МАТЕМАТИКА 2025. Т. 35. Вып. 2. С. 215–230.

УДК 517.957

© *А. А. Косов, Э. И. Семенов*

ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА МОНЖА–АМПЕРА И ЕГО МНОГОМЕРНЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассматривается несколько вариантов многомерного обобщенного уравнения Монжа–Ампера, содержащих помимо определителя матрицы Гессе, также дополнительные слагаемые, зависящие от оператора Лапласа и градиента искомой функции. Предложено строить точные решения в виде суперпозиции квадратичной формы и решений обыкновенных дифференциальных уравнений, порождаемых исходным уравнением в частных производных. Приводится целый ряд примеров точных решений, как радиально симметричных, так и анизотропных, выражающихся через комбинации элементарных функций.

Ключевые слова: обобщенное уравнение Монжа–Ампера, многомерные точные решения.

DOI: 10.35634/vm250204

Введение

В [1] рассматривалось многомерное обобщенное уравнение Монжа–Ампера следующего вида

$$\det H(u) = f(\mathbf{x}, u, \nabla u, \Delta u), \tag{1}$$

где $u \triangleq u(\mathbf{x})$ — искомая функция переменной $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$; $H(u) = (\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j)$ — матрица Гессе n-го порядка; $\det H(u)$ — определитель матрицы Гессе (гессиан), который будем также называть оператором Монжа–Ампера; ∇u — градиент; Δu — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$. Уравнение (1) есть n-мерный аналог уравнения

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}), \tag{2}$$

которое включает в себя, как частный случай, классическое уравнение Монжа–Ампера [2,3]

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + d, \tag{3}$$

и уравнение вида

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = G(x, y, u, u_x, u_y), \tag{4}$$

где $u \triangleq u(x,y)$ — искомая функция, $a \triangleq a(x,y,u,u_x,u_y)$, $b \triangleq b(x,y,u,u_x,u_y)$, $c \triangleq c(x,y,u,u_x,u_y)$, $d \triangleq d(x,y,u,u_x,u_y)$, $G(x,y,u,u_x,u_y)$ — заданные функции. Уравнение (4) встречается в дифференциальной геометрии [4], в задачах газовой и гидродинамики [5–8], а также многих других математических моделях естествознания. В справочниках [7, 8] приведены точные решения уравнения (4) для некоторых $G(x,y,u,u_x,u_y)$. Подробная сводка новых результатов по методу редукции и точным решениям для нестационарного уравнения Монжа–Ампера представлена в работах [9, 10]. В [11, 12] получены условия линеаризации уравнения Монжа–Ампера контактными преобразованиями и построения инвариантов Лапласа. Интересный подход к построению точных решений неоднородных уравнений в частных производных, в том числе для уравнения Монжа–Ампера, предложен в [13].

Класс уравнений в частных производных с оператором Монжа–Ампера вида (1) является весьма содержательным. Так, в геофизике возникает задача построения поля соленоидального ветра $\{v, w\}$, согласованного с заданным геопотенциалом $\Phi(x,y)$, характеризующим атмосферное давление, посредством так называемого уравнения баланса ветра и давления следующего вида [14–16]

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 + \frac{1}{2}l(x,y)\Delta u + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = \frac{1}{2}\Delta\Phi(x,y), \tag{5}$$

где $u(x,y)$ — искомая функция тока: $u_x = v$, $u_y = w$; коэффициенты уравнения $l(x,y)$, $a(x,y)$, $b(x,y)$ — заданные функции. В литературе, посвященной задачам дифференциальной геометрии, часто встречается частный случай уравнения (1) следующего вида [17]:

$$\det H(u) = f\big(\mathbf{x}, |\nabla u|^2\big). \tag{6}$$

Например, к (6) относится дифференциальное уравнение гауссовой кривизны. В этом случае гауссова кривизна $K(\mathbf{x})$ графика функции $u(\mathbf{x})$ на $\mathbb{R}^n$ в точке $(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$ задается соотношением [18]

$$K(\mathbf{x}) = \frac{\det H(u)}{\big(1 + |\nabla u|^2\big)^{\frac{n+2}{2}}},$$

которое можно рассматривать как уравнение Монжа–Ампера относительно неизвестной функции $u(\mathbf{x})$. В [16] рассматривается гиперболическое уравнение Монжа–Ампера

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 + \varphi^2(x,y)\big(1 + u_x^2 + u_y^2\big)^2 = 0, \tag{7}$$

для отрицательной гауссовой кривизны $K(x,y) = -\varphi^2(x,y)$. В статье [16] отмечается также, что уравнение баланса и давления (5) при заданной правой части можно свести к уравнению (7).

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу построения многомерных точных решений для следующих уравнений, попадающих в класс обобщенных уравнений Монжа–Ампера вида (1):

$$\det H(u) = g(u) + \beta\Delta u\big(1 + \delta|\nabla u|^2\big)^q, \quad \delta = \pm 1, \tag{8}$$

$$\det H(u) = \lambda + f(\Delta u), \tag{9}$$

$$\det H(u) = \nabla \cdot \big(K(u)\nabla u\big) + Q(u), \tag{10}$$

где $u \triangleq u(\mathbf{x})$ — искомая функция переменной $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n > 2$; $g(u)$, $f(s)$, $Q(u)$ — известные функции; $K(u)$ — заданная дифференцируемая функция; $\lambda \neq 0$, $\beta \neq 0$, $q \neq 0$ — некоторые числовые параметры.

Импульсом к исследованию уравнения (8) послужили работы [17, 19, 20], в которых встречаются его двумерные аналоги. Так в [19, с. 213], [17, с. 28] рассматривается уравнение

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 1 + u_{xx}\big(1 - u_x^2\big), \quad u = u(x,y), \tag{11}$$

которое является частным случаем уравнения (8) при $g(u) \equiv 1$, $n = 2$, $\delta = -1$ и $q = 1$. Также, помимо уравнения (8), построим решения для следующего уравнения:

$$\det H(u) = \lambda + \Delta_k u\big(1 - |\nabla_k u|^2\big), \quad u \triangleq u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n > 2, \tag{12}$$

где λ — произвольная постоянная, а константа k принимает одно значение из множества $\mathbb{K} = \{2, \ldots, n\}$ и приняты следующие обозначения:

$$\Delta_k u = \Delta u - \sum_{i=k}^{n} u_{x_i x_i}, \quad |\nabla_k u|^2 = |\nabla u|^2 - \sum_{i=k}^{n} u_{x_i}^2.$$

Как видно, (12) является непосредственным обобщением уравнения (11) на n-мерный случай. Отметим также, что в двумерном случае (8) при $\delta = 1$ является частным случаем уравнения

$$\frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{\left(1 + u_x^2 + u_y^2\right)^q} = a(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx} + 2b(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy} + \\ + c(x, y, u, u_x, u_y)u_{yy} + G\left(x, y, u, u_x, u_y\right), \quad 0 \leqslant q \leqslant 1, \quad (13)$$

которое встречается в работе [20, с. 1010] и относится к уравнениям вида (2). Действительно, полагая

$$a = c \equiv \beta, \quad b \equiv 0, \quad G(x, y, u, u_x, u_y) = \frac{g(u)}{\left(1 + u_x^2 + u_y^2\right)^q},$$

уравнение (13) можно переписать как

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = g(u) + \beta(u_{xx} + u_{yy})\left(1 + u_x^2 + u_y^2\right)^q.$$

Для линейной функции $f(s) = \beta s$ двумерный аналог уравнения (9) вида

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = \lambda + \beta(u_{xx} + u_{yy})$$

является частным случаем классического уравнения Монжа–Ампера (3). Если функция $u(\mathbf{x})$ имеет смысл температуры, то правая часть уравнения (10) совпадает с правой частью уравнения нелинейной теплопроводности, где $K(u)$ — коэффициент теплопроводности, а $Q(u)$ — функция источника тепла.

Основной целью данной статьи является построение точных многомерных решений уравнений (8)–(10), (12) с использованием квадратичной функции вида

$$\xi = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{14}$$

где A — вещественная числовая матрица размера $n \times n$. Ранее авторами квадратичная функция (14) успешно использовались для построения точных многомерных решений систем уравнений реакции–диффузии, уравнения нелинейной диффузии типа пантографа с переменным запаздыванием [21, 22].

§ 2. Основные результаты

Для построения точных решений уравнений (8)–(10), (12) нам понадобится формула, которая является результатом следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $F(z)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая вещественная функция. Тогда для любой симметрической матрицы A задающей квадратичную форму $\xi = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$ для гессиана функции $F(\xi) = F\left(\frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x})\right)$ справедлива формула*

$$\det\left(\frac{\partial^2 F(\xi)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=\overline{1,n}} = \det A\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{n-1}\left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right], \tag{15}$$

где $\det A$ *— определитель матрицы* A.

Доказательство этой леммы приведено в [1]. Точные решения уравнения (8) будем отыскивать в следующем виде

$$u(\mathbf{x}) = F(\xi), \tag{16}$$

где аргумент ξ задается формулой (14), а условия на функцию $F(\xi)$ определены в лемме 1. Если подобрать матрицу A в классе симметрических матриц таким образом, чтобы для функции (14) выполнялось равенство

$$|\nabla\xi|^2 = \sigma\xi, \tag{17}$$

где $\sigma \neq 0$ — некоторая постоянная, то с помощью анзаца (16) возможно осуществить редукцию уравнений в частных производных (8)–(10) к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) относительно искомой функции $F(\xi)$. Покажем это, предварительно доказав следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть E_m — диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ единиц и $n - m$ нулей, S — произвольная ортогональная матрица. Тогда для функции* (14) *с симметрической матрицей A следующего вида*

$$A = \frac{\sigma}{2} S E_m S^T \tag{18}$$

справедливо равенство (17).

Доказательство. Непосредственным вычислением получаем цепочку равенств

$$|\nabla\xi|^2 = (A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = \left(A^2\mathbf{x}, \mathbf{x}\right) = \left(\frac{\sigma^2}{4}(SE_mS^T)^2\mathbf{x}, \mathbf{x}\right) = \frac{\sigma^2}{4}\left(SE_m^2S^T\mathbf{x}, \mathbf{x}\right) =$$
$$= \frac{\sigma}{2}\left(\frac{\sigma}{2}SE_mS^T\mathbf{x}, \mathbf{x}\right) = \frac{\sigma}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sigma\xi. \qquad \square$$

При $m < n$ определитель матрицы (18) равен нулю. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать случай $E_m = E_n = E$, где E — единичная матрица. При этом имеем

$$\xi(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{4}\|\mathbf{x}\|^2, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{19}$$

Здесь $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Если функция $\xi(\mathbf{x})$ задается соотношением* (19)*, а функция $F(\xi)$ удовлетворяет* ОДУ (20) (*соответственно* (21)*,* (22))

$$\left(\frac{\sigma}{2}\right)^n \left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{n-1}\left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right) = g(F) +$$
$$+ \frac{\beta\sigma}{2}\left(n\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right)\left(1 + \delta\sigma\xi\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2\right)^q, \quad \delta = \pm 1, \tag{20}$$

$$\left(\frac{\sigma}{2}\right)^n \left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{n-1}\left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right) = \lambda + f\left(\frac{\sigma}{2}\left(n\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right)\right), \tag{21}$$

$$\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{n-1}\left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right) = K(F)\left(n\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right) +$$
$$+ 2\xi K'(F)\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2 + \frac{2}{\sigma}Q(F), \tag{22}$$

где $K'(F) = dK(F)/dF$, то обобщенное уравнение типа Монжа–Ампера вида (8) (*соответственно* (9)*,* (10)) *обладает точным многомерным решением* (16).

Доказательство. Пусть функция $\xi(\mathbf{x})$ определяется соотношением (19), тогда из формулы (16) прямыми вычислениями находим

$$|\nabla u|^2 = \sigma\xi\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2, \quad \Delta u = \frac{\sigma}{2}\left(n\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right), \quad \det A = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n, \quad \mathrm{tr}\,(A) = \frac{n\sigma}{2},$$

где $\mathrm{tr}\,(A)$ — след матрицы A. С учетом этих соотношений и формулы (15), после подстановки решения (16) в уравнение (8) (соответственно, уравнение (9) или (10)), придем к ОДУ (20) (соответственно, ОДУ (21) или (22)). Что и требовалось доказать. □

Построение общих решений нелинейных неавтономных ОДУ (20)–(22) при произвольных функциях $g(F)$, $f(s)$, $K(F)$, $Q(F)$ и произвольных значениях параметров представляет собой весьма трудную задачу. Поэтому в дальнейшем ограничимся построением некоторых частных решений уравнений (20)–(22) при определенных значениях параметров и заданных функциях $g(F)$, $f(s)$, $K(F)$, $Q(F)$.

Утверждение 1. *Пусть $n > 2$ и $g(F) = \alpha F^p$, $p = \dfrac{n^2}{n-2}$. Тогда ОДУ (20) имеет частное решение $F(\xi) = \mu\xi^\nu$, $\nu = \dfrac{2-n}{2}$, где константа μ есть вещественный корень уравнения*

$$\alpha\mu^{p-n} + (-1)^n\left(\frac{\sigma}{2}\right)^n(n-1)\left(\frac{n}{2}-1\right)^n = 0.$$

Утверждение 2. *Пусть $n = 2$, $g(F) = \alpha\exp(pF)$ и для параметров уравнения имеет место равенство $\alpha p^2 + \sigma^2 = 0$. Тогда ОДУ (20) имеет частное решение $F(\xi) = -\dfrac{2}{p}\ln(\xi)$.*

Утверждение 3. *Пусть некоторая постоянная $\theta > 0$ удовлетворяет уравнению*

$$\left(\frac{\theta}{n}\right)^n = \lambda + f(\theta).$$

Тогда ОДУ (21) имеет частное решение $F(\xi) = \dfrac{2\theta}{\sigma n}\xi + C_1$, где C_1 — произвольная постоянная.

Пусть $f(s) = \beta s^p$, где $\beta \neq 0$ — некоторая постоянная, тогда ОДУ (21) примет следующий вид

$$\left(\frac{\sigma}{2}\right)^n\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{n-1}\left(\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right) = \lambda + \beta\left(\frac{\sigma}{2}\right)^p\left(n\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right)^p. \tag{23}$$

В частном случае $n = 2$ и $p = 1$ ОДУ (23) имеет общее решение вида

$$F(\xi) = \frac{2\xi\beta}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}\sqrt{4(\beta^2+\lambda)\xi^2 + C_1\xi} +$$
$$+ \frac{C_1}{4\sigma\sqrt{\beta^2+\lambda}}\ln\left(\sqrt{4(\beta^2+\lambda)\xi^2 + C_1\xi} + \frac{8(\beta^2+\lambda)\xi + C_1}{4\sqrt{\beta^2+\lambda}}\right) + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. При $n = 2$, $p = 2$, $\beta = 1/4$ и $\lambda < 0$ получим общее решение ОДУ (23) следующего вида

$$F(\xi) = \frac{2\sqrt{-\lambda}}{\sigma}\xi\ln\xi + C_1\xi + C_2.$$

Утверждение 4. *Пусть в уравнении (10) функция $K(u) = u^p$, $Q(u) \equiv 0$, тогда ОДУ (22), в котором $K(F) = F^p$, $K'(F) = pF^{p-1}$, имеет следующие частные решения*

$$F(\xi) = \left(\frac{2n^{\frac{1}{n-1}}}{(n-1)\sigma} \big(C_1 - (p+1-n)\xi\big) \right)^{-\frac{n-1}{p+1-n}}, \quad p \neq n-1,$$
$$F(\xi) = C_2 \exp\left(\frac{2}{\sigma} n^{\frac{1}{n-1}} \xi \right), \quad p = n-1,$$

где $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ — произвольные постоянные.

Утверждение 5. *Пусть в уравнении (10) функция $K(u) = u^p$, $Q(u) = \beta u^q$, $q = np/(n-1)$, тогда ОДУ (22), в котором $K(F) = F^p$, $K'(F) = pF^{p-1}$, $Q(F) = F^q$, имеет частное решение*

$$F(\xi) = \mu \xi^{\nu}, \quad \nu = -\frac{n-1}{p+1-n}, \quad p \neq n-1,$$

где константа $\mu \neq 0$ и параметры уравнения удовлетворяют следующему равенству

$$\sigma n(n-1)(n+p-1)\mu^{p+1-n} + 2\beta(n-p-1)^2 \mu^{-\frac{n(n-p-1)}{n-1}} -$$
$$- \frac{\sigma^n (n-1)^n}{2^{n-1}} \left[2(n-1)(n-p-1)^{1-n} - (n-p-1)^{2-n} \right] = 0.$$

Утверждение 6. *Пусть в уравнении (10) функция $K(u) = u^{n-1}$, $Q(u) = \beta u^{n-2}$, тогда ОДУ (22), в котором $K(F) = F^{n-1}$, $K'(F) = (n-1)F^{n-2}$, $Q(F) = \beta F^{n-2}$, имеет частное решение*

$$F(\xi) = \sqrt{-\frac{2\beta}{\sigma(n-1)}}\, \sqrt{\xi}.$$

Утверждение 7. *Пусть в уравнении (10) функция $K(u) = e^{pu}$, $Q(u) \equiv 0$, тогда ОДУ (22), в котором $K(F) = e^{pF}$, $K'(F) = pe^{pF}$, $Q(F) \equiv 0$, а параметры p и σ удовлетворяют уравнению*

$$(-1)^n \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{n-1}{p} \right)^{n-1} + n = 0,$$

обладает частным решением $F(\xi) = \dfrac{1-n}{p} \ln(\xi)$.

Утверждение 8. *Пусть $n > 2$ и в уравнении (10) функция $K(u) = e^{pu}$, $Q(u) = \beta e^{qu}$, тогда ОДУ (22), в котором $K(F) = e^{pF}$, $K'(F) = pe^{pF}$, $Q(F) = \beta e^{qF}$, а параметры p, β и σ удовлетворяют уравнению*

$$(-1)^n \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{n-2}{p} \right)^{n} + 2^n \beta = 0,$$

обладает частным решением $F(\xi) = -\dfrac{n-2}{2p} \ln(\xi)$.

Утверждение 9. *Пусть* $n = 2$ *и в уравнении* (10) *функция* $K(u) = e^{pu}$, $Q(u) = \beta e^{2pu}$, *тогда ОДУ* (22), *в котором* $K(F) = e^{pF}$, $K'(F) = pe^{pF}$, $Q(F) = \beta e^{2pF}$, *а параметры* p, β *и* σ *удовлетворяют уравнению*

$$\sigma + 4p + 2\beta p^2 = 0,$$

обладает частным решением $F(\xi) = -\dfrac{1}{p}\ln(\xi)$.

В справедливости утверждений 1–9 можно убедиться непосредственной подстановкой решений в соответствующие уравнения.

Так как по условию теоремы 1 функция $\xi(\mathbf{x})$ задается формулой (19), то эта теорема и утверждения 1–9 дают только радиально-симметричные решения исследуемых уравнений. Однако, ниже мы покажем, что при определенных предположениях на симметричную матрицу A существуют и анизотропные по пространственным переменным точные решения уравнений (8)–(10) вида (16).

Теорема 2. *Если* $g(u) \equiv \lambda \neq 0$, *а также невырожденная симметричная матрица* A *с нулевым следом и число* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *удовлетворяют равенству*

$$\alpha^n \det A = \lambda, \tag{24}$$

то обобщенное уравнение типа Монжа–Ампера (8) *имеет точное решение*

$$u(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}). \tag{25}$$

Доказательство. Для функции $F(\xi) = \alpha\xi$ левая часть уравнения (8) на решении (25) с невырожденной симметричной матрицей A, в силу формулы (15), является константой вида $\alpha^n \det A$. Из условий теоремы $g(u) \equiv \lambda$ и $\operatorname{tr}(A) = 0$ следует, что оператор Лапласа от функции (25) обращается в ноль, а правая часть уравнения (8) для этой функции равна константе λ. Таким образом, если выполнено равенство (24), то функция (25) обращает уравнение (8) в тождество. Теорема доказана. □

Теорема 3. *Если симметричная матрица* A *и число* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *удовлетворяют равенству*

$$\alpha^n \det A = \lambda + f\big(\alpha \operatorname{tr}(A)\big), \tag{26}$$

то обобщенное уравнение типа Монжа–Ампера (9) *имеет точное решение* (25).

Доказательство. После подстановки квадратичной функции (25) с произвольной симметрической матрицей A и свободной константой $\alpha \neq 0$ в уравнение (9) с учетом леммы 1 придем к равенству (26). Таким образом, функция (25), симметричная матрица A и константа α которой удовлетворяют равенству (26), обращает уравнение (9) в тождество. При этом допустим и случай, когда $\lambda = 0$, и $\det A = 0$, $\operatorname{tr}(A) = 0$, $f(0) = 0$. В этом случае, с учетом леммы 1, обе части уравнения (9) тождественно обращаются в ноль на всех функциях вида (25). Теорема доказана. □

Следствие 1. *Если функция* $f(s)$ *в уравнении* (9) *является полиномом нечетной степени* $m > n$, *то уравнение* (9) *всегда имеет решения вида* (25).

Действительно, в этом случае взяв в (25) произвольную симметричную матрицу A с ненулевым следом, мы из (26) получим алгебраическое уравнение нечетной степени относительно α, которое имеет по крайней мере один вещественный корень.

Следствие 2. *Если число координат $n = \dim(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нечетно и $f(s)$ в уравнении (9) является полиномом степени $m < n$, то уравнение (9) всегда имеет решения вида (25).*

Теорема 4. *Если правая часть уравнения (9) удовлетворяет равенству*

$$\lambda + f(0) = 0,$$

то это уравнение имеет точные решения вида (25), где A — произвольная симметричная матрица, определитель и след которой равны нулю, а α — произвольное вещественное число.

Доказательство. Из условия $\det A = 0$ и леммы 1 следует, что левая часть уравнения (9) тождественно обращается в ноль на всех функциях вида (25), отвечающих условиям данной теоремы. А из условия $\mathrm{tr}\,(A) = 0$ следует, что тождественно обращается в ноль правая часть уравнения (9) на всех функциях вида (25), отвечающих условиям данной теоремы. Теорема доказана. □

Теорема 5. *Если $K(u) = u^p$, $Q(u) \equiv 0$, A — произвольная симметричная матрица, определитель и след которой равны нулю, то обобщенное уравнение типа Монжа–Ампера (10) имеет следующие точные решения*

$$u(\mathbf{x}) = (\mu\xi)^{\frac{1}{p+1}}, \quad p \neq -1, \tag{27}$$

$$u(\mathbf{x}) = \nu \exp(\mu\xi), \quad p = -1, \tag{28}$$

где $\mu \neq 0$, $\nu > 0$ — произвольные постоянные, а функция ξ задается формулой (14). При этом в случае $p = 1$ от условия $\det A = 0$ для решения (27) можно отказаться.

Доказательство. Пусть $K(u) = u^p$ и $Q(u) \equiv 0$. Тогда после подстановки функций (27), (28) в уравнение (10) с учетом леммы 1 придем, соответственно, к следующим соотношениям

$$\det A \frac{(1-p)\mu^{\frac{n}{p+1}}}{(p+1)^{n+1}} \xi^{-\frac{pn}{p+1}} = \frac{\mu}{p+1} \mathrm{tr}\,(A), \quad p \neq -1,$$
$$\det A (\nu\mu)^n (1 + 2\mu\xi) \exp(n\mu\xi) = \mu \mathrm{tr}\,(A).$$

По условиям теоремы эти равенства обращаются в тождества. Что и требовалось доказать. □

Теорема 6. *Если $K(u) = e^{pu}$, $Q(u) \equiv 0$, A — произвольная симметричная матрица, определитель и след которой равны нулю, то обобщенное уравнение типа Монжа–Ампера (10) имеет следующее точное решение*

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{p} \ln\left(\frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x})\right). \tag{29}$$

Доказательство. Уравнение (10) с функциями $K(u) = e^{pu}$, $Q(u) \equiv 0$ можно переписать как

$$\det H(u) = e^{pu}\big(\Delta u + p|\nabla u|^2\big). \tag{30}$$

Так как по условию теоремы $\det A = 0$, то в силу леммы 1 левая часть уравнения (30) обращается тождественно в ноль на всех функциях вида (29). В свою очередь, при $\mathrm{tr}\,(A) = 0$ для выражения стоящего в скобках правой части уравнения (30), после подстановки туда функции (29), получим цепочку равенств

$$\Delta u + p|\nabla u|^2 = \frac{1}{p}\frac{\Delta\xi}{\xi} - \frac{1}{p}\frac{|\nabla\xi|^2}{\xi^2} + p\frac{1}{p^2}\frac{|\nabla\xi|^2}{\xi^2} = \frac{1}{p}\frac{\Delta\xi}{\xi} = \frac{1}{p}\frac{\mathrm{tr}\,(A)}{\xi} \equiv 0.$$

Здесь для удобства записи использована функция ξ вида (14). Теорема доказана. □

Теорема 7. *Если $K(u) = u^p$, $Q(u) = u^{-np}$, A — невырожденная симметричная матрица с нулевым следом, число $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и параметр $p \neq -1$ удовлетворяют равенству*

$$- \det A\big[(p+1)^{-n} - 2(p+1)^{-1-n}\big]\mu^n = \beta, \tag{31}$$

то обобщенное уравнение типа Монжа–Ампера (10) *имеет следующее точное решение*

$$u(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mu}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x})\right)^{\frac{1}{p+1}}. \tag{32}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $K(u) = u^p$ и $Q(u) = u^{-np}$. Тогда после подстановки функции (32) в уравнение 10 с учетом леммы 1 придем к равенству

$$- \det A\big[(p+1)^{-n} - 2(p+1)^{-1-n}\big]\mu^{\frac{n}{p+1}}\left(\frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x})\right)^{-\frac{np}{p+1}} =$$
$$= \frac{\mu}{p+1}\mathrm{tr}\,(A) + \beta\mu^{-\frac{np}{p+1}}\left(\frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x})\right)^{-\frac{np}{p+1}}.$$

Так как по условию теоремы $\mathrm{tr}\,(A) = 0$ и выполнено соотношение (31), то последнее равенство обращается в тождество. Теорема доказана. □

Теорема 8. *Если $K(u) = e^{pu}$, $Q(u) = e^{-npu}$, A — невырожденная симметричная матрица с нулевым следом, число $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и параметры p, β удовлетворяют равенству*

$$-\left(\frac{1}{p}\right)^n \det A = \frac{\beta}{\mu^n}, \tag{33}$$

то обобщенное уравнение типа Монжа–Ампера (10) *имеет точное решение*

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{p}\ln\left(\frac{\mu}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x})\right). \tag{34}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $K(u) = e^{pu}$, $Q(u) = e^{-npu}$. Тогда после подстановки функции (34) в уравнение (10) с учетом леммы 1 придем к равенству

$$-\left(\frac{1}{p}\right)^n \det A\left(\frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x})\right)^{-n} = \frac{\mu}{p}\mathrm{tr}\,(A) + \frac{\beta}{\mu^n}\left(\frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x})\right)^{-n}.$$

Так как по условию теоремы $\mathrm{tr}\,(A) = 0$ и выполнено соотношение (33), то последнее равенство обращается в тождество. Теорема доказана. □

§ 3. Примеры

В этом параграфе приведем примеры только анизотропных по пространственным переменным точных решений уравнений (8)–(10), (12). При этом радиально-симметричные решения указанных уравнений легко получить с использованием теоремы 1 и утверждений 1–9.

Пример 1. В этом примере построим анизотропное решение уравнения (12), которое будем отыскивать в виде (16). При этом аргумент функции $F(\xi)$ задается формулой (14), в которой матрица A является произвольной невырожденной симметрической. После подстановки анзаца (16) в уравнение (12) с учетом формулы (15) придем к соотношению

$$\det A \left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{n-1}\left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right] = \lambda +$$
$$+\left[\frac{dF}{d\xi}\left(\mathrm{tr}\,(A) - \sum_{i=k}^{n} a_{ii}\right) + \frac{d^2F}{d\xi^2}\left(|\nabla\xi|^2 - |\nabla_k\xi|^2\right)\right]\left[1 - \left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2\left(|\nabla\xi|^2 - |\nabla_k\xi|^2\right)\right]. \tag{35}$$

Нетрудно заметить, что при выполнении равенств

$$\mathrm{tr}\,(A) = \sum_{i=k}^{n} a_{ii}, \quad \left(\frac{\lambda}{\det A}\right)^{1/n} = \mu, \tag{36}$$

функция $F(\xi) = \mu\xi$ обращает равенство (35) в тождество. Таким образом, точным решением уравнения (12) является функция

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\det A}\right)^{1/n}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}),$$

при этом след матрицы A удовлетворяет условию (36). Для уравнения (12) в трехмерном координатном пространстве рассмотрим два случая: 1) $k = 3$ и 2) $k = 2$.

(1) Пусть $k = 3$ и возьмем следующую матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -12 & -1 \\ -12 & -8 & 10 \\ -1 & 10 & -5 \end{pmatrix}, \quad \det A = 488, \quad \mathrm{tr}\,(A) = a_{33} = -5.$$

Уравнение (12) в этом случае примет вид

$$u_{xx}u_{yy}u_{zz} + 2u_{xy}u_{xz}u_{yz} - u_{xx}u_{yz}^2 - u_{yy}u_{xz}^2 - u_{zz}u_{xy}^2 = \lambda + (u_{xx} + u_{yy})(1 - u_x^2 - u_y^2),$$

оно имеет следующее точное анизотропное по пространственным переменным решение

$$u(x, y, z) = \frac{61^{2/3}\lambda^{1/3}}{244}(8x^2 - 8y^2 - 5z^2 - 24xy - 2xz + 20yz).$$

(2) Пусть $k = 2$ и будем использовать следующую матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -12 & -1 \\ -12 & -6 & 10 \\ -1 & 10 & -3 \end{pmatrix}, \quad \det A = 678, \quad \mathrm{tr}\,(A) = a_{22} + a_{33} = -9.$$

Уравнение (12) в этом случае запишется как

$$u_{xx}u_{yy}u_{zz} + 2u_{xy}u_{xz}u_{yz} - u_{xx}u_{yz}^2 - u_{yy}u_{xz}^2 - u_{zz}u_{xy}^2 = \lambda + u_{xx}(1 - u_x^2),$$

оно обладает точным анизотропным по пространственным переменным решением

$$u(x, y, z) = \frac{678^{2/3}\lambda^{1/3}}{1344}(-6y^2 - 3z^2 - 24xy - 2xz + 20yz).$$

Пример 2. Пусть симметричная матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \det A = 27, \quad \mathrm{tr}\,(A) = 0. \tag{37}$$

Тогда по теореме 2 обобщенное уравнение Монжа–Ампера вида

$$\det H(u) = \lambda + \beta \Delta u \big(1 + \delta |\nabla u|^2\big)^q, \quad u = u(x_1, x_2, x_3), \quad \delta = \pm 1,$$

в трехмерном координатном пространстве для любого $q > 0$ имеет точное анизотропное по пространственным переменным решение вида

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{\lambda^{1/3}}{6}(-2x_1^2 + 5x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3).$$

Пример 3. В силу теоремы 3 следующие обобщенные уравнения Монжа–Ампера

$$\det H(u) = \lambda + \beta (\Delta u)^3, \quad u \triangleq u_1(x_1, x_2, x_3),$$
$$\det H(u) = \lambda + \beta \exp(\Delta u), \quad u \triangleq u_2(x_1, x_2, x_3),$$

в трехмерном координатном пространстве обладают соответственно точными анизотропными решениями

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{488 + 125\beta}\right)^{1/3}(8x_1^2 - 8x_2^2 - 5x_3^2 - 24x_1x_2 - 2x_1x_3 + 20x_2x_3,$$
$$u_2(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\lambda + \beta}{227}\right)^{1/3}\left(-x_1^2 - \frac{3}{2}\,x_2^2 + \frac{5}{2}\,x_3^2 + x_1x_2 + 4x_1x_3 - 7x_2x_3\right).$$

Пример 4. Пусть $n = 3$ и в формуле (25) матрица A задается формулой

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 1 & -3 + \dfrac{\sqrt{345}}{6} \\ 1 & \dfrac{1}{3} & -1 \\ -3 + \dfrac{\sqrt{345}}{6} & -1 & -\dfrac{5}{6} \end{pmatrix}, \quad \det A = 0, \quad \mathrm{tr}\,(A) = 0, \tag{38}$$

тогда по теореме 4 обобщенное уравнение Монжа–Ампера

$$\det H(u) = \cos(\Delta u) - 1, \quad u \triangleq u(x_1, x_2, x_3),$$

в трехмерном координатном имеет точное анизотропное решение

$$u(x_1, x_2, x_3) = \alpha\left(\frac{1}{4}\,x_1^2 + \frac{1}{6}\,x_2^2 - \frac{5}{12}\,x_3^2 + x_1x_2 - \left(3 - \frac{\sqrt{345}}{6}\right)x_1x_3 - x_2x_3\right),$$

где $\alpha \neq 0$ — произвольная постоянная.

Пример 5. Пусть $n = 3$, а матрица A задается формулой (38), тогда по теореме 5 обобщенное уравнение типа Монжа–Ампера (10) с $K(u) = u^p$, $Q(u) \equiv 0$ и параметром $p \neq -1$

и $p = -1$ в трехмерном координатном пространстве обладает, соответственно, точными анизотропными по пространственным переменным решениями

$$u_1(x_1,x_2,x_3) = \left[\mu\left(\frac{1}{4}\,x_1^2 + \frac{1}{6}\,x_2^2 - \frac{5}{12}\,x_3^2 + x_1x_2 - \left(3 - \frac{\sqrt{345}}{6}\right)x_1x_3 - x_2x_3\right)\right]^{\frac{1}{p+1}},$$

$$u_2(x_1,x_2,x_3) = \exp\left(\mu\left(\frac{1}{4}\,x_1^2 + \frac{1}{6}\,x_2^2 - \frac{5}{12}\,x_3^2 + x_1x_2 - \left(3 - \frac{\sqrt{345}}{6}\right)x_1x_3 - x_2x_3\right)\right),$$

где $\mu \neq 0$, $\nu > 0$ — произвольные постоянные. Пусть теперь матрица A задается формулой (37), тогда по теореме 7 обобщенное уравнение типа Монжа–Ампера (10) с $K(u) = u^p$, $Q(u) = \beta u^{-3p}$ и параметром $p \neq -1$, $p \neq 1$ в трехмерном координатном пространстве обладает точным анизотропным по пространственным переменным решением

$$u(x_1,x_2,x_3) = \left[\mu\left(-x_1^2 + \frac{5}{2}\,x_2^2 - \frac{3}{2}\,x_3^2 - x_1x_3 + x_2x_3\right)\right]^{\frac{1}{p+1}},$$

где параметр μ задается формулой

$$\mu = \frac{(p+1)}{3(p-1)}\big(-\beta(p+1)(p-1)^2\big)^{1/3}.$$

По теореме 8 обобщенное уравнение типа Монжа–Ампера (10) с $K(u) = \exp(pu)$, $Q(u) = \beta\exp(-3pu)$ в трехмерном координатном пространстве обладает точным анизотропным по пространственным переменным решением

$$u(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{p}\ln\left(\frac{1}{3}\big(-\beta p^3\big)^{1/3}\left(-x_1^2 + \frac{5}{2}\,x_2^2 - \frac{3}{2}\,x_3^2 - x_1x_3 + x_2x_3\right)\right).$$

Для построения этого решения мы также использовали матрицу A вида (37).

§ 4. Заключение

В статье построены как радиально симметричные, так и анизотропные по пространственным переменным многомерные точные решения новых нелинейных обобщенных стационарных уравнений типа Монжа–Ампера. Полученные результаты представляют теоретический интерес, поскольку их можно использовать для изучения качественных свойств, анализа выполнения краевых условий, оценки скорости роста и т. д. Найденные точные решения также можно использовать в качестве тестовых при разработке численных методов и алгоритмов построения приближенных решений краевых задач. В качестве дальнейшего направления развития результатов целесообразно рассмотреть возможность использования предложенных здесь конструкций для построения точных решений для нестационарных вариантов изученных в статье уравнений.

Финансирование. Работа выполнена за счет субсидии Минобрнауки России в рамках проектов № 121041300058-1 и № 121032400051-9.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Косов А. А., Семенов Э. И. О точных решениях многомерного обобщенного уравнения Монжа–Ампера // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60. № 10. С. 1334–1349. https://doi.org/10.31857/S0374064124100046

2. Монж Г. Приложение анализа к геометрии. М.–Л.: ОНТИ, 1936.
3. Ampère A. Application de la théorie sur les intégrales des équations aux différentielles partielles du premier et second ordre // Journal de l'École Polytechnique. 1820. Vol. 11. P. 1–188.
4. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974.
5. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
6. Мелешко С. В., Пухначев В. В. Об одном классе частично инвариантных решений уравнений Навье–Стокса // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40. Вып. 2. С. 24–33. https://www.mathnet.ru/rus/pmtf3051
7. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of nonlinear partial differential equations. New York: Chapman and Hall/CRC, 2012. https://doi.org/10.1201/b11412
8. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Нелинейные уравнения математической физики. Часть 2. М.: Изд-во Юрайт, 2023.
9. Аксенов А. В., Полянин А. Д. Групповой анализ, редукции и точные решения уравнения Монжа–Ампера магнитной гидродинамики // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60. № 6. С. 750–763. https://doi.org/10.31857/S0374064124060032
10. Polyanin A. D., Aksenov A. V. Unsteady magnetohydrodynamics PDE of Monge–Ampère type: symmetries, closed-form solutions, and reductions // Mathematics. 2024. Vol. 12. Issue 13. 2127. https://doi.org/10.3390/math12132127
11. Кушнер А. Г. Контактная линеаризация уравнений Монжа–Ампера и инварианты Лапласа // Доклады Академии наук. 2008. Т. 422. № 5. С. 597–600. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=11533466
12. Кушнер А. Г. Приведение гиперболических уравнений Монжа–Ампера к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами // Доклады Академии наук. 2008. Т. 423. № 5. С. 609–611. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=11634188
13. Рубина Л. И., Ульянов О. Н. Об одном подходе к решению неоднородных уравнений в частных производных // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 3. С. 355–364. https://doi.org/10.20537/vm170306
14. Bolin B. An improved barotropic model and some aspects of using the balance equation for three-dimensional flow // Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography. 1956. Vol. 8. Issue 1. P. 61–75. https://doi.org/10.3402/tellusa.v8i1.8941
15. Розендорн Э. Р. Редукция одной задачи метеорологии к геометрической задаче // Успехи математических наук. 1980. Т. 35. Вып. 6 (216). С. 167–168. https://www.mathnet.ru/rus/rm3895
16. Розендорн Э. Р. Поверхности отрицательной кривизны // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». 1989. Т. 48. С. 98–195. https://www.mathnet.ru/rus/intf145
17. Trudinger N. S., Wang Xu-Jia. The Monge–Ampère equation and its geometric applications // Handbook of geometric analysis. Vol. 1. International Press, 2008. P. 467–524.
18. Погорелов А. В. Многомерное уравнение Монжа–Ампера. М.: Наука, 1988.
19. Леви Г. Априорные ограничения для решений уравнений Монжа–Ампера // Успехи математических наук. 1948. Т. 3. Вып. 2 (24). С. 191–215. https://www.mathnet.ru/rus/rm8697
20. Бакельман И. Я., Красносельский М. А. Нетривиальные решения задачи Дирихле для уравнений с оператором Монжа–Ампера // Доклады Академии наук СССР. 1961. Т. 137. № 5. С. 1007–1010. https://www.mathnet.ru/rus/dan24846
21. Косов А. А., Семенов Э. И., Тирских В. В. О многомерных точных решениях одной нелинейной системы реакции–диффузии // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 2. С. 225–239. https://doi.org/10.35634/vm230203
22. Косов А. А., Семенов Э. И. О многомерных точных решениях уравнения нелинейной диффузии типа пантографа с переменным запаздыванием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. № 3. С. 359–374. https://doi.org/10.35634/vm240304

Поступила в редакцию 09.02.2025
Принята к публикации 15.05.2025

Косов Александр Аркадьевич, к. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН им. В. М. Матросова, 664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1352-1828
E-mail: kosov_idstu@mail.ru

Семенов Эдуард Иванович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН им. В. М. Матросова, 664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9768-9945
E-mail: edwseiz@gmail.com

Цитирование: А. А. Косов, Э. И. Семенов. Обобщенное уравнение типа Монжа–Ампера и его многомерные точные решения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 2. С. 215–230.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2025. Vol. 35. Issue 2. Pp. 215–230.

A. A. Kosov, E. I. Semenov

Generalized Monge–Ampère type equation and its multidimensional exact solutions

Keywords: generalized Monge–Ampère equation, multidimensional exact solutions.

MSC2020: 35J96

DOI: 10.35634/vm250204

Several variants of the multidimensional generalized Monge–Ampère equation are considered containing, in addition to the determinant of the Hessian matrix, also additional terms depending on the Laplace operator and the gradient of the desired function. It is proposed to construct exact solutions in the form of superposition of quadratic form and solutions of ordinary differential equations generated by the initial partial differential equation. We give a number of examples of exact solutions, both radially symmetric and anisotropic, expressed through combinations of elementary functions.

Funding. The work was carried out with a subsidy from the Russian Ministry of Education and Science as part of the projects no. 121041300058-1 and no. 121032400051-9.

REFERENCES

1. Kosov A. A., Semenov E. I. On exact solutions to multidimensional generalized Monge–Ampère equation, *Differential Equations*, 2024, vol. 60, no. 10, pp. 1404–1418. https://doi.org/10.1134/S0012266124100057
2. Monge G. *Feuilles d'analyse appliquée a la géométrie*, Paris: Baudouin, 1801.
3. Ampère A. Application de la théorie sur les intégrales des équations aux différentielles partielles du premier et second ordre, *Journal de l'École Polytechnique*, 1820, vol. 11, pp. 1–188.
4. Pogorelov A. V. *Differentsial'naya geometriya* (Differential geometry), Moscow: Nauka, 1974.
5. Rozhdestvenskii B. L., Yanenko N. N. *Sistemy kvazilineinykh uravnenii i ikh prilozheniya k gazovoi dinamike* (Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics), Moscow: Nauka, 1978.
6. Meleshko S. V., Pukhnachev V. V. One class of partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1999, vol. 40, no. 2, pp. 208–216. https://doi.org/10.1007/BF02468516
7. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of nonlinear partial differential equations*, New York: Chapman and Hall/CRC, 2012. https://doi.org/10.1201/b11412
8. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Nelineinye uravneniya matematicheskoi fiziki. Chast' 2* (Nonlinear equations of mathematical physics. Part 2), Moscow: Urait, 2023.
9. Aksenov A. V., Polyanin A. D. Group analysis, reductions, and exact solutions of the Monge–Ampére equation in magnetic hydrodynamics, *Differential Equations*, 2024, vol. 60, no. 6, pp. 716–728. https://doi.org/10.1134/S001226612406003X
10. Polyanin A. D., Aksenov A. V. Unsteady magnetohydrodynamics PDE of Monge–Ampère type: symmetries, closed-form solutions, and reductions, *Mathematics*, 2024, vol. 12, issue 13, 2127. https://doi.org/10.3390/math12132127
11. Kushner A. G. Contact linearization of Monge–Ampère equations and Laplace invariants, *Doklady Mathematics*, 2008, vol. 78, no. 2, pp. 751–754. https://doi.org/10.1134/S1064562408050293
12. Kushner A. G. Transformation of hyperbolic Monge–Ampère equations into linear equations with constant coefficients, *Doklady Mathematics*, 2008, vol. 78, no. 3, pp. 907–909. https://doi.org/10.1134/S1064562408060264
13. Rubina L. I., Ul'yanov O. N. On one approach to solving nonhomogeneous partial differential equations, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 355–364. https://doi.org/10.20537/vm170306

14. Bolin B. An improved barotropic model and some aspects of using the balance equation for three-dimensional flow, *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*, 1956, vol. 8, issue 1, pp. 61–75. https://doi.org/10.3402/tellusa.v8i1.8941
15. Rozendorn È. R. Reduction of a problem in meteorology to a geometric problem, *Russian Mathematical Surveys*, 1980, vol. 35, issue 6, pp. 101–102. https://doi.org/10.1070/RM1980v035n06ABEH001992
16. Rozendorn E. R. Surfaces of negative curvature, *Geometry III. Theory of surfaces*, Berlin: Springer, 1992, pp. 87–178. https://doi.org/10.1007/978-3-662-02751-6_2
17. Trudinger N. S., Wang Xu-Jia. The Monge–Ampère equation and its geometric applications, *Handbook of geometric analysis. Vol. 1*, International Press, 2008, pp. 467–524.
18. Pogorelov A. V. *Mnogomernoe uravnenie Monzha–Ampera* (Multidimensional Monge–Ampère equation), Moscow: Nauka, 1988.
19. Lewy H. A priori limitations for solutions of Monge–Ampère equations, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1935, vol. 37, no. 3, pp. 417–434. https://doi.org/10.2307/1989717
20. Bakel'man I. Ya., Krasnosel'skii M. A. Nontrivial solutions of the Dirichlet's problem for equations with the Monge–Ampère operator, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1961, no. 2, pp. 369–372. https://zbmath.org/0103.06802
21. Kosov A. A., Semenov È. I., Tirskikh V. V. On multidimensional exact solutions of a nonlinear reaction–diffusion system, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 2, pp. 225–239. https://doi.org/10.35634/vm230203
22. Kosov A. A., Semenov È. I. On multidimensional exact solutions of the nonlinear diffusion equation of the pantograph type with variable delay, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, issue 3, pp. 359–374. https://doi.org/10.35634/vm240304

Received 09.02.2025
Accepted 15.05.2025

Aleksandr Arkad'evich Kosov, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS), ul. Lermontova, 134, Irkutsk, 664033, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1352-1828
E-mail: kosov_idstu@mail.ru

Eduard Ivanovich Semenov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS), ul. Lermontova, 134, Irkutsk, 664033, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9768-9945
E-mail: edwseiz@gmail.com

Citation: A. A. Kosov, E. I. Semenov. Generalized Monge–Ampère type equation and its multidimensional exact solutions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 2, pp. 215–230.