МАТЕМАТИКА 2025. Т. 35. Вып. 2. С. 188–197.

УДК 517.938.5

© *А. Н. Ветохин*

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЛОКАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ НЕАВТОНОМНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, РАССМАТРИВАЕМОЙ КАК ФУНКЦИЯ ТОЧКИ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Изучается характер зависимости от точки фазового пространства локальной энтропии неавтономной динамической системы. Доказано, что локальная энтропия является функцией второго бэровского класса на фазовом пространстве, а ее множество точек полунепрерывности снизу образует всюду плотное G_δ-множество. Построена такая автономная динамическая система, что множество точек полунепрерывности сверху локальной энтропии этой системы пусто.

Ключевые слова: динамические системы, локальная энтропия, классификация Бэра.

DOI: 10.35634/vm250202

Введение

Для количественной оценки неустойчивости по начальным условиям в автономной динамической системе в книге [1, с. 274] было введено понятие локальной энтропии автономной динамической системы. Мы приведем аналогичное определение для случая неавтономной динамической системы. Пусть X — компактное метрическое пространство, $f \equiv (f_1, f_2, \ldots)$ — последовательность непрерывных отображений из X в X. Наряду с исходной метрикой d определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x,y) = \max_{0\leqslant i\leqslant n-1} d(f^{\circ i}(x), f^{\circ i}(y)),$$
$$(f^{\circ i} \equiv f_i \circ \cdots \circ f_1, \quad f^{\circ 0} \equiv \mathrm{id}_X), \quad x, y \in X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Зафиксируем точку $x \in X$, для всяких $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ и $\rho > 0$ обозначим через $N_d(f, r, n, x, \rho)$ максимальное число точек в шаре $\overline{B}_d(x,\rho) = \{y \in X \colon d(x,y) \leqslant \rho\}$, попарные d_n^f-расстояния между которыми больше, чем r. Тогда *локальную энтропию* неавтономной динамической системы f в точке x определяют формулой

$$h_d(f,x) = \lim_{r\to 0}\lim_{\rho\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln N_d(f,r,n,x,\rho). \tag{0.1}$$

Отметим, что пределы в формуле (0.1) существуют, так как величина

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln N_d(f,r,n,x,\rho)$$

не возрастает с уменьшением ρ и не убывает с уменьшением r. Для того, чтобы получить классическое определение локальной энтропии автономной динамической системы $f \equiv (f, f, \ldots)$ [1, с. 274], нужно в качестве последовательности f взять стационарную последовательность $(f, f, \ldots)$.

Локальную энтропию динамической системы f также можно определить с помощью покрытий открытыми шарами компактного множества. Для всяких r, $\rho > 0$, $n \in \mathbb{N}$ множество $A \subset B_d(x,\rho)$ называется (f,r,n,x,ρ)-покрытием (шара $\overline{B}_d(x,\rho)$), если для любого

$z \in \overline{B}_d(x,\rho)$ найдется $y \in A$ такой, что $d_n^f(z,y) < r$. Пусть $S_d(f,r,n,x,\rho)$ обозначает минимальное количество элементов (f,r,n,x,ρ)-покрытия, тогда локальная энтропия может быть вычислена по формуле

$$h_d(f,x) = \lim_{r\to 0}\lim_{\rho\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\ln S_d(f,r,n,x,\rho), \tag{0.2}$$

которая следует из цепочки неравенств

$$S_d(f,r,n,x,\rho) \leqslant N_d(f,r,n,x,\rho) \leqslant S_d(f,\frac{r}{2},n,x,\rho).$$

Для фиксированной последовательности непрерывных отображений $f \equiv (f_1,f_2,\ldots)$, $f_k\colon X\to X$, $k\in\mathbb{N}$, рассмотрим функцию

$$x \mapsto h_d(f,x). \tag{0.3}$$

Как показывает следующий пример функция (0.3) может быть разрывной на пространстве X даже в случае стационарной последовательности f.

Пример 0.1. Рассмотрим отображение отрезка $[0,1]$ в себя вида $t(x) = 4x(1-x)$. В книге [2, с. 502] установлено, что топологическая энтропия непрерывного отображения t равна $\ln 2$. Напомним, что в случае компактного метрического пространства X топологическая энтропия непрерывного отображения $g\colon X\to X$ вычисляется по формуле [2, с. 122]

$$h_{\mathrm{top}}(g) = \lim_{r\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\ln N_d(g,r,n),$$

где $N_d(g,r,n)$ — максимальное число точек в X, попарные d_n^g-расстояния между которыми больше, чем r. Пусть $X=[-1,1]$ и отображение g задается равенством

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если}\ \ x\in[-1,0);\\ t(x), & \text{если}\ \ x\in[0,1],\end{cases}$$

тогда для последовательности $(g,g,\ldots)$ имеем $h_d(g,x)=0$ при $x\in[-1,\,0)$. Если $x=0$, то найдутся бесконечно малая последовательность положительных действительных чисел $(\rho_m)_{m=1}^{\infty}$ и последовательность натуральных чисел $(q_m)_{m=1}^{\infty}$ такие, что выполнено равенство

$$g^{q_m}\big(\{x\colon |x|\leqslant 1/\rho_m\}\big) = [0,1],$$

а следовательно, для любого натурального числа n

$$N_d(g,r,q_m+n,0,\rho_m) \geqslant N_d(t,r,n).$$

Таким образом получаем оценку локальной энтропии отображения g в точке $x=0$ снизу

$$h_d(g,0) = \lim_{r\to 0}\lim_{m\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{q_m+n}\ln N_d(g,r,q_m+n,0,\rho_m) =$$

$$= \lim_{r\to 0}\lim_{m\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\ln N_d(g,r,q_m+n,0,\rho_m) \geqslant \lim_{r\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\ln N_d(t,r,n) = h_{\mathrm{top}}(t) = \ln 2.$$

Следовательно функция $x\mapsto h_d(g,x)$ имеет разрыв в нуле.

Возникают естественные вопросы о наименьшем бэровском классе, которому принадлежит функция (0.3) и о дескриптивном типе множества точек полунепрерывности сверху (снизу) этой функции. Напомним, что функциями нулевого бэровского класса на метрическом пространстве X называются непрерывные функции, и для всякого натурального числа p функциями p-го бэровского класса называются функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей функций $(p-1)$-го класса.

Вопросы о том, какому *классу Бэра* принадлежат показатели Ляпунова и другие характеристики асимптотического поведения решений дифференциальных уравнений были поставлены В. М. Миллионщиковым. Показатели Ляпунова оказались функциями в точности второго класса Бэра (В. М. Миллионщиковым доказано, что второго, а М. И. Рахибердиевым — что не первого). Исследование функции на принадлежность тому или иному классу Бэра позволяет судить о типичности в том или ином смысле ее точек непрерывности или хотя бы полунепрерывности.

§ 1. О принадлежности второму бэровскому классу локальной энтропии, рассматриваемой как функция точки фазового пространства

В работе [3], в случае стационарной последовательности f, установлено, что функция (0.3) принадлежит второму бэровскому классу на пространстве X, а из работы [4] следует, что для любой последовательности $f \equiv (f_1, f_2, \ldots)$ непрерывных отображений функция (0.3) принадлежит третьему бэровскому классу на пространстве X. Оказывается для неавтономных динамических систем справедлив более сильный результат.

Теорема 1.1. *Для любой последовательности $f \equiv (f_1, f_2, \ldots)$ непрерывных отображений функция (0.3) принадлежит второму бэровскому классу на пространстве X.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразуем формулу (0.2) к виду

$$h_d(f,x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln S_d(f, 1/m, n, x, 1/k), \tag{1.1}$$

и для фиксированного натурального числа m рассмотрим функцию

$$x \mapsto \varphi_m(x) = \lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln S_d(f, 1/m, n, x, 1/k).$$

Для любых $k \in \mathbb{N}$ и точки $y \in B_d(x, 1/k)$, найдется такое $l_k > 0$, что для любого $l \geqslant l_k$ выполнено включение $B_d(y, 1/l) \subset B_d(x, 1/k)$, из которого вытекает неравенство

$$S_d(f, 1/m, n, y, 1/l) \leqslant S_d(f, 1/m, n, x, 1/k), \quad m,\, n \in \mathbb{N},$$

следовательно,

$$\lim_{l\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln S_d(f, 1/m, n, y, 1/l) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln S_d(f, 1/m, n, x, 1/k).$$

В силу произвольности точки $y \in B_d(x, 1/k)$ получаем неравенство

$$\sup_{y \in B_d(x,1/k)} \lim_{l\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln S_d(f, 1/m, n, y, 1/l) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln S_d(f, 1/m, n, x, 1/k).$$

Перейдя в последнем неравенстве к пределу при $k \to +\infty$, получим неравенство $\overline{\lim_{y\to x}} \varphi_m(y) \leqslant \varphi_m(x)$, которое устанавливает полунепрерывность сверху функции $x \mapsto \varphi_m(x)$ в точке x. Следовательно, функция $x \mapsto \varphi_m(x)$ принадлежит первому бэровскому классу на пространстве X. Таким образом, из (1.1) имеем следующее представление локальной энтропии в виде предела неубывающей последовательности непрерывных функций:

$$h_d(f,x) = \lim_{m\to\infty} \varphi_m(x), \quad \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \varphi_3(x) \leqslant \ldots, \tag{1.2}$$

из которого вытекает принадлежность функции $x \mapsto h_d(f,x)$ второму бэровскому классу на пространстве X, что и требовалось доказать. □

§ 2. О множествах точек полунепрерывности локальной энтропии, рассматриваемой как функция точки фазового пространства

В работе [3], в случае стационарной последовательности f, установлено, что множество точек полунепрерывности снизу функции (0.3) содержит всюду плотное G_δ-множество. Оказывается, справедливо более сильное утверждение.

Теорема 2.1. *Для любой последовательности непрерывных отображений $f \equiv (f_1, f_2, \ldots)$ множество точек полунепрерывности снизу функции (0.3) является всюду плотным G_δ-множеством в пространстве X, а множество ее точек полунепрерывности сверху — $F_{\sigma\delta}$-множеством в пространстве X.*

Доказательство. Обозначим через U множество точек, которые не являются точками полунепрерывности снизу для функции (0.3). Докажем, что это множество имеет вид

$$U = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \bigl(\{x \in X\colon h_d(f,x) > r\} \bigcap (X \setminus \operatorname{int}\{x \in X\colon h_d(f,x) > r\})\bigr), \tag{2.1}$$

где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, а $\operatorname{int} Z$ — множество внутренних точек множества Z. Действительно, разность $\{x \in X\colon h_d(f,x) > r\} \setminus \operatorname{int}\{x \in X\colon h_d(f,x) > r\}$ при любом $r \in \mathbb{Q}$ не содержит точек полунепрерывности снизу функции (0.3). С другой стороны, если точка x_0 принадлежит множеству U, то найдется такое $r_0 \in \mathbb{Q}$, для которого $x_0 \in \{x \in X\colon h_d(f,x) > r_0\}$ и $x_0 \notin \operatorname{int}\{x \in X\colon h_d(f,x) > r_0\}$. Следовательно, получаем равенство

$$U = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \bigl(\{x \in X\colon h_d(f,x) > r\} \setminus \operatorname{int}\{x \in X\colon h_d(f,x) > r\}\bigr).$$

Наконец, из равенства

$$\{x \in X\colon h_d(f,x) > r\} \setminus \operatorname{int}\{x \in X\colon h_d(f,x) > r\} =$$
$$= \{x \in X\colon h_d(f,x) > r\} \bigcap \bigl(X \setminus \operatorname{int}\{x \in X\colon h_d(f,x) > r\}\bigr)$$

получим формулу (2.1).

Для любого $r \in \mathbb{Q}$, используя представление (1.2), множество $\{x \in X\colon h_d(f,x) > r\}$ можно записать в виде

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{x \in X\colon \varphi_m(x) > r\}.$$

Так как функции $x \mapsto \varphi_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, принадлежат первому бэровскому классу, то для любого $m \in \mathbb{N}$ множество $\{x \in X\colon \varphi_m(x) > r\}$ является F_σ-множеством [5, с. 247], а следовательно, множество точек U также является F_σ-множеством. Таким образом, множество точек полунепрерывности снизу функции (0.3) является G_δ-множеством.

По теореме Бэра о функциях первого класса [6, с. 403] множество G_m точек непрерывности каждой функции $\varphi_m(\cdot)$ является всюду плотным G_δ-множеством. Пересечение всех G_m снова является всюду плотным G_δ-множеством [6, с. 428], каждая точка которого является точкой непрерывности всех функций $\varphi_m(\cdot)$, $m \in \mathbb{N}$. Пусть $x \in \bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} G_m$ и $\varepsilon > 0$.

Так как последовательность $(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots)$ является неубывающей, то при достаточно большом m окажется $\varphi_m(x) > h_d(f, x) - \varepsilon$. Зафиксируем такое m и найдем окрестность $\mathcal{O}_x$ точки x такую, что для всякого $y \in \mathcal{O}_x$ выполнено неравенство $\varphi_m(y) > \varphi_m(x) - \varepsilon$. Так как $h_d(f, y) \geqslant \varphi_m(y)$, то для $y \in \mathcal{O}_x$ окажется $h_d(y) \geqslant h_d(f, x) - 2\varepsilon$. Следовательно, в каждой точке множества $\bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} G_m$ функция $x \mapsto h_d(f, x)$ полунепрерывна снизу.

Обозначим через V множество точек, которые не являются точками полунепрерывности сверху функции (0.3). Это множество имеет вид

$$V = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \Big(\{x \in X \colon h_d(f, x) < r\} \bigcap \big(X \setminus \operatorname{int} \{x \in X \colon h_d(f, x) < r\}\big)\Big).$$

Для любого $r \in \mathbb{Q}$ множество $\{x \in X \colon h_d(f, x) < r\}$ можно представить следующим образом:

$$\{x \in X \colon h_d(f, x) < r\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \Big\{x \in X \colon \varphi_m(x) \leqslant r - \frac{1}{k}\Big\}.$$

Так как функции $x \mapsto \varphi_m(x)$ принадлежат первому бэровскому классу, то для любых $k, m \in \mathbb{N}$ множество $\{x \in X \colon \varphi_m(x) \leqslant r - \frac{1}{k}\}$ является G_δ-множеством, а следовательно, множество точек V является $G_{\delta\sigma}$-множеством. Таким образом, множество точек полунепрерывности сверху функции (0.3) является $F_{\sigma\delta}$-множеством, что и требовалось доказать. □

§ 3. О множестве точек полунепрерывности сверху локальной энтропии одной автономной динамической системы

На множестве последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $x_k \in \{0, 1\}$, $k \in \mathbb{N}$, введем метрику

$$d_{\Omega_2}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \ \ x = y; \\ \frac{1}{\min\{i \colon x_i \neq y_i\}}, & \text{если} \ \ x \neq y. \end{cases}$$

Полученное компактное метрическое пространство обозначим через Ω_2. Отметим, что пространство Ω_2 гомеоморфно множеству Кантора на отрезке $[0, 1]$ с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой. В работе [3] построена стационарная последовательность $(f, f, \ldots)$, $f \colon \Omega_2 \to \Omega_2$ такая, что функция $x \mapsto h_d(f, x)$ всюду разрывна и не принадлежит первому классу Бэра на пространстве Ω_2. Оказывается, справедлив более сильный результат.

Теорема 3.1. *Если $X = \Omega_2$, то существует стационарная последовательность $(f, f, \ldots)$ непрерывных отображений $f \colon \Omega_2 \to \Omega_2$ такая, что множество точек полунепрерывности сверху функции $x \mapsto h_d(f, x)$ пусто.*

Доказательство. Обозначим через Ω_2^0 подмножество тех последовательностей из Ω_2, у которых первый элемент равен нулю. На пространстве $\Omega_2^0 \times \Omega_2$ введем метрику

$$d_{\Omega_2^0 \times \Omega_2}\big((\alpha, x), (\beta, y)\big) = \max\big\{d_{\Omega_2}(\alpha, \beta), d_{\Omega_2}(x, y)\big\}.$$

По последовательности $\omega \in \Omega_2^0$ построим последовательность целых неотрицательных чисел $\alpha(\omega) = \big(\alpha_k(\omega)\big)_{k=1}^{\infty}$ следующим образом: если на i-м месте в последовательности $\omega = (0, \omega_2, \omega_3, \dots)$ встречаем нуль, то записываем в последовательности $\alpha(\omega)$ i нулей, если на i-м месте в последовательности ω встречаем единицу, то записываем в последовательности $\alpha(\omega)$ номер последнего нуля предшествующего этой единице. Например, последовательности $(0, 1, 0, 1, 1, 1, \dots)$ будет соответствовать последовательность $(0, 1, 0, 0, 0, 3, 3, 3, \dots)$.

Зададим отображение $f\colon \Omega_2^0 \times \Omega_2 \to \Omega_2^0 \times \Omega_2$ формулой

$$f\big((0, \omega_2, \omega_3, \dots), (x_1, x_2, \dots)\big) = \big((0, \omega_2, \omega_3, \dots), (x_{1+\alpha_1(\omega)}, x_{2+\alpha_2(\omega)}, \dots)\big). \tag{3.1}$$

В силу определения отображение f является непрерывным на $\Omega_2^0 \times \Omega_2$. Похожая конструкция использовалась в работе [7] для построения непрерывного отображения $f\colon \Omega_2^0 \times \Omega_2 \to \Omega_2$ такого, что множество точек полунепрерывности сверху функции $\omega \mapsto h_{\rm top}\big(f(\omega, \cdot)\big)$, где $h_{\rm top}\big(f(\omega, \cdot)\big)$ — топологическая энтропия отображения $f(\omega, \cdot)$, пусто.

Опишем построение отображения (3.1) более формально. Каждой последовательности $\omega \in \Omega_2^0$ поставим в соответствие последовательность натуральных чисел $(m_i)_{i=1}^{\infty}$, определяемых равенством

$$m_i = \begin{cases} i, & \text{если } \ \omega_i = 0; \\ 1, & \text{если } \ \omega_i = 1. \end{cases}$$

Построим последовательность чисел $l_i = \sum\limits_{k=1}^{i} m_k$ и таблицу (a_{ij}), элементы которой определяются равенствами

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } \ \omega_i = 0, \quad j = 1, \dots, m_i; \\ \max\{s\colon 1 \leqslant s \leqslant i \ \text{ и } \ \omega_s = 0\}, & \text{если } \ \omega_i = 1, \quad j = m_i. \end{cases}$$

Отображение f можно записать в виде $f\big(\omega, (x_1, x_2, \dots)\big) = \big(\omega, (y_1, y_2, \dots)\big)$, где

$$\begin{array}{ccc} y_1 = x_{1+a_{11}} & \cdots & y_{l_1} = y_{l_1+a_{1m_1}} \\ y_{l_1+1} = x_{m_1+1+a_{21}} & \cdots & y_{l_1+m_2} = x_{l_1+m_2+a_{2m_2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{l_{i-1}+1} = x_{l_{i-1}+1+a_{i1}} & \cdots & y_{l_{i-1}+m_i} = x_{l_{i-1}+m_i+a_{im_i}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}. \tag{3.2}$$

Обозначим через P_0 подмножество последовательностей из Ω_2^0, содержащих бесконечно много нулей, а через P_1 — подмножество последовательностей из Ω_2^0 содержащих конечное число нулей.

Лемма 3.1. *Если $\omega \in P_0$, то для любого $x \in \Omega_2$ локальная энтропия $h_{d_{\Omega_2^0 \times \Omega_2}}\big(f, (\omega, x)\big)$ равна нулю.*

Доказательство. Для $\omega \in P_0$ найдется подпоследовательность $(\omega_{i_k})_{k=1}^{\infty}$ последовательности ω такая, что выполнены равенства $\omega_{i_k} = 0$, $k = 1, 2, \dots$, следовательно, имеем

$$a_{ij} \leqslant m_k - 1, \quad i = 1, \dots, i_k - 1, \quad j = 1, \dots, m_i,$$
$$a_{i_k j} = 0, \quad j = 1, \dots, m_{i_k}.$$

Таким образом, из формул (3.2) получаем $f\big(\omega,(x_1,x_2,\ldots)\big)=\big(\omega,(y_1,y_2,\ldots)\big)$, где

$$\begin{array}{rcl} y_1=x_{1+a_{11}} & \cdots & y_{m_1}=y_{m_1+a_{1m_1}} \\ y_{l_1+1}=x_{m_1+1+a_{21}} & \cdots & y_{l_1+m_2}=x_{l_1+m_2+a_{2m_2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{l_{i_k-2}+1}=x_{l_{i_k-1}+1+a_{i_k-11}} & \cdots & y_{l_{i_k-2}+m_{i_k-1}}=x_{l_{i_k-2}+m_{i_k-1}+a_{i_k-1m_{i_k-1}}} \\ y_{l_{i_k-1}+1}=x_{l_{i_k-1}+1} & \cdots & y_{l_{i_k-1}+m_{i_k}}=x_{l_{i_k-1}+m_{i_k}} \\ y_{l_{i_k}+1}=x_{l_{i_k}+1+a_{i_k1}} & \cdots & y_{l_{i_k}+m_{i_k+1}}=x_{l_{i_k}+m_{i_k+1}+a_{i_k+1m_{i_k+1}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}. \tag{3.3}$$

Так как для каждого $k\in\mathbb{N}$ выполнено неравенство $l_{i_k}\geqslant i_k$, то для любых натурального числа n и точки $(\alpha,y)\in B_{d_{\Omega_2^0\times\Omega_2}}\Big((\omega,x),\frac{1}{l_{i_k}}\Big)$ в силу (3.3) получаем, что первые l_{i_k} элементов последовательностей $f^n(\alpha,y)$ совпадают с первыми l_{i_k} элементами последовательностей $f^n(\omega,x)$, отсюда имеем $d_n^f\big((\omega,x),(\alpha,y)\big)<\frac{1}{l_{i_k}}$. Следовательно, для любого $r>\frac{1}{l_{i_k}-1}$ точка (ω,x) является $\Big(f,r,n,(\omega,x),\frac{1}{l_{i_k}}\Big)$-покрытием шара $B_{d_{\Omega_2^0\times\Omega_2}}\big((\omega,x),\frac{1}{l_{i_k}}\big)$ и

$$h_{d_{\Omega_2^0\times\Omega_2}}\big(f,(\omega,x)\big)\leqslant\lim_{r\to0}\lim_{k\to+\infty}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln S_{d_{\Omega_2^0\times\Omega_2}}\left(f,r,n,(\omega,x),\frac{1}{l_{i_k}}\right)=0.$$

Таким образом, получаем $h_{d_{\Omega_2^0\times\Omega_2}}\big(f,(\omega,x)\big)=0$ при $\omega\in P_0$, что и требовалось доказать. □

Лемма 3.2. *Если $\omega\in P_1$, то для любого $x\in\Omega_2$ выполнено равенство $h_{d_{\Omega_2^0\times\Omega_2}}\big(f,(\omega,x)\big)=$ $=i_0\cdot\ln2$, где i_0 — номер последнего нуля в последовательности ω.*

Доказательство. Так как $\omega\in P_1$, то

$$\begin{gathered} a_{ij}\leqslant m_{i_0}-1,\quad i=1,\ldots,i_0-1,\quad j=1,\ldots,m_i,\\ a_{i_0j}=0,\quad j=1,\ldots,m_{i_0},\\ a_{ij}=i_0,\quad i=i_0+1,i_0+2,\ldots,\quad j=1,\ldots,m_i. \end{gathered}$$

Таким образом, из формул (3.2) получаем $f\big(\omega,(x_1,x_2,\ldots)\big)=\big(\omega,(y_1,y_2,\ldots)\big)$, где

$$\begin{array}{rcl} y_1=x_{1+a_{11}} & \cdots & y_{m_1}=y_{m_1+a_{1m_1}} \\ y_{l_1+1}=x_{m_1+1+a_{21}} & \cdots & y_{l_1+m_2}=x_{l_1+m_2+a_{2m_2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{l_{i_0-2}+1}=x_{l_{i_0-2}+1+a_{i_0-11}} & \cdots & y_{l_{i_0-2}+m_{i_0-1}}=x_{l_{i_0-2}+m_{i_0-1}+a_{i_0-1m_{i_0-1}}} \\ y_{l_{i_0-1}+1}=x_{l_{i_0-1}+1} & \cdots & y_{l_{i_0-1}+m_i}=x_{l_{i_0-1}+m_{i_0}} \\ y_{l_{i_0}+1}=x_{l_{i_0}+1+i_0} & \cdots & y_{l_{i_0}+m_{i_0+1}}=x_{l_{i_0}+m_{i_0+1}+i_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}. \tag{3.4}$$

То есть отображение $f(\omega,\cdot)$ действует на последовательность $x\in\Omega_2$, начиная с номера $l_{i_0}+1$, как сдвиг влево на i_0 элементов, а для любых $\alpha\in B_{d_{\Omega_2^0}}\Big(\omega,\frac{1}{i_0+1}\Big)$, $y\in B_{d_{\Omega_2}}\Big(x,\frac{1}{l_{i_0}+1}\Big)$ и $n\in\mathbb{N}$ первые l_{i_0} элементов последовательности $f^n(\alpha,y)$ равны первым l_{i_0} элементам последовательности $f^n(\omega,x)$.

Зададим натуральные числа $k_1<k_2$, в шаре $B_{d_{\Omega_2}}\Big(x,\frac{1}{k_1i_0+l_{i_0}+1}\Big)$ рассмотрим множество R точек y, координаты которых удовлетворяют равенствам

$$0=y_{k_2i_0+l_{i_0}+1}=y_{k_2i_0+l_{i_0}+2}=\ldots.$$

В силу формул (3.4) для любых двух точек y_1, y_2 из R имеем

$$\max_{0\leqslant i\leqslant k_2-1} d_{\Omega_2}\big(f^i(\omega,y_1),f^i(\omega,y_2)\big) > \frac{1}{l_{i_0}+2}.$$

Следовательно для любого числа $r<\frac{1}{l_{i_0}+2}$ величина $N_{d_{\Omega_2^0\times\Omega_2}}\Big(f,r,k_3,(\omega,x),\frac{1}{k_1i_0+l_{i_0}+1}\Big)$ не менее мощности множества R, откуда получаем неравенство

$$\begin{aligned} h_{d_{\Omega_2^0\times\Omega_2}}\big(f,(\omega,x)\big) &\geqslant \lim_{r\to 0}\lim_{k_1\to+\infty}\varlimsup_{k_2\to+\infty}\frac{1}{k_2}\ln N_{d_{\Omega_2^0\times\Omega_2}}\Big(f,r,k_2,(\omega,x),\frac{1}{k_1i_0+l_{i_0}+1}\Big)\geqslant \\ &\geqslant \lim_{r\to 0}\lim_{k_1\to+\infty}\lim_{k_2\to+\infty}\frac{(k_2-k_1)i_0\ln 2}{k_2}=i_0\ln 2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

В пространстве Ω_2 рассмотрим множество S точек y таких, что выполнены равенства

$$0=y_{(k_1+k_2)i_0+l_{i_0}+2}=y_{(k_1+k_2)i_0+l_{i_0}+3}=\ldots.$$

Если для $\alpha\in B_{d_{\Omega_2^0}}\Big(\omega,\frac{1}{k_1i_0+l_{i_0}+1}\Big)$ выполнены равенства $\alpha_i=\omega_i$, $i=k_1i_0+l_{i_0}+2,\ldots,$ $\ldots,(k_1+k_2)i_0+l_{i_0}+1$, то для любой точки $z\in\Omega_2$ найдется точка $y\in S$ такая, что выполнено неравенство

$$\max_{0\leqslant i\leqslant k_3-1} d_{\Omega_2}\big(f^i(\alpha,z),f^i(\omega,y)\big) < \frac{1}{k_1i_0+l_{i_0}+1}, \tag{3.6}$$

если существует номер $i_1\in\big\{k_1i_0+l_{i_0}+2,\ldots,(k_1+k_2)i_0+l_{i_0}+1\big\}$ такой, что $\alpha_{i_1}=0$, то $m_{i_1}=i_1$ и $a_{i_1j}=0$, $j=1,\ldots,i_1$, и для любого $z\in\Omega_2$ найдется $y\in S$ такой, что в силу формул (3.4) для любого $p\in\mathbb{N}$ l_{i_1+1} элементов последовательности $f^n(\alpha,z)$ совпадают с l_{i_1+1} элементами последовательности $f^n(\omega,y)$, следовательно,

$$d_{\Omega_2}\big(f^p(\alpha,z),f^p(\omega,y)\big) < \frac{1}{l_{i_1+1}} < \frac{1}{k_1i_0+l_{i_0}+1}. \tag{3.7}$$

Из (3.6) и (3.7) получаем, что для любого числа $r<\frac{1}{k_1i_0+l_{i_0}+1}$ множество

$$\left(\omega, S\bigcap B_{d_{\Omega_2}}\Big(x,\frac{1}{k_2i_0+l_{i_0+1}}\Big)\right)$$

является $\Big(f,r,k_2,(\omega,x),\frac{1}{k_2i_0+l_{i_0}+1}\Big)$–покрытием шара $B_{d_{\Omega_2^0\times\Omega_2}}\Big(x,\frac{1}{k_2i_0+l_{i_0}+1}\Big)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} h_{d_{\Omega_2^0\times\Omega_2}}\big(f,(\omega,x)\big) &\leqslant \lim_{r\to 0}\lim_{k_1\to+\infty}\varlimsup_{k_2\to+\infty}\frac{1}{k_2}\ln S_{d_{\Omega_2^0\times\Omega_2}}\Big(f,r,k_2,(\omega,x),\frac{1}{k_1i_0+l_{i_0}+1}\Big)\leqslant \\ &\leqslant \lim_{r\to 0}\lim_{k_1\to+\infty}\lim_{k_2\to+\infty}\frac{(k_2+k_1)i_0\ln 2}{k_2}=i_0\ln 2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Теперь равенство $h_{d_{\Omega_2^0\times\Omega_2}}\big(f,(\omega,x)\big)=i_0\ln 2$ получаем из неравенств (3.5) и (3.8), что и требовалось доказать. □

Завершение доказательства теоремы 3.1. Докажем, что функция $(\omega,x)\mapsto h_{d_{\Omega_2^0\times\Omega_2}}\big(f,(\omega,x)\big)$ не является полунепрерывной сверху ни в одной точке $(\omega^*,x^*)\in\Omega_2^0\times\Omega_2$. В силу лемм 3.1

и 3.2 имеем $h_{d_{\Omega_2^0\times\Omega_2}}\big(f,(\omega^*,x^*)\big) < +\infty$. Построим последовательность точек $\big(\omega^{(k)},x^*\big)_{k=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\omega_1^{(k)}=\omega_1^*,\ldots,\omega_k^{(k)}=\omega_k^*,\quad \omega_{k+1}^{(k)}=0,\quad \omega_{k+2}^{(k)}=\omega_{k+3}^{(k)}=1,\ldots.$$

Из леммы 3.2 для последовательности $\big(\omega^{(k)},x^*\big)_{k=1}^{\infty}$ имеем

$$\lim_{k\to\infty}\big(\omega^{(k)},x^*\big)=(\omega^*,x^*),\quad h_{d_{\Omega_2^0\times\Omega_2}}\big(f,(\omega^{(k)},x^*)\big)=(k+1)\ln 2.$$

Таким образом, точка (ω^*,x^*) не является точкой полунепрерывности сверху функции $(\omega,x)\mapsto h_{d_{\Omega_2^0\times\Omega_2}}(f,(\omega,x))$.

Так как существует гомеоморфизм φ пространства Ω_2 на пространство $\Omega_2^0\times\Omega_2$, то в силу равенства $h_{d_{\Omega_2}}(\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi,x)=h_{d_{\Omega_2^0\times\Omega_2}}\big(f,\varphi(x)\big)$ получаем, что множество точек полунепрерывности сверху функции $x\mapsto h_{d_{\Omega_2}}(\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi,x)$ пусто, что и требовалось доказать. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.: МЦНМО, 2005.
2. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999.
3. Vetokhin A. N. Exact Baire class of the local entropy considered as a function of a point in the phase space // 2022 International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations — QUALITDE, December 17–19, Tbilisi, Georgia. Vol. 1. P. 228-231.
4. Ветохин А. Н. О точной бэровской классификации локальной энтропии параметрических семейств динамических систем // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2023. № 6. С. 27–36. https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-64-6-4
5. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.–Л.: ОНТИ. Глав. ред. техн.-теоретич. лит-ры, 1937.
6. Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.
7. Ветохин А. Н. Пустота множества точек полунепрерывности сверху топологической энтропии одного семейства динамических систем // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 8. С. 1152–1153. https://doi.org/10.1134/S0374064119080120

Поступила в редакцию 10.01.2025
Принята к публикации 02.06.2025

Ветохин Александр Николаевич, д. ф.-м. н., доцент, кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1.
E-mail: anveto27@yandex.ru

Цитирование: А. Н. Ветохин. О некоторых свойствах локальной энтропии неавтономной динамической системы, рассматриваемой как функция точки фазового пространства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 2. С. 188–197.

MATHEMATICS 2025. Vol. 35. Issue 2. Pp. 188–197.

A. N. Vetokhin

On some properties of the local entropy of dynamical systems unwinded as a function of a point in the phase space

Keywords: dynamical systems, local entropy, Baire classification of functions.

MSC2020: 37B02

DOI: 10.35634/vm250202

The article studies the nature of the dependence on the local entropy point of a non-autonomous dynamical system. It is proved that the local entropy is a function of the second Baire class on the phase space, and its set of lower semicontinuity points forms an everywhere dense set of type G_δ. An autonomous dynamical system is constructed such that the set of above semicontinuity points of the local entropy of this system is empty.

REFERENCES

1. Katok A., Hasselblatt B. *A first course in dynamics: with a panorama of recent developments*, Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
2. Katok A., Hasselblatt B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
3. Vetokhin A. N. Exact Baire class of the local entropy considered as a function of a point in the phase space, *2022 International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations — QUALITDE, December 17–19, Tbilisi, Georgia*, vol. 1, pp. 228–231.
4. Vetokhin A. N. Sharp Baire classification of local entropy of parametric families of dynamical systems, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2023, vol. 78, no. 6, pp. 281–290. https://doi.org/10.3103/S0027132223060086
5. Hausdorff F. *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig: von Veit, 1914.
6. Kuratowski K. *Topology. Vol. 1*, Academic Press, 2014.
7. Vetokhin A. N. Family of dynamical systems whose topological entropy is nowhere upper semicontinuous, *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 8, pp. 1118–1119. https://doi.org/10.1134/S0012266119080123

Received 10.01.2025
Accepted 02.06.2025

Aleksandr Nikolaevich Vetokhin, Doctor of Physics and Mathematics, Associated Professor, Department of Differential Equations, Faculty of Mathematics and Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, GSP-1, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: anveto27@yandex.ru

Citation: A. N. Vetokhin. On some properties of the local entropy of dynamical systems unwinded as a function of a point in the phase space, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 2, pp. 188–197.