ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2025. Т. 35. Вып. 2. С. 247–260.

УДК 517.97, 539.311

© *Н. П. Лазарев*

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛИНОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ ТРЕЩИНЫ В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО С ДВУМЯ ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ТРЕЩИНАМИ

Рассматривается математическая модель о равновесии упругой пластины с двумя взаимно пересекающимися трещинами. Одна из трещин описывается частью плоскости, перпендикулярной срединной плоскости пластины, а другая — задается гладкой кривой в срединной плоскости. Нелинейность задачи обусловлена условиями непроникания в виде неравенств, заданных на кривых, соответствующих трещинам. Проводится анализ зависимости решений семейства вариационных неравенств от параметра, характеризующего вариацию длины прямолинейной трещины. На основе описанного семейства задач формулируется задача оптимального управления с функционалом качества, определенным с помощью формулы Гриффитса, которая характеризует возможность развития трещины вдоль заданной траектории. При этом управление задается числовым параметром, отвечающим за длину прямолинейной трещины. Доказано существование решения для задачи оптимального управления, установлена непрерывная зависимость решений в пространстве Соболева от изменения параметра длины трещины.

Ключевые слова: вариационное неравенство, пластина Тимошенко, задача оптимального управления, условие непроникания, нелинейные граничные условия, трещина.

DOI: 10.35634/vm250206

Введение

Пластины используются практически во всех областях индустрии, в том числе в военно-промышленной и авиационно-космической отраслях, в строительстве и электронике. Конструкции на основе пластин имеют разнообразную геометрию, их применение часто подразумевает широкий диапазон прикладываемых нагрузок и эксплуатационных условий. Вопросы сохранения стабильного состояния нагруженных пластин, содержащих различные дефекты, представляют высокий интерес с точки зрения инженерных приложений. Немаловажное значение имеют также вопросы изучения управляемого разрушения элементов конструкций с целью минимизации возможного ущерба и предполагаемых последствий, в частности, для сохранения целостности других более важных элементов конструкции. Одним из вариантов управления напряженно-деформированным состоянием конструкции с трещиной является нарушение его целостности, например, высверливание дополнительных отверстий в вершинах трещины (пропила) [1, 2] или проделывание надрезов [3].

Классический подход в моделировании задач, описывающих деформирование тел с трещинами предполагает применение линейных краевых условий в виде равенств [4–7]. Начиная с 1990-х годов весьма активно изучаются нелинейные задачи теории трещин в рамках подхода Синьорини, подразумевающего применение условий непроникания в виде неравенств [8–13].

В случае пластин условия непроникания противоположных берегов трещины ставятся на кривой в срединной плоскости. При этом в отличие от задачи для двумерного тела с трещиной (см., например, [14–16]), граничные условия для трещины в рамках моделей пластин Кирхгофа–Лява [17, 18] или Тимошенко [19, 20] задаются с помощью двух неравенств (которые могут быть записаны в виде одного неравенства с модулем функции).

В рамках вариационных неравенств с односторонними ограничениями типа Синьорини задачи оптимального управления объемными или граничными силами исследованы, например, в [21, 22]; в случаях, когда модели описывают деформирование тел с включениями, были исследованы управление формой [23–25] или расположением включений [26, 27]. В частности, для моделей тел с условиями непроникания на трещине в работах [28, 29] исследованы задачи оптимального управления формой и расположением малого упругого включения, в которых функционал качества определен в соответствии с критерием разрушения Гриффитса. Математические методы численной реализации задач типа Синьорини представлены, например, в [30–32].

В работе [6] для линейной модели, описывающей ортотропную пластину с двумя взаимно-перпендикулярными прямолинейными трещинами, установлена возможность влияния на развитие длины одной из трещин, путем варьирования длины другой, перпендикулярной ей трещины.

В настоящей статье исследуется нелинейная модель о равновесии упругой пластины модели Тимошенко с двумя пересекающимися трещинами. Рассматривается семейство задач, в которых криволинейная трещина является фиксированной, а длина другой, прямолинейной, зависит от параметра. Рассматривая данный параметр как управление, формулируется задача оптимального управления. При этом функционал качества задается с помощью формулы Гриффитса, характеризующей возможность развития трещины вдоль заданной траектории. Найдены геометрические параметры рассматриваемой проблемы, достаточные для разрешимости задачи оптимального управления. Установлена непрерывная зависимость решений в пространстве Соболева от изменения параметра длины трещины. Отметим, что работа является обобщением ранее известных результатов, полученных для двумерной задачи [33].

§ 1. Формулировка математической модели

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей $\Gamma \in C^{0,1}$. Рассмотрим гладкую кривую γ, целиком лежащую в области Ω и определенную соотношением

$$\gamma = \{(x_1, x_2) \,|\, -1 \leqslant x_1 \leqslant 1, \quad x_2 = \mu(x_1)\},$$

где $\mu \in H^3(-1, 2)$. Предположим также, что прямолинейные отрезки Γ_t, определенные равенствами

$$\Gamma_t = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 = 0, -1 \leqslant x_2 \leqslant 1 + t\},$$

лежат строго внутри области Ω (то есть $\overline{\Gamma}_t \subset \Omega$) для всех $t \in [0, T]$, где T — заданное положительное число. Будем предполагать, что кривые Γ_T и γ пересекаются в единственной точке $x^0 = (0, 0)$.

Предполагаем, что кривые γ, Γ_T можно продолжить до пересечения с границей Γ так, чтобы область Ω разбивалась на четыре односвязные области Ω_i, $i = 1, \ldots, 4$, с липшицевыми границами так, чтобы $\operatorname{meas}(\partial\Omega_i \cap \Gamma) > 0$, $i = 1, \ldots, 4$ (см. рис. 1).

Это условие позволяет обеспечить выполнение неравенств Корна и Пуанкаре в нелипшицевых областях $\Omega_\gamma^t = \Omega \backslash (\overline{\gamma} \cup \overline{\Gamma}_t)$, $t \in [0, T]$, при выполнении однородных условий Дирихле на внешней границе.

Пусть $t \in [0, T]$ — фиксированное число. Рассмотрим модель пластины с постоянной толщиной 2. Предположим, что в исходном недеформированном состоянии пластина, содержащая две взаимно пересекающиеся трещины, задается в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ множеством $\Omega_\gamma^t \times [-1, 1]$. При этом цилиндрические поверхности $\gamma \times [-1, 1]$, $\Gamma_t \times [-1, 1]$ соответствуют трещинам (разрезам) нулевой ширины.

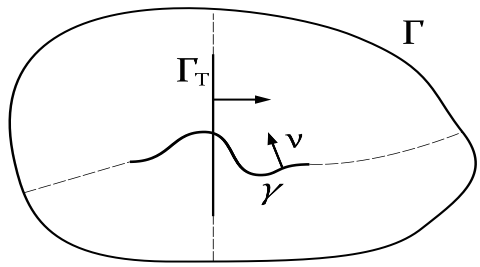

Рис. 1. Разбиение области Ω

Обозначим через $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{U}, u)$ вектор перемещений точек срединной поверхности, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, где $\boldsymbol{U} = (u_1, u_2)$ и u — горизонтальные и вертикальные перемещения, соответственно. Углы поворота нормальных сечений обозначим через $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) = (\phi_1, \phi_2)$.

Введем для произвольного фиксированного $t \in [0, T]$ соответствующее функциональное пространство, в котором будет сформулирована задача о равновесии пластины. Пусть подпространство $H^{1,0}(\Omega_\gamma^t)$ пространства Соболева $H^1(\Omega_\gamma^t)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на Γ, то есть

$$H^{1,0}(\Omega_\gamma^t) = \{v \in H^1(\Omega_\gamma^t) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Понадобится следующее пространство

$$H(\Omega_\gamma^t) = H^{1,0}(\Omega_\gamma^t)^5,$$

снабженное стандартной нормой $\|\cdot\|_t = \|\cdot\|_{H(\Omega_\gamma^t)}$.

Предполагаем, что пластина изготовлена из однородного трансверсально-изотропного упругого материала, который подчиняется закону Гука. Тензоры, описывающие деформацию пластины $\varepsilon(\boldsymbol{\psi}) = \{\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\psi})\}$, $\varepsilon(\boldsymbol{W}) = \{\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W})\}$, $i, j = 1, 2$, выражаются следующими формулами:

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}\right), \quad \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right), \quad i, j = 1, 2.$$

Для изотропной пластины тензоры моментов $m(\boldsymbol{\psi}) = \{m_{ij}(\boldsymbol{\psi})\}$ и усилий $\sigma(\boldsymbol{W}) = \{\sigma_{ij}(\boldsymbol{W})\}$, $i, j = 1, 2$, выражаются по формулам (по повторяющимся индексам ведется суммирование):

$$m_{ij}(\boldsymbol{\psi}) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{\psi}), \quad \sigma_{ij}(\boldsymbol{W}) = 3c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{W}),$$

где ненулевые коэффициенты тензора c_{ijkl} определяются соотношениями:

$$c_{1111} = c_{2222} = D, \quad c_{1122} = c_{2211} = D\kappa,$$
$$c_{1212} = c_{2112} = c_{1221} = c_{2121} = \frac{D(1-\kappa)}{2}, \quad \kappa = \text{const}, \quad 0 < \kappa < \frac{1}{2},$$

D — цилиндрическая жесткость пластины, κ — коэффициент Пуассона. Для вектора поперечных сил $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2)$ выполняются следующие равенства [34]:

$$q_i(w, \psi) = \Lambda(w_{,i} + \psi_i), \quad i = 1, 2, \quad \left(v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}\right),$$

где $\Lambda = 2\kappa'\mathcal{G}$, κ' — коэффициент сдвига, $\mathcal{G}$ — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины. Предполагаем, что все коэффициенты, описывающие упругие свойства пластины, являются постоянными. Определим следующую билинейную форму

$$B(\mathcal{O},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}) = \int_{\Omega^t_\gamma} \left\{ m_{ij}(\boldsymbol{\psi})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\psi}) + \sigma_{ij}(\boldsymbol{W})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{W}) + q_i(w,\psi)(w_{,i} + \psi_i) \right\} d\boldsymbol{x},$$

где $\mathcal{O}$ — некоторое измеримое подмножество Ω, $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{W}, w, \boldsymbol{\psi})$. В силу однородных условий на внешней границе Γ для области Ω^t_γ имеет место оценка

$$B(\Omega^t_\gamma,\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}) \geqslant c_t\|\boldsymbol{\eta}\|^2_t \quad \forall\boldsymbol{\eta}\in H(\Omega^t_\gamma), \tag{1.1}$$

где $c_t > 0$ не зависит от $\boldsymbol{\eta}$ [35].

Сформулируем вариационную задачу о равновесии. Зафиксируем параметр $t \in [0,T]$. На внешней границе Γ потребуем выполнения однородных условий Дирихле, а на кривых Γ_t, γ, задающих трещины, зададим следующие условия непроникания [35]

$$[\boldsymbol{W}]\cdot\boldsymbol{\nu} \geqslant |[\boldsymbol{\psi}]\cdot\boldsymbol{\nu}| \;\text{ на }\; \gamma, \quad [\boldsymbol{W}]\cdot\boldsymbol{n} \geqslant |[\boldsymbol{\psi}]\cdot\boldsymbol{n}| \;\text{ на }\; \Gamma_t,$$

где $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1,\nu_2)$ — единичная нормаль к γ, а $\boldsymbol{n} = (n_1,n_2)$ — единичная нормаль к Γ_T, квадратными скобками обозначен скачок соответствующих следов функции. В частности, скачок $[\boldsymbol{W}]$ функции $\boldsymbol{W}$ на γ:

$$[\boldsymbol{W}] = \boldsymbol{W}|_{\gamma^+} - \boldsymbol{W}|_{\gamma^-},$$

где берега γ^+,γ^- разреза γ выбираются в соответствии с направлением нормали $\boldsymbol{\nu}$, аналогично для скачков на кривой Γ_t.

Функционал энергии пластины с двумя трещинами имеет вид

$$\Pi(\Omega^t_\gamma,\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2}B(\Omega^t_\gamma,\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}) - \int_{\Omega^t_\gamma} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\eta}\,d\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{W}, w, \boldsymbol{\psi}),$$

вектор $\boldsymbol{F} = (f_1,f_2,f_3,f_4,f_5) \in C^1(\overline{\Omega})^5$ описывает воздействие на пластину заданных внешних нагрузок [36]. Вариационная задача о равновесии пластины Тимошенко допускает следующую формулировку в виде минимизации функционала энергии: требуется найти функцию $\boldsymbol{\xi}^t \in K_t$ такую, что:

$$\Pi(\Omega^t_\gamma;\boldsymbol{\xi}^t) = \inf_{\boldsymbol{\eta}\in K_t} \Pi(\Omega^t_\gamma;\boldsymbol{\eta}), \tag{1.2}$$

где

$$K_t = \left\{\boldsymbol{\eta}\in H(\Omega^t_\gamma) \mid [\boldsymbol{W}]\cdot\boldsymbol{\nu} \geqslant |[\psi]\cdot\boldsymbol{\nu}| \;\text{ на }\; \gamma, [\boldsymbol{W}]\cdot\boldsymbol{n} \geqslant |[\psi]\cdot\boldsymbol{n}| \;\text{ на }\; \Gamma_t\right\}.$$

Нетрудно показать, что задача (1.2) имеет единственное решение $\boldsymbol{\xi}^t \in K_t$ и эквивалентна вариационному неравенству [35, 36]

$$B(\Omega^t_\gamma,\boldsymbol{\xi}^t,\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi}^t) \geqslant \int_{\Omega^t_\gamma} \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi}^t)\,d\boldsymbol{x} \quad \forall\boldsymbol{\eta}\in K_t. \tag{1.3}$$

§ 2. Задача оптимального управления

Введем следующий функционал качества $G(t) = G_t(\boldsymbol{\xi}^t)$, $t \in [0,T]$, где значения $G_t(\boldsymbol{\xi}^t)$ находятся по формуле

$$
\begin{aligned}
G_t(\boldsymbol{\xi}^t) = B\big(\Omega_\gamma^t, \boldsymbol{\xi}^t, \boldsymbol{Q}^t\big)\big(\mu'(1)^2+1\big)^{-1/2} + \frac{1}{2}\big(\mu'(1)^2+1\big)^{-1/2} \int_{\Omega_\gamma^t} \bigg\{ \frac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{\tau}}\big(\sigma_{ij}(\boldsymbol{U}^t)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}^t) + \\
+ m_{ij}(\boldsymbol{\phi}^t)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\phi}^t) + q_i(u^t,\boldsymbol{\phi}^t)(u^t{,_i} + \phi_i^t)\big) - 2\big(\sigma_{ij}(\boldsymbol{U}^t)E_{ij}(\theta;\boldsymbol{U}^t) + \\
+ m_{ij}(\boldsymbol{\phi}^t)E_{ij}(\theta;\boldsymbol{\phi}^t) + l_i(\theta,u^t)q_i(u^t,\boldsymbol{\phi}^t) + (\theta\boldsymbol{F})_{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{\xi}^t + \boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}^t\big)\bigg\}\,d\boldsymbol{x},
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}^t &= (0, \theta\mu'' u_1^t, 0, 0, \theta\mu''\phi_1^t),\\
\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}} &\equiv \frac{\partial}{\partial x_1} + \mu'(x_1)\frac{\partial}{\partial x_2},\\
l_i(\theta,u^t) &= \theta_{,i}\frac{\partial u^t}{\partial x_1} + (\theta d)_{,i}\frac{\partial u^t}{\partial x_2}, \quad d(x_1,x_2) = \mu'(x_1),\\
E_{ij}(\theta;\boldsymbol{U}^t) &= \frac{1}{2}\left(\theta_{,j}\frac{\partial u_i^t}{\partial x_1} + \theta_{,i}\frac{\partial u_j^t}{\partial x_1} + (\theta d)_{,j}\frac{\partial u_i^t}{\partial x_2} + (\theta d)_{,i}\frac{\partial u_j^t}{\partial x_2}\right),\\
E_{ij}(\theta;\boldsymbol{\phi}^t) &= \frac{1}{2}\left(\theta_{,j}\frac{\partial \phi_i^t}{\partial x_1} + \theta_{,i}\frac{\partial \phi_j^t}{\partial x_1} + (\theta d)_{,j}\frac{\partial \phi_i^t}{\partial x_2} + (\theta d)_{,i}\frac{\partial \phi_j^t}{\partial x_2}\right),\\
(\theta\boldsymbol{F})_{\boldsymbol{\tau}} &= \left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}}(\theta f_1), \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}}(\theta f_2), \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}}(\theta f_3), \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}}(\theta f_4), \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}}(\theta f_5)\right).
\end{aligned}
$$

Выражение в правой части (2.1) представляет собой формулу Гриффитса для пластины Тимошенко, которая играет определяющую роль в одноименном критерии разрушения [37]. А именно, в соответствии с критерием разрушения Гриффитса, трещина получает развитие вдоль графика функции μ в том случае, когда значение формулы Гриффитса достигнет критической величины, которая характеризуется физико-механическими свойствами материала [37].

В качестве функции $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$ в (2.1) берется функция с носителем $\operatorname{supp}\theta \subset B_\epsilon(\boldsymbol{x}^r)$, где $B_\epsilon(\boldsymbol{x}^r)$ — круг с радиусом $\epsilon > 0$ в точке $\boldsymbol{x}^r$, такая, что $\theta = 1$ в круге $B_{\epsilon/2}(\boldsymbol{x}^r)$, $\operatorname{dist}(\Gamma_t, B_\epsilon(\boldsymbol{x}^r)) > 0$, $\operatorname{dist}(O, B_\epsilon(\boldsymbol{x}^r)) > 0$ [37]. Заметим, что в силу финитности функции θ, в формуле (2.1) интегрирование происходит фактически по области $\Omega_\gamma^t \cap \operatorname{supp}\theta \subset \subset \Omega_\gamma \cap B_\epsilon(\boldsymbol{x}^r)$, где область $\Omega_\gamma = \Omega\backslash\overline{\gamma}$ не зависит от t.

Далее сформулируем задачу оптимального управления в следующем виде. Требуется найти $t^* \in [0,T]$ такое, что

$$
G(t^*) = G_{t^*}(\boldsymbol{\xi}^{t*}) = \sup_{t\in[0,T]} G_t(\boldsymbol{\xi}^t), \tag{2.2}
$$

где $\boldsymbol{\xi}^t$ является решением задачи (1.2).

Для того чтобы иметь возможность сравнивать решения, соответствующие областям Ω_γ^t при разных значениях $t \in [0,T]$, воспользуемся следующим отображением, которое ранее было использовано для двумерной задачи в [33]. Сначала зафиксируем параметр $t^* \in [0,T]$. Выберем финитную бесконечно дифференцируемую функцию $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$, удовлетворяющую свойствам: $\zeta = 0$ вне шара $V_\lambda(\boldsymbol{x}^*)$ радиуса λ с центром в точке $\boldsymbol{x}^* = (0,t^*)$; $\zeta = 1$ в шаре $V_{\lambda/2}(\boldsymbol{x}^*)$. Будем считать, что $\lambda > 0$ достаточно мало́, так что $\overline{V}_\lambda(\boldsymbol{x}^*) \subset \Omega$ и $\operatorname{dist}(V_\lambda(\boldsymbol{x}^*), \gamma) > 0$, $\operatorname{dist}(V_\lambda(\boldsymbol{x}^*), B_\epsilon(\boldsymbol{x}^r)) > 0$. Введем обозначение $\delta = t - t^*$ и рассмотрим отображение для параметров $t \in [0,T]$, удовлетворяющих $|\delta| < \lambda/2$, между областями $\Omega_\gamma^{t^*}$, Ω_γ^t аналогично тому, как это сделано в [33, 38]:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_1, \\
y_2 &= x_2 - \delta\zeta(x_1, x_2),
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

где $(y_1, y_2) \in \Omega_\gamma^{t^*}$, $(x_1, x_2) \in \Omega_\gamma^t$. Якобиан этого отображения равен

$$
J_\delta = 1 - \delta\zeta_{,2}\,.
$$

Известно, что отображение при t достаточно близких к t^* взаимно-однозначно [36, 39]. Обозначим соответствующие отображения следующим образом: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}, \delta)$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}, \delta)$, $(y_1, y_2) \in \Omega_\gamma^{t^*}$, $(x_1, x_2) \in \Omega_\gamma^t$.

Лемма 2.1. *Пусть $t^* \in [0,T]$ — фиксированный параметр, $\boldsymbol{\xi}^t$, $\boldsymbol{\xi}^{t^*}$ — решения задач (1.3), соответствующие параметрам $t, t^* \in [0,T]$, где $t = t^* + \delta$. Тогда следующие функции, определенные в $H(\Omega_\gamma^{t^*})$ равенством $\widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\xi}^t(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}, \delta))$, сходятся к $\boldsymbol{\xi}^{t^*}$ сильно в $H(\Omega_\gamma^{t^*})$ при $\delta \to 0$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $g(\boldsymbol{x}) \in H^{1,0}(\Omega_\gamma^t)$, $x \in \Omega_\gamma^t$, определим в области $\Omega_\gamma^{t^*}$ с помощью преобразования (2.3) функцию $\widehat{g}(\boldsymbol{y})$ следующим равенством: $\widehat{g}(\boldsymbol{y}) \equiv g(\boldsymbol{x})$. Далее это же обозначение «крышечки» $\widehat{\boldsymbol{\eta}}$ будем использовать для функции из пространства $H(\Omega_\gamma^{t^*})$, полученной на основе равенства

$$
\widehat{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{y}) \equiv \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}) \in H(\Omega_\gamma^t).
$$

Запишем формулы для частных производных в новых переменных:

$$
\begin{aligned}
g_{,1} &= \widehat{g}_{,1} - \delta\zeta_{,1}\widehat{g}_{,2}, \\
g_{,2} &= \widehat{g}_{,2} - \delta\zeta_{,2}\widehat{g}_{,2}.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

На основании формул преобразования (2.4), следуя схеме рассуждений, разработанной в [38], осуществляя замену координат в интегралах (1.3), применим неравенство

$$
B(\Omega_\gamma^{t^*}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta, \widehat{\boldsymbol{\eta}} - \widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta) \geqslant \int_{\Omega_\gamma^{t^*}} \boldsymbol{F}(\widehat{\boldsymbol{\eta}} - \widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta)\, d\boldsymbol{y} - |\delta| c_2 \big(\|\widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta\| + \|\widehat{\boldsymbol{\eta}}\|\big)\big(\|\widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta\| + 1\big)
\tag{2.5}
$$

для всех $\widehat{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{\eta} \in K_t$, с постоянной $c_2 > 0$ в (2.5), не зависящей от δ [37]. Здесь и далее используется обозначение $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{H(\Omega_\gamma^{t^*})}$ для нормы в $H(\Omega_\gamma^{t^*})$. Подставляя в (2.5) $\widehat{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{0}$, находим

$$
B(\Omega_\gamma^{t^*}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta, \widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta) \leqslant \int_{\Omega_\gamma^{t^*}} \boldsymbol{F}\widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta\, d\boldsymbol{y} + c_2|\delta| \|\widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta\| \big(\|\widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta\| + 1\big).
$$

Выбирая достаточно малые δ: $|\delta| c < c_{t^*}/2$ (где c_{t^*} — постоянная в неравенстве (1.1)), получаем соотношение

$$
\frac{c_{t^*}}{2}\|\widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta\|^2 \leqslant B(\Omega_\gamma^{t^*}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta, \widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta) \leqslant \int_{\Omega_\gamma^{t^*}} \boldsymbol{F}\widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta\, d\boldsymbol{y} + c|\delta| \|\widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta\| \leqslant \|\widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta\| \left(\|\boldsymbol{F}\|_{L^5(\Omega_\gamma^{t^*})^2} + \frac{c_{t^*}}{2} \right).
$$

Отсюда нетрудно получить следующую равномерную оценку

$$
\|\widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta\| \leqslant C
$$

с некоторой другой постоянной $C > 0$, не зависящей от достаточно малых параметров δ: $|\delta| < c_{t^*}/2$. Поэтому, для любой последовательности чисел $\{\delta_n\}$: $\delta_n \to 0$ существует подпоследовательность (с прежним обозначением) $\widehat{\boldsymbol{\xi}}^{\delta_n}$, сходящаяся к $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}$ слабо в $H(\Omega_\gamma^{t^*})$ при $n \to \infty$. Заметим далее взаимно однозначное соответствие множеств K_t и K_{t^*} при отображении (2.3), то есть если $\boldsymbol{\eta} \in K_t$, то $\widehat{\boldsymbol{\eta}} \in K_{t^*}$ и наоборот, если $\boldsymbol{L} \in K_{t^*}$, то функция $\check{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x},\delta)) \in K_t$. Этот факт позволяет переписать неравенство (2.5) в виде

$$B(\Omega_\gamma^{t^*}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta, \boldsymbol{\eta} - \widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta) \geqslant \int_{\Omega_\gamma^{t^*}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\eta} - \widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta)\, d\boldsymbol{y} - |\delta| c_2\big(\|\widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta\| + \|\boldsymbol{\eta}\|\big)\big(\|\widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta\| + 1\big) \tag{2.6}$$

для всех $\boldsymbol{\eta}(y) \in K_{t^*}$. Переходя к пределу по параметрам δ_n, $n = 1, 2, \ldots$, в последнем неравенстве, находим

$$B(\Omega_\gamma^{t^*}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} - \widetilde{\boldsymbol{\xi}}) \geqslant \int_{\Omega_\gamma^{t^*}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\eta} - \widetilde{\boldsymbol{\xi}})\, d\boldsymbol{y}.$$

Это означает, что предельная функция $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}$ совпадает с $\boldsymbol{\xi}^{t^*}$. Выпишем далее цепочку неравенств, полученную из (2.6) подстановкой $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{\eta} = 2\widehat{\boldsymbol{\xi}}^{\delta_n}$:

$$c|\delta_n| \cdot \|\widehat{\boldsymbol{\xi}}^{\delta_n}\| \big(\|\widehat{\boldsymbol{\xi}}^{\delta_n}\| + 1\big) \geqslant B(\Omega_\gamma^{t^*}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}^{\delta_n}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}^{\delta_n}) - \int_{\Omega_\gamma^{t^*}} \boldsymbol{F}\widehat{\boldsymbol{\xi}}^{\delta_n}\, d\boldsymbol{y} \geqslant -3c|\delta_n| \cdot \|\widehat{\boldsymbol{\xi}}^{\delta_n}\| \big(\|\widehat{\boldsymbol{\xi}}^{\delta_n}\| + 1\big). \tag{2.7}$$

Ограниченность $\widehat{\boldsymbol{\xi}}^{\delta_n}$ позволяет перейти к пределу при $n \to \infty$ в (2.7) и получить на основе слабой сходимости $\widehat{\boldsymbol{\xi}}^{\delta_n} \to \boldsymbol{\xi}^{t^*}$, что

$$\lim_{n\to\infty} B\big(\Omega_\gamma^{t^*}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}^{\delta_n}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}^{\delta_n}\big) = \int_{\Omega_\gamma^{t^*}} \boldsymbol{F}\boldsymbol{\xi}^{t^*}\, d\boldsymbol{y} = B\big(\Omega_\gamma^{t^*}, \boldsymbol{\xi}^{t^*}, \boldsymbol{\xi}^{t^*}\big). \tag{2.8}$$

Последнее равенство в (2.8) получается подстановкой $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\eta} = 2\boldsymbol{\xi}^{t^*}$ в вариационном неравенстве (1.3), соответствующем t^*. Соотношение (2.8) означает сходимость норм

$$\lim_{n\to\infty} \|\widehat{\boldsymbol{\xi}}^{\delta_n}\| \to \|\boldsymbol{\xi}^{t^*}\|,$$

которая вместе со слабой сходимостью доставляет сильную сходимость $\widehat{\boldsymbol{\xi}}^{\delta_n} \to \boldsymbol{\xi}^{t^*}$ в $H(\Omega_\gamma^{t^*})$. Заметим, что методом «от противного» (см., например, [25]) можно показать, что сильная сходимость есть не только для некоторой последовательности, но и, более того, имеет место сходимость $\widehat{\boldsymbol{\xi}}^\delta \to \boldsymbol{\xi}^{t^*}$ сильно в $H(\Omega_\gamma^{t^*})$ при $\delta \to 0$. □

Теорема 2.1. *Задача оптимального управления* (2.2) *имеет по крайней мере одно решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $\{t_n\}$ — максимизирующая последовательность. Ввиду компактности сегмента $[0, T]$, можно выделить сходящуюся подпоследовательность (с прежним обозначением) такую, что

$$t_n \to t^* \;\text{ при }\; k \to \infty, \quad t^* \in [0, T].$$

Не нарушая общности, можно считать, что $t_n \neq t^*$ для всех достаточно больших номеров n. В противном случае найдется подпоследовательность $\{t_{n_k}\}$ такая, что $t_{n_k} \equiv t^*$, и, следовательно, $G(t^*)$ является решением задачи (2.2).

Таким образом, далее полагаем, что последовательность $\{t_n\}$ удовлетворяет $t_n \to t^*$, $t_n \neq t^*$ для достаточно больших n. Принимая во внимание доказанную выше лемму, находим, что функции $\widehat{\boldsymbol{\xi}}_n = \widehat{\boldsymbol{\xi}}^{\delta_n} = \boldsymbol{\xi}^{t^*+\delta_n}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y},\delta))$, соответствующие параметрам t_n, сходятся к решению $\boldsymbol{\xi}^{t^*}$ сильно в $H(\Omega_\gamma^{t^*})$ при $n \to \infty$. Поскольку в области $\Omega_\gamma \cap B_\epsilon(\boldsymbol{x}^r)$ имеет место равенство $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y},\delta) \equiv \boldsymbol{y}$, значит, выполняется и соотношение $\widehat{\boldsymbol{\xi}}^{\delta_n}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\xi}^{t_n}(\boldsymbol{y})$. Поэтому $\boldsymbol{\xi}^{t_n} \to \boldsymbol{\xi}^{t^*}$ сильно в $H^1(\Omega_\gamma \cap B_\epsilon(\boldsymbol{x}^r))^5$ при $n \to \infty$. В таком случае, значения функционала качества (2.1), соответствующие параметрам t_n

$$
\begin{aligned}
G_t(\boldsymbol{\xi}^{t_n}) = B\big(\Omega_\gamma \cap B_\epsilon(\boldsymbol{x}^r), \boldsymbol{\xi}^{t_n}, \boldsymbol{Q}^{t_n}\big)\big(\mu'(1)^2+1\big)^{-1/2} + \\
+ \frac{1}{2}\big(\mu'(1)^2+1\big)^{-1/2} \int_{\Omega_\gamma \cap B_\epsilon(\boldsymbol{x}^r)} \bigg\{ \frac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{\tau}}\big(\sigma_{ij}(\boldsymbol{U}^{t_n})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}^{t_n}) + \\
+ m_{ij}(\boldsymbol{\phi}^{t_n})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\phi}^{t_n}) + (u^{t_n},_i + \phi_i^{t_n})q_i(u^{t_n},\boldsymbol{\phi}^{t_n})\big) - 2\big(\sigma_{ij}(\boldsymbol{U}^{t_n})E_{ij}(\theta;\boldsymbol{U}^{t_n}) + \\
+ m_{ij}(\boldsymbol{\phi}^{t_n})E_{ij}(\theta;\boldsymbol{\phi}^{t_n}) + l_i(\theta,u^{t_n})q_i(u^{t_n},\boldsymbol{\phi}^{t_n}) + (\theta\boldsymbol{F})_{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{\xi}^{t_n} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}^{t_n}\big)\bigg\}\, d\boldsymbol{y},
\end{aligned}
$$

сходятся к $G_{t^*}(\boldsymbol{\xi}^{t^*})$ при $n \to \infty$. Значит, имеет место сходимость

$$G(t_n) \to G(t^*),$$

которая влечет, что

$$G(t^*) = \sup_{t\in[0,T]} G(t).$$

Теорема доказана. □

Заключение

Лемма 2.1 устанавливает непрерывную зависимость решений задач о равновесии упругих пластин от параметра, характеризующего величину изменения длины прямолинейной трещины. Найдены достаточные для разрешимости задачи оптимального управления (2.2) геометрические свойства кривых γ, Γ_t, задающих трещины, и области Ω_γ^t, $t \in [0,T]$, соответствующей упругой матрице. Установлена разрешимость задачи оптимального управления (2.2) для функционала качества $G(t)$, определенного формулой (2.1), и параметра t, $t \in [0,T]$, задающего вариацию длины трещины Γ_t.

Финансирование. Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда № 24-21-00081, https://rscf.ru/project/24-21-00081/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Партон В. З. Механика разрушения: от теории к практике. М.: Наука, 1990. https://zbmath.org/0751.73045
2. Гербер Ю. А., Нагель А. Е., Табанюхова М. В. Влияние радиуса закругления вершины трещины на напряжения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27. № 2. С. 62–69. https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-2-62-69
3. Tabanyukhova M. Photoelastic analysis of the stressed state of a flat element with geometrical stress concentrators (cutout and cuts) // Key Engineering Materials. 2019. Vol. 827. P. 330–335. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.827.330
4. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. https://zbmath.org/0566.73079
5. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. https://zbmath.org/0552.73084

6. Mishra P. K., Singh P., Das S. Study of thermo-elastic cruciform crack with unequal arms in an orthotropic elastic plane // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2017. Vol. 97. Issue 8. P. 886–894. https://doi.org/10.1002/zamm.201600220
7. Mishra P. K., Das S., Gupta M. Interaction between interfacial and sub-interfacial cracks in a composite media — Revisited // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2016. Vol. 96. Issue 9. P. 1129–1136. https://doi.org/10.1002/zamm.201500102
8. Furtsev A. I., Rudoy E. M., Sazhenkov S. A. On hyperelastic solid with thin rigid inclusion and crack subjected to global injectivity condition // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2024. Vol. 382. Issue 2277. 20240115. https://doi.org/10.1098/rsta.2024.0115
9. Khludnev A. M. On rigid inclusions and cavities in elastic body with a crack: non-coercive case // Сибирские электронные математические известия. 2024. Т. 21. № 2. С. 1024–1041.
10. Kovtunenko V. A., Itou H., Khludnev A. M., Rudoy E. M. Non-smooth variational problems and applications in mechanics // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2024. Vol. 382. Issue 2277. 20230310. https://doi.org/10.1098/rsta.2023.0310
11. Knees D., Schröder A. Global spatial regularity for elasticity models with cracks, contact and other nonsmooth constraints // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2012. Vol. 35. Issue 15. P. 1859–1884. https://doi.org/10.1002/mma.2598
12. Khludnev A. M., Faella L., Popova T. S. Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // Mathematics and Mechanics of Solids. 2017. Vol. 22. Issue 4. P. 737–750. https://doi.org/10.1177/1081286515594655
13. Попова Т. С. Задача о Т-образном сопряжении тонкого жесткого включения и включения Тимошенко в двумерном упругом теле // Сибирские электронные математические известия. 2024. Т. 21. № 2. С. 1578–1593.
14. Рудой Е. М. Дифференцирование функционалов энергии в двумерной теории упругости для тел, содержащих криволинейные трещины // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т. 45. Вып. 6. С. 83–94. https://www.mathnet.ru/rus/pmtf2444
15. Лазарев Н. П., Ковтуненко В. А. Асимптотический анализ задачи о равновесии неоднородного тела с шарнирно соединенными жесткими включениями различной ширины // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64. Вып. 5. С. 205–215. https://www.mathnet.ru/rus/pmtf1822
16. Попова Т. С. Задача о Т-образном сопряжении двух тонких включений Тимошенко в двумерном упругом теле // Математические заметки СВФУ. 2023. Т. 30. Вып. 2. С. 40–55. https://www.mathnet.ru/rus/svfu383
17. Николаева Н. А. Пластина Кирхгофа — Лява с плоским жёстким включением // Челябинский физико-математический журнал. 2023. Т. 8. Вып. 1. С. 29–46. https://www.mathnet.ru/rus/chfmj308
18. Lazarev N. P., Rudoy E. M., Nikiforov D. Ya. Equilibrium problem for a Kirchhoff–Love plate contacting by the side edge and the bottom boundary // Журнал Сибирского федерального университета. Серия «Математика и физика». 2024. Т. 17. Вып. 3. С. 355–364. https://www.mathnet.ru/rus/jsfu1165
19. Лазарев Н. П. Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину вдоль тонкого жесткого включения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 32–45. https://doi.org/10.20537/vm140103
20. Kovtunenko V. A., Lazarev N. P. Variational inequality for a Timoshenko plate contacting at the boundary with an inclined obstacle // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2024. Vol. 382. Issue 2277. 20230298. https://doi.org/10.1098/rsta.2023.0298
21. Rademacher A., Rosin K. Adaptive optimal control of Signorini's problem // Computational Optimization and Applications. 2018. Vol. 70. No. 2. P. 531–569. https://doi.org/10.1007/s10589-018-9982-5

22. Bermudez A., Saguez C. Optimal control of a Signorini problem // SIAM Journal on Control and Optimization. 1987. Vol. 25. Issue 3. P. 576–582. https://doi.org/10.1137/0325032
23. Khludnev A., Negri A. Optimal rigid inclusion shapes in elastic bodies with cracks // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2013. Vol. 64. No. 1. P. 179–191. https://doi.org/10.1007/s00033-012-0220-1
24. Shcherbakov V. Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2016. Vol. 67. No. 3. Article number: 71. https://doi.org/10.1007/s00033-016-0666-7
25. Lazarev N. P. Optimal control of the thickness of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous two-dimensional bodies with a crack // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2016. Vol. 96. Issue 4. P. 509–518. https://doi.org/10.1002/zamm.201500128
26. Lazarev N., Itou H. Optimal location of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous Kirchhoff–Love plates with a crack // Mathematics and Mechanics of Solids. 2019. Vol. 24. Issue 12. P. 3743–3752. https://doi.org/10.1177/1081286519850608
27. Lazarev N., Rudoy E. Optimal location of a finite set of rigid inclusions in contact problems for inhomogeneous two-dimensional bodies // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2022. Vol. 403. 113710. https://doi.org/10.1016/j.cam.2021.113710
28. Leugering G., Sokolowski J., Żochowski A. Control of crack propagation by shape-topological optimization // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2015. Vol. 35. Issue 6. P. 2625–2657. https://doi.org/10.3934/dcds.2015.35.2625
29. Kovtunenko V. A., Leugering G. A shape-topological control problem for nonlinear crack-defect interaction: the antiplane variational model // SIAM Journal on Control and Optimization. 2016. Vol. 54. Issue 3. P. 1329–1351. https://doi.org/10.1137/151003209
30. Meixner A., Piersanti P. Numerical approximation of the solution of an obstacle problem modelling the displacement of elliptic membrane shells via the penalty method // Applied Mathematics and Optimization. 2024. Vol. 89. No. 2. Article number: 45. https://doi.org/10.1007/s00245-024-10112-x
31. Rudoy E. M., Shcherbakov V. V. Domain decomposition method for a membrane with a delaminated thin rigid inclusion // Сибирские электронные математические известия. 2016. Т. 13. С. 395–410. https://doi.org/10.17377/semi.2016.13.035
32. Рудой Е. М. Численное решение задачи о равновесии упругого тела с отслоившимся тонким жестким включением // Сибирский журнал индустриальной математики. 2016. Т. 19. № 2 (66). С. 74–87. https://doi.org/10.17377/SIBJIM.2016.19.207
33. Лазарев Н. П., Рудой Е. М., Попова Т. С. Задача оптимального управления длиной поперечной трещины в модели о равновесии двумерного тела с двумя пересекающимися трещинами // Математические заметки СВФУ. 2018. Т. 25. Вып. 3. С. 43–53. https://doi.org/10.25587/SVFU.2018.99.16950
34. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наукова думка, 1973.
35. Лазарев Н. П. Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей сквозную трещину // Сибирский журнал индустриальной математики. 2011. Т. 14. № 4. С. 32–43. https://www.mathnet.ru/rus/sjim695
36. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
37. Лазарев Н. П. Формула Гриффитса для пластины Тимошенко с криволинейной трещиной // Сибирский журнал индустриальной математики. 2013. Т. 16. № 2. С. 98–108. https://www.mathnet.ru/rus/sjim783
38. Khludnev A. M., Sokolowski J. Griffith's formulae for elasticity systems with unilateral conditions in domains with cracks // European Journal of Mechanics - A/Solids. 2000. Vol. 19. Issue 1. P. 105–119. https://doi.org/10.1016/S0997-7538(00)00138-8
39. Kovtunenko V. A. Shape sensitivity of curvilinear cracks on interface to non-linear perturbations // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP. 2003. Vol. 54. No. 3. P. 410–423. https://doi.org/10.1007/s00033-003-0143-y

Поступила в редакцию 12.02.2025
Принята к публикации 30.04.2025

Лазарев Нюргун Петрович, д. ф.-м. н., Научно-исследовательский институт математики, Северо-Восточный федеральный университет, 677000, Россия, г. Якутск, ул. Кулаковского, 48.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7726-6742
E-mail: nyurgunlazarev@yandex.ru

Цитирование: Н. П. Лазарев. Оптимальное управление длиной поперечной трещины в задаче о равновесии пластины Тимошенко с двумя пересекающимися трещинами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 2. С. 247–260.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2025. Vol. 35. Issue 2. Pp. 247–260.

N. P. Lazarev

Optimal control of transverse crack length in the equilibrium problem of Timoshenko plate with two intersecting cracks

Keywords: variational inequality, Timoshenko plate, optimal control problem, non-penetration condition, nonlinear boundary conditions, crack.

MSC2020: 49J40, 49J20, 74B99

DOI: 10.35634/vm250206

A mathematical model of the equilibrium of an elastic plate with two mutually intersecting cracks is considered. One of the cracks is described by a part of the plane perpendicular to the midplane of the plate, and the other is specified by a smooth curve in the midplane. The nonlinearity of the problem is due to the non-penetration conditions in the form of inequalities imposed on the curves corresponding to the cracks. An analysis is made of the dependence of solutions of a family of variational inequalities on a parameter characterizing the variation of the length of a rectilinear crack. Based on the described family of problems, an optimal control problem is formulated with a quality functional determined by the Griffiths formula, which characterizes the possibility of crack development along a given trajectory. In this case, the control is specified by a numerical parameter specifying the length of the rectilinear crack. The existence of a solution for the optimal control problem is proved, and a continuous dependence of solutions in the Sobolev space on a change in the crack length parameter is established.

Funding. The study was funded with the support of the grant of Russian Science Foundation No. 24-21-00081, https://rscf.ru/project/24-21-00081/.

REFERENCES

1. Parton V. Z. *Mekhanika razrusheniya: ot teorii k praktike* (Fracture mechanics: from theory to practice), Moscow: Nauka, 1990. https://zbmath.org/0751.73045
2. Gerber Y. A., Nagel A. E., Tabanyukhova M. V. Influence of curvature of the crack tip radius on stresses, *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 62–69 (in Russian). https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-2-62-69
3. Tabanyukhova M. Photoelastic analysis of the stressed state of a flat element with geometrical stress concentrators (cutout and cuts), *Key Engineering Materials*, 2019, vol. 827, pp. 330–335. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.827.330
4. Morozov N. F. *Matematicheskie voprosy teorii treshchin* (Mathematical questions in the theory of cracks), Moscow: Nauka, 1984. https://zbmath.org/0566.73079
5. Slepyan L. I. *Mekhanika treshchin* (Mechanics of cracks), Leningrad: Sudostroenie, 1981. https://zbmath.org/0552.73084
6. Mishra P. K., Singh P., Das S. Study of thermo-elastic cruciform crack with unequal arms in an orthotropic elastic plane, *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2017, vol. 97, issue 8, pp. 886–894. https://doi.org/10.1002/zamm.201600220
7. Mishra P. K., Das S., Gupta M. Interaction between interfacial and sub-interfacial cracks in a composite media — Revisited, *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2016, vol. 96, issue 9, pp. 1129–1136. https://doi.org/10.1002/zamm.201500102
8. Furtsev A. I., Rudoy E. M., Sazhenkov S. A. On hyperelastic solid with thin rigid inclusion and crack subjected to global injectivity condition, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2024, vol. 382, issue 2277, 20240115. https://doi.org/10.1098/rsta.2024.0115
9. Khludnev A. M. On rigid inclusions and cavities in elastic body with a crack: non-coercive case, *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2024, vol. 21, no. 2, pp. 1024–1041.

10. Kovtunenko V. A., Itou H., Khludnev A. M., Rudoy E. M. Non-smooth variational problems and applications in mechanics, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2024, vol. 382, issue 2277, 20230310. https://doi.org/10.1098/rsta.2023.0310
11. Knees D., Schröder A. Global spatial regularity for elasticity models with cracks, contact and other nonsmooth constraints, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2012, vol. 35, issue 15, pp. 1859–1884. https://doi.org/10.1002/mma.2598
12. Khludnev A. M., Faella L., Popova T. S. Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2017, vol. 22, issue 4, pp. 737–750. https://doi.org/10.1177/1081286515594655
13. Popova T. S. The problem on T-shape junction of thin inclusions, *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2024, vol. 21, no. 2, pp. 1578–1593 (in Russian).
14. Rudoy E. M. Differentiation of energy functionals in two-dimensional elasticity theory for solids with curvilinear cracks, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2004, vol. 45, no. 6, pp. 843–852. https://doi.org/10.1023/B:JAMT.0000046033.10086.86
15. Lazarev N. P., Kovtunenko V. A. Asymptotic analysis of the problem of equilibrium of an inhomogeneous body with hinged rigid inclusions of various widths, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2024, vol. 64, no. 5, pp. 911–920. https://doi.org/10.1134/S0021894423050206
16. Popova T. S. The problem of T-shaped junction of two thin Timoshenko inclusions in a two-dimensional elastic body, *Mathematical notes of NEFU*, 2023, vol. 30, issue 2, pp. 40–55 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/svfu383
17. Nikolaeva N. A. Kirchhoff — Love plate with a flat rigid inclusion, *Chelyabinskiy Fiziko-Matematicheskiy Zhurnal*, 2023, vol. 8, issue 1, pp. 29–46 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/chfmj308
18. Lazarev N. P., Rudoy E. M., Nikiforov D. Ya. Equilibrium problem for a Kirchhoff–Love plate contacting by the side edge and the bottom boundary, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2024, vol. 17, issue 3, pp. 355–364. https://www.mathnet.ru/eng/jsfu1165
19. Lazarev N. P. The equilibrium problem for a Timoshenko plate containing a crack along a thin rigid inclusion, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2014, issue 1, pp. 32–45 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm140103
20. Kovtunenko V. A., Lazarev N. P. Variational inequality for a Timoshenko plate contacting at the boundary with an inclined obstacle, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2024, vol. 382, issue 2277, 20230298. https://doi.org/10.1098/rsta.2023.0298
21. Rademacher A., Rosin K. Adaptive optimal control of Signorini's problem, *Computational Optimization and Applications*, 2018, vol. 70, no. 2, pp. 531–569. https://doi.org/10.1007/s10589-018-9982-5
22. Bermudez A., Saguez C. Optimal control of a Signorini problem, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1987, vol. 25, issue 3, pp. 576–582. https://doi.org/10.1137/0325032
23. Khludnev A., Negri A. Optimal rigid inclusion shapes in elastic bodies with cracks, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2013, vol. 64, no. 1, pp. 179–191. https://doi.org/10.1007/s00033-012-0220-1
24. Shcherbakov V. Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2016, vol. 67, no. 3, article number: 71. https://doi.org/10.1007/s00033-016-0666-7
25. Lazarev N. P. Optimal control of the thickness of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous two-dimensional bodies with a crack, *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2016, vol. 96, issue 4, pp. 509–518. https://doi.org/10.1002/zamm.201500128
26. Lazarev N., Itou H. Optimal location of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous Kirchhoff–Love plates with a crack, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2019, vol. 24, issue 12, pp. 3743–3752. https://doi.org/10.1177/1081286519850608
27. Lazarev N., Rudoy E. Optimal location of a finite set of rigid inclusions in contact problems for inhomogeneous two-dimensional bodies, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2022, vol. 403, 113710. https://doi.org/10.1016/j.cam.2021.113710

28. Leugering G., Sokolowski J., Żochowski A. Control of crack propagation by shape-topological optimization, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2015, vol. 35, issue 6, pp. 2625–2657. https://doi.org/10.3934/dcds.2015.35.2625
29. Kovtunenko V. A., Leugering G. A shape-topological control problem for nonlinear crack-defect interaction: the antiplane variational model, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2016, vol. 54, issue 3, pp. 1329–1351. https://doi.org/10.1137/151003209
30. Meixner A., Piersanti P. Numerical approximation of the solution of an obstacle problem modelling the displacement of elliptic membrane shells via the penalty method, *Applied Mathematics and Optimization*, 2024, vol. 89, no. 2, article number: 45. https://doi.org/10.1007/s00245-024-10112-x
31. Rudoy E. M., Shcherbakov V. V. Domain decomposition method for a membrane with a delaminated thin rigid inclusion, *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2016, vol. 13, pp. 395–410. https://doi.org/10.17377/semi.2016.13.035
32. Rudoy E. M. Numerical solution of an equilibrium problem for an elastic body with a thin delaminated rigid inclusion, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2016, vol. 10, no. 2, pp. 264–276. https://doi.org/10.1134/S1990478916020113
33. Lazarev N. P., Rudoy E. M., Popova T. S. Optimal control of the length of a straight crack for a model describing an equilibrium of a two-dimensional body with two intersecting cracks, *Mathematical Notes of NEFU*, 2018, vol. 25, issue 3, pp. 43–53 (in Russian). https://doi.org/10.25587/SVFU.2018.99.16950
34. Pelekh B. L. *Teoriya obolochek s konechnoi sdvigovoi zhestkost'yu* (Theory of shells with finite shear modulus), Kiev: Naukova Dumka, 1973.
35. Lazarev N. P. An equilibrium problem for a Timoshenko plate with a through crack, *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki*, 2011, vol. 14, no. 4, pp. 32–43 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/sjim695
36. Khludnev A. M. *Zadachi teorii uprugosti v negladkikh oblastyakh* (Elasticity theory problems in nonsmooth domains), Moscow: Fizmatlit, 2010.
37. Lazarev N. P. The Griffith formula for a Timoshenko-type plate with a curvilinear track, *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki*, 2013, vol. 16, no. 2, pp. 98–108 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/sjim783
38. Khludnev A. M., Sokolowski J. Griffith's formulae for elasticity systems with unilateral conditions in domains with cracks, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2000, vol. 19, issue 1, pp. 105–119. https://doi.org/10.1016/S0997-7538(00)00138-8
39. Kovtunenko V. A. Shape sensitivity of curvilinear cracks on interface to non-linear perturbations, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 2003, vol. 54, no. 3, pp. 410–423. https://doi.org/10.1007/s00033-003-0143-y

Received 12.02.2025
Accepted 30.04.2025

Nyurgun Petrovich Lazarev, Doctor of Physics and Mathematics, North-Eastern Federal University, ul. Kulakovskogo, 48, Yakutsk, 677000, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7726-6742
E-mail: nyurgunlazareb@yandex.ru

Citation: N. P. Lazarev. Optimal control of transverse crack length in the equilibrium problem of Timoshenko plate with two intersecting cracks, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 2, pp. 247–260.