при увеличении большой полуоси орбиты экзo-Луны. Дополнительный эффект дестабилизации от гравитационных моментов спутника планеты наблюдается в систе-

ме 7 Canis Majoris: при увеличении угла наклона плоскости орбиты экзо-Луны к плоскости орбиты экзо-Земли увеличивается размах колебаний по углу нутации δ_1 вплоть до значений $i_2 = 48.6^\circ$. Дальнейшее увеличение i_2 ведет к уменьшению размаха колебаний. Стабилизирующее (дестабилизирующее) влияние внешней планеты однотипно в обеих системах: на спадающих участках вековой составляющей колебаний по углу нутации имеем стабилизирующее воздействие, на возрастающих участках — дестабилизирующее. Дополнительно обнаружено в системе 7 Canis Majoris, что угол наклона плоскости орбиты внешней планеты к плоскости орбиты экзо-Земли не влияет на размах колебаний по углу нутации.

Финансирование. Исследование выполнено в Московском авиационном институте при финансовой поддержке РНФ, проект № 22–21–00560.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Armstrong J. C., Barnes R., Domagal-Goldman S., Breiner J., Quinn T. R., Meadows V. S. Effects of extreme obliquity variations on the habitability of exoplanets // *Astrobiology*. 2014. Vol. 14. No. 4. P. 277–291. <https://doi.org/10.1089/ast.2013.1129>
2. Cowan N. B., Voigt A., Abbot D. S. Thermal phases of Earth-like planets: estimating thermal inertia from eccentricity, obliquity, and diurnal forcing // *The Astrophysical Journal*. 2012. Vol. 757. No. 1. Article 80. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/757/1/80>
3. Heller R., Leconte J., Barnes R. Tidal obliquity evolution of potentially habitable planets // *Astronomy and Astrophysics*. 2011. Vol. 528. Article 27. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201015809>
4. Ferreira D., Marshall J., O’Gorman P. A., Seager S. Climate at high-obliquity // *Icarus*. 2014. Vol. 243. P. 236–248. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2014.09.015>
5. Kilic C., Raible C. C., Stocker T. F. Multiple climate states of habitable exoplanets: The role of obliquity and irradiance // *The Astrophysical Journal*. 2017. Vol. 844. No. 2. Article 147. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aa7a03>
6. Milankovitch M. *Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf das Eiszeitenproblem*. Belgrade: Serbian Academy, 1941.
7. Williams D. M., Pollard D. Extraordinary climates of Earth-like planets: three-dimensional climate simulations at extreme obliquity // *International Journal of Astrobiology*. 2003. Vol. 2. Issue 1. P. 1–19. <https://doi.org/10.1017/S1473550403001356>
8. Drysdale R. N., Hellstrom J. C., Zanchetta G., Fallick A. E., Sánchez Goñi M. F., Couchoud I., McDonald J., Maas R., Lohmann G., Isola I. Evidence for obliquity forcing of glacial termination. II // *Science*. 2009. Vol. 325. No. 5947. P. 1527–1531. <https://doi.org/10.1126/science.1170371>
9. Williams D. M., Kasting J. F. Habitable planets with high obliquities // *Icarus*. 1997. Vol. 129. No. 1. P. 254–267. <https://doi.org/10.1006/icar.1997.5759>
10. Li G., Batygin K. On the spin-axis dynamics of a Moonless Earth // *The Astrophysical Journal*. 2014. Vol. 790. No. 1. Article 69. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/790/1/69>
11. Shan Y., Li G. Obliquity variations of habitable zone planets Kepler-62f and Kepler-186f // *The Astronomical Journal*. 2018. Vol. 155. No. 6. Article 237. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/aabfd1>
12. Quarles B., Barnes J. W., Lissauer J. J., Chambers J. Obliquity evolution of the potentially habitable exoplanet Kepler-62f // *Astrobiology*. 2020. Vol. 20. Issue 1. P. 73–90. <https://doi.org/10.1089/ast.2018.1932>
13. Laskar J., Joutel F., Boudin F. Orbital, precessional, and insolation quantities for the Earth from –20 Myr to +10 Myr // *Astronomy and Astrophysics*. 1993. Vol. 270. Nos. 1–2. P. 522–533. <https://adsabs.harvard.edu/pdf/1993A&A...270..522L>
14. Laskar J., Robutel P. The chaotic obliquity of the planets // *Nature*. 1993. Vol. 361. No. 6413. P. 608–612. <https://doi.org/10.1038/361608a0>
15. Laskar J., Joutel F., Robutel P. Stabilization the Earth’s obliquity by the Moon // *Nature*. 1993. Vol. 361. No. 6413. P. 615–617. <https://doi.org/10.1038/361615a0>

16. Quillen A. C., Chen Y.-Y., Noyelles B., Loane S. Tilting Styx and Nix but not Uranus with a spin-precession-mean-motion resonance // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2018. Vol. 130. Issue 2. Article 11. <https://doi.org/10.1007/s10569-017-9804-6>
17. Spiegel D. S., Raymond S. N., Dressing C. D., Scharf C. A., Mitchell J. L. Generalized Milankovitch cycles and long-term climatic habitability // *The Astrophysical Journal*. 2010. Vol. 721. No. 2. P. 1308–1318. <https://doi.org/10.1088/0004-637x/721/2/1308>
18. Ward W. R., Hamilton D. P. Tilting Saturn. I. Analytic model // *The Astronomical Journal*. 2004. Vol. 128. No. 5. P. 2501–2509. <https://doi.org/10.1086/424533>
19. Ward W. R., Hamilton D. P. Tilting Saturn. II. Numerical model // *The Astronomical Journal*. 2004. Vol. 128. No. 5. P. 2510–2517. <https://doi.org/10.1086/424534>
20. Красильников П. С., Амелин Р. Н. О прецессии Сатурна // *Космические исследования*. 2018. Т. 56. № 4. С. 326–336. <https://doi.org/10.31857/S002342060000348-0>
21. Красильников П. С. Вращения твердого тела относительно центра масс в ограниченной задаче трех тел. М.: МАИ, 2018.
22. Красильников П. С., Подвигина О. М. Об эволюции угла наклона оси вращения планеты в планетной системе в нерезонансном случае // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2018. Т. 28. Вып. 4. С. 549–564. <https://doi.org/10.20537/vm180408>
23. Correia A. C. M. Stellar and planetary Cassini states // *Astronomy and Astrophysics*. 2015. Vol. 582. Article 69. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201525939>
24. Lhotka C. Steady state obliquity of a rigid body in the spin-orbit resonant problem: Application to Mercury // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2017. Vol. 129. Issue 4. P. 397–414. <https://doi.org/10.1007/s10569-017-9787-3>
25. Colombo G. Cassini's second and third laws // *The Astronomical Journal*. 1966. Vol. 71. No. 9. P. 891. <https://doi.org/10.1086/109983>
26. Ward W. R. Tidal friction and generalized Cassini's laws in the solar system // *The Astronomical Journal*. 1975. Vol. 80. P. 64–70. <https://doi.org/10.1086/111714>
27. Beletskii V. V. Resonance rotation of celestial bodies and Cassini's laws // *Celestial Mechanics*. 1972. Vol. 6. No. 3. P. 356–378. <https://doi.org/10.1007/BF01231479>
28. Лидов М. Л., Нейштадт А. И. Метод канонических преобразований в задачах о вращении небесных тел и законы Кассини. 1973. Препринт № 9. ИПМ АН СССР.
29. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975.
30. Peale S. J. The proximity of Mercury's spin to Cassini state 1 from adiabatic invariance // *Icarus*. 2006. Vol. 181. Issue 2. P. 338–347. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2005.10.006>
31. Tisserand F. F. *Traité de mécanique céleste. Tome II. Théorie de la figure des corps célestes et de leur mouvement de rotation*. Paris: Gauthier-Villars et fils, 1891. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6537806n>
32. Smart W. M. *Celestial mechanics*. London–New York–Toronto: Longmans, Green and Co, 1953.
33. Krasinsky G. A. Critical inclinations in planetary problem // *Celestial Mechanics*. 1972. Vol. 6. Issue 1. P. 60–83. <https://doi.org/10.1007/bf01237448>
34. Лидов М. Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел // *Искусственные спутники Земли*. 1961. № 8. С. 5–45.
35. Лидов М. Л. О приближенном анализе эволюции орбит искусственных спутников // *Проблемы движения искусственных небесных тел*. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
36. Балк М. Б. *Элементы динамики космического полета*. М.: Наука, 1965.
37. Красильников П. С., Захарова Е. Е. Нерезонансные вращения спутника относительно центра масс на условно-периодической орбите в ограниченной задаче N тел // *Космические исследования*. 1993. Т. 31. № 6. С. 11–21.
38. Podvigina O. M., Krasilnikov P. S. Evolution of the obliquity of an exoplanet: A non-resonant case // *Icarus*. 2020. Vol. 335. 113371. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2019.07.005>

39. <https://exoplanets.nasa.gov/exoplanet-catalog/6987/7-canis-majoris-b/>
<https://exoplanets.nasa.gov/exoplanet-catalog/7505/7-canis-majoris-c/>
<https://www.livingfuture.cz/stars/7-canis-majoris>
40. <https://www.iers.org/IERS/EN/Publications/TechnicalNotes/tn32.html>
41. Shen W., Chen W., Sun R. Earth's temporal principal moments of inertia and variable rotation // Geospatial Information Science. 2008. Vol. 11. No. 2. P. 127–132.
<https://doi.org/10.1007/s11806-008-0064-1>

Поступила в редакцию 18.05.2022

Принята к публикации 11.06.2022

Красильников Павел Сергеевич, д. ф.-м. н., профессор, зав. кафедрой «Моделирование динамических систем», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

E-mail: krasil06@rambler.ru

Цитирование: П. С. Красильников. Исследование прецессии экзопланеты под действием гравитационных моментов трех небесных тел с учетом эволюции орбиты спутника // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 2. С. 319–337.

P. S. Krasil'nikov

On the exo-planet precession under torques due to three celestial bodies with the evolution of the satellite's orbit

Keywords: axial tilt of exo-planet, planetary exo-system, averaged equations, effect of destabilization.

MSC2020: 70F15, 70K65

DOI: [10.35634/vm220210](https://doi.org/10.35634/vm220210)

We investigate the non-resonant evolution of the axial tilt of hypothetical exo-Earth in the gravitational field of a star, planet's satellite (exo-Moon) and outer planet (exo-Jupiter). The exo-Earth is assumed to be rigid, axially symmetric ($A = B$) and almost spherical. We assume the orbits of the both exo-planets to be Keplerian ellipses with focus in the star, the orbit of exo-Moon to be an evolving Keplerian ellipse with slowly changing of ascending node longitude and periapsis argument.

Assuming the frequencies of the unperturbed orbital elliptical motion to be of the order of unity, we obtain the canonical averaged equations describing the perturbed oscillations of the exo-Moon spin axis. These equations contain parameters changing slowly over time. Using the smallness of the planets' masses relative to the mass of the star, we have obtained simplified equations of oscillations of the exo-Earth spin axis by the small parameter method. Time integration of simplified equations gives the axial tilt of exo-Moon as a function of time. It is shown that the torques from the exo-Jupiter create a secular, long-period oscillation mode in axial tilt with a frequency equals to frequency of unperturbed spin axis precession of the exo-Earth. The impact of the exo-Moon on the evolution of the exo-Earth spin axis is that short-period harmonics appear in the oscillations of the axial tilt. The frequency of such oscillations is close to the precession frequency of the ascending node longitude of the exo-Moon orbit.

We have calculated the evolution of exo-Earth axial tilt for two exo-planetary systems, i. e., for a system similar to the solar system, and for a planetary exo-system 7 Canis Majoris. The effect of destabilization (stabilization) of the exo-Earth tilt oscillations due to the torques exerted by exo-Moon and exo-Jupiter is described.

Funding. The research was carried out at the Moscow Aviation Institute with the financial support of the Russian Science Foundation, project no. 22–21–00560.

REFERENCES

1. Armstrong J. C., Barnes R., Domagal-Goldman S., Breiner J., Quinn T. R., Meadows V. S. Effects of extreme obliquity variations on the habitability of exoplanets, *Astrobiology*, 2014, vol. 14, no. 4, pp. 277–291. <https://doi.org/10.1089/ast.2013.1129>
2. Cowan N. B., Voigt A., Abbot D. S. Thermal phases of Earth-like planets: estimating thermal inertia from eccentricity, obliquity, and diurnal forcing, *The Astrophysical Journal*, 2012, vol. 757, no. 1, article 80. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/757/1/80>
3. Heller R., Leconte J., Barnes R. Tidal obliquity evolution of potentially habitable planets, *Astronomy and Astrophysics*, 2011, vol. 528, article 27. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201015809>
4. Ferreira D., Marshall J., O'Gorman P. A., Seager S. Climate at high-obliquity, *Icarus*, 2014, vol. 243, pp. 236–248. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2014.09.015>
5. Kilic C., Raible C. C., Stocker T. F. Multiple climate states of habitable exoplanets: The role of obliquity and irradiance, *The Astrophysical Journal*, 2017, vol. 844, no. 2, article 147. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aa7a03>
6. Milankovitch M. *Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf das Eiszeitenproblem* (Canon of insolation and the ice-age problem), Belgrade: Serbian Academy, 1941.
7. Williams D. M., Pollard D. Extraordinary climates of Earth-like planets: three-dimensional climate simulations at extreme obliquity, *International Journal of Astrobiology*, 2003, vol. 2, issue 1, pp. 1–19. <https://doi.org/10.1017/S1473550403001356>

8. Drysdale R.N., Hellstrom J.C., Zanchetta G., Fallick A.E., Sánchez Goñi M.F., Couchoud I., McDonald J., Maas R., Lohmann G., Isola I. Evidence for obliquity forcing of glacial termination. II, *Science*, 2009, vol. 325, no. 5947, pp. 1527–1531. <https://doi.org/10.1126/science.1170371>
9. Williams D.M., Kasting J.F. Habitable planets with high obliquities, *Icarus*, 1997, vol. 129, no. 1, pp. 254–267. <https://doi.org/10.1006/icar.1997.5759>
10. Li G., Batygin K. On the spin-axis dynamics of a Moonless Earth, *The Astrophysical Journal*, 2014, vol. 790, no. 1, article 69. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/790/1/69>
11. Shan Y., Li G. Obliquity variations of habitable zone planets Kepler-62f and Kepler-186f, *The Astronomical Journal*, 2018, vol. 155, no. 6, article 237. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/aabfd1>
12. Quarles B., Barnes J.W., Lissauer J.J., Chambers J. Obliquity evolution of the potentially habitable exoplanet Kepler-62f, *Astrobiology*, 2020, vol. 20, issue 1, pp. 73–90. <https://doi.org/10.1089/ast.2018.1932>
13. Laskar J., Joutel F., Boudin F. Orbital, precessional, and insolation quantities for the Earth from –20 Myr to +10 Myr, *Astronomy and Astrophysics*, 1993, vol. 270, nos. 1–2, pp. 522–533. <https://adsabs.harvard.edu/pdf/1993A&A...270..522L>
14. Laskar J., Robutel P. The chaotic obliquity of the planets, *Nature*, 1993, vol. 361, no. 6413, pp. 608–612. <https://doi.org/10.1038/361608a0>
15. Laskar J., Joutel F., Robutel P. Stabilization the Earth's obliquity by the Moon, *Nature*, 1993, vol. 361, no. 6413, pp. 615–617. <https://doi.org/10.1038/361615a0>
16. Quillen A.C., Chen Y.-Y., Noyelles B., Loane S. Tilting Styx and Nix but not Uranus with a spin-precession-mean-motion resonance, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2018, vol. 130, issue 2, article 11. <https://doi.org/10.1007/s10569-017-9804-6>
17. Spiegel D.S., Raymond S.N., Dressing C.D., Scharf C.A., Mitchell J.L. Generalized Milankovitch cycles and long-term climatic habitability, *The Astrophysical Journal*, 2010, vol. 721, no. 2, pp. 1308–1318. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/721/2/1308>
18. Ward W.R., Hamilton D.P. Tilting Saturn. I. Analytic model, *The Astronomical Journal*, 2004, vol. 128, no. 5, pp. 2501–2509. <https://doi.org/10.1086/424533>
19. Ward W.R., Hamilton D.P. Tilting Saturn. II. Numerical model, *The Astronomical Journal*, 2004, vol. 128, no. 5, pp. 2510–2517. <https://doi.org/10.1086/424534>
20. Krasil'nikov P.S., Amelin R.N. On the precession of Saturn, *Cosmic Research*, 2018, vol. 56, no. 4, pp. 306–316. <https://doi.org/10.1134/S0010952518040019>
21. Krasil'nikov P.S. *Vrashcheniya tverdogo tela otnositel'no tsentra mass v ogranichennoi zadache trekh tel* (Rotations of a rigid body about the center of mass in the restricted three-body problem), Moscow: Moscow Aviation Institute, 2018.
22. Krasil'nikov P.S., Podvigina O.M. On evolution of the planet's obliquity in a non-resonant planetary system, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 4, pp. 549–564 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm180408>
23. Correia A.C.M. Stellar and planetary Cassini states, *Astronomy and Astrophysics*, 2015, vol. 582, article 69. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201525939>
24. Lhotka C. Steady state obliquity of a rigid body in the spin-orbit resonant problem: Application to Mercury, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2017, vol. 129, issue 4, pp. 397–414. <https://doi.org/10.1007/s10569-017-9787-3>
25. Colombo G. Cassini's second and third laws, *The Astronomical Journal*, 1966, vol. 71, no. 9, p. 891. <https://doi.org/10.1086/109983>
26. Ward W.R. Tidal friction and generalized Cassini's laws in the solar system, *The Astronomical Journal*, 1975, vol. 80, pp. 64–70. <https://doi.org/10.1086/111714>
27. Beletskii V.V. Resonance rotation of celestial bodies and Cassini's laws, *Celestial Mechanics*, 1972, vol. 6, no. 3, pp. 356–378. <https://doi.org/10.1007/BF01231479>
28. Lidov M.L., Neishtadt A.I. *The method of canonical transformations in the problems of rotation of celestial bodies and Cassini's laws*, Preprint no. 9. Institute of Applied Mathematics of RAS, 1973 (in Russian).
29. Beletskii V.V. *Dvizhenie sputnika otnositel'no tsentra mass v gravitatsionnom pole* (The motion of

- a satellite relative to the center of mass in a gravitational field), Moscow: Moscow State University, 1975.
30. Peale S.J. The proximity of Mercury's spin to Cassini state 1 from adiabatic invariance, *Icarus*, 2006, vol. 181, issue 2, pp. 338–347. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2005.10.006>
 31. Tisserand F.F. *Traité de mécanique céleste. Tome II. Théorie de la figure des corps célestes et de leur mouvement de rotation*, Paris: Gauthier–Villars et fils, 1891. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6537806n>
 32. Smart W.M. *Celestial mechanics*, London–New York–Toronto: Longmans, Green and Co, 1953.
 33. Krasinsky G.A. Critical inclinations in planetary problem, *Celestial Mechanics*, 1972, vol. 6, issue 1, pp. 60–83. <https://doi.org/10.1007/bf01237448>
 34. Lidov M.L. The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies, *Planetary and Space Science*, 1962, vol. 9, issue 10, pp. 719–759. [https://doi.org/10.1016/0032-0633\(62\)90129-0](https://doi.org/10.1016/0032-0633(62)90129-0)
 35. Lidov M.L. Approximate analysis of the evolution of orbits of artificial satellites, *Problemy dvizheniya iskusstvennykh nebesnykh tel*, Moscow: Academy of Sciences of the Soviet Union, 1963.
 36. Balk M.B. *Elementy dinamiki kosmicheskogo poleta* (Elements of space flight dynamics), Moscow: Nauka, 1965.
 37. Krasil'nikov P.S., Zakharova E.E. Nonresonant rotations of a satellite about its center of mass in the restricted N -body problem, *Cosmic Research*, 1994, vol. 31, no. 6, pp. 596–604.
 38. Podvigina O.M., Krasilnikov P.S. Evolution of the obliquity of an exoplanet: A non-resonant case, *Icarus*, 2020, vol. 335, 113371. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2019.07.005>
 39. <https://exoplanets.nasa.gov/exoplanet-catalog/6987/7-canis-majoris-b/>
<https://exoplanets.nasa.gov/exoplanet-catalog/7505/7-canis-majoris-c/>
<https://www.livingfuture.cz/stars/7-canis-majoris>
 40. <https://www.iers.org/IERS/EN/Publications/TechnicalNotes/tn32.html>
 41. Shen W., Chen W., Sun R. Earth's temporal principal moments of inertia and variable rotation, *Geo-spatial Information Science*, 2008, vol. 11, no. 2, pp. 127–132. <https://doi.org/10.1007/s11806-008-0064-1>

Received 18.05.2022

Accepted 11.06.2022

Pavel Sergeevich Krasil'nikov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Modeling of Dynamic Systems, Moscow Aviation Institute, Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, 125993, Russian Federation.

E-mail: krasil06@rambler.ru

Citation: P.S. Krasil'nikov. On the exo-planet precession under torques due to three celestial bodies with the evolution of the satellite's orbit, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 2, pp. 319–337.