ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2025. Т. 35. Вып. 2. С. 261–281.

УДК 517.982.22, 519.65

© *В. И. Родионов*

О СПЕЦИАЛЬНОЙ НОРМЕ И ПОЛНОТЕ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА ЛИПШИЦА–ГЁЛЬДЕРА

Пусть $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ — непустое открытое множество и $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Допускается, что множество X_0 не ограничено и/или имеет счетное число компонент связности. В работе исследуются некоторые пространства функций $f\colon X \to \mathbb{R}$, наделенные специальной нормой $\|\cdot\|$. В определении нормы фигурирует n-мерный вектор $(\Delta x)^{-1}\Delta f$, являющийся аналогом отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, порождающего понятие производной функции одной переменной. Вектор $(\Delta x)^{-1}\Delta f$ можно ассоциировать с вектором $\operatorname{grad} f(\cdot)$. Обратимая матрица Δx порядка n состоит из специальных приращений аргумента $x \in \mathbb{R}^n$, а вектор Δf состоит из специальных приращений функции f. Доказан ряд свойств вектора $(\Delta x)^{-1}\Delta f$, получена точная формула для его евклидовой нормы. Доказана полнота по специальной норме $\|\cdot\|$ пространства $\mathcal{G}(X)$, состоящего из непрерывных ограниченных функций $f\colon X \to \mathbb{R}$ и имеющих дополнительные ограничения типа ограничений Липшица–Гёльдера. Подобные функции играют важную роль при решении задач математической физики. Исследован ряд актуальных подпространств пространства $\mathcal{G}(X)$, доказано, что два из них банаховы, одно из них при $n = 1$ и при определенных условиях является замыканием пространства кусочно-линейных функций $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Ключевые слова: условие Липшица–Гёльдера, репер, симплекс, разбиение множества, кусочно-линейная функция.

DOI: 10.35634/vm250207

Введение

Пусть X_0 — непустое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Через X_*^{n+1} обозначим множество, состоящее из всех упорядоченных наборов $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle$, $x_i \in X$, таких, что векторы $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ (где $\Delta x_i \doteq x_i - x_0$) образуют ортогональный репер с началом в точке x_0, причем выпуклая оболочка $\operatorname{conv}\{\,x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ содержится в X.

Квадратная матрица $\Delta x \doteq \operatorname{col}(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$, состоящая из элементов $\Delta x_{ij} \doteq x_i^j - x_0^j$ (где через x_i^j обозначена j-я координата точки x_i), обратима. Произвольная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ порождает вектор $(\Delta x)^{-1}\Delta f$, где вектор $\Delta f \doteq \operatorname{col}(\Delta f_1, \ldots, \Delta f_n)$ состоит из приращений $\Delta f_i \doteq f(x_i) - f(x_0)$. При $n = 1$ вектор имеет скалярный вид $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

В работе исследовано пространство $\mathcal{G}(X)$, состоящее из непрерывных ограниченных функций $f\colon X \to \mathbb{R}$ таких, что $\sup \|(\Delta x)^{-1}\Delta f\| < \infty$, где точная верхняя грань вычисляется по всем наборам $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle \in X_*^{n+1}$.

Это ограничение созвучно с ограничениями типа Липшица–Гёльдера, где основополагающее условие имеет вид $\sup \frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|} < \infty$. Здесь точная верхняя грань вычисляется по всем парам $(x, y) \in X^2$ таким, что $x \neq y$.

Имеется достаточно широкий спектр обобщений условий Липшица–Гёльдера, например, в обзорах [1, 2] исследованы операторно липшицевы функции. Семейство весовых пространств Гёльдера представлено в работе [3]. Условия Липшица на римановых многообразиях исследованы в [4]. На этом фоне пространство $\mathcal{G}(X)$ имеет определенные перспективы как теоретического, так и прикладного значения.

§ 1. Определения, примеры и вспомогательные утверждения

Через $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ обозначим совокупность всех непустых открытых множеств, определенных в пространстве $\mathbb{R}^n$. Замыкание множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ будем обозначать через $\overline{X}$, совокупность всех его внутренних точек — через $\operatorname{int} X$, а совокупность всех его граничных точек — через ∂X. Через $\mathcal{O}^2_+(\mathbb{R}^n)$ обозначим совокупность всех упорядоченных пар (X_0, X) таких, что $X_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ и $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$.

В соответствии с общей теорией конечномерных метрических пространств количество компонент связности множества $X \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ не более чем счетно. Данное обстоятельство следует учитывать в приводимых ниже определениях и утверждениях.

Определение 1. Пусть $(X_0, X) \in \mathcal{O}^2_+(\mathbb{R}^n)$. Система $\{X_1, \ldots, X_r\}$ множеств из $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ называется *$\mathcal{O}$-разбиением* множества X, если

(1) $X_s \cap X_t = \varnothing$ для всех $s, t \in \{1, \ldots, r\}$ таких, что $s \neq t$;

(2) $\bigcup\limits_{s \in \{1,\ldots,r\}} \overline{X}_s = \overline{X}$.

$\mathcal{O}$-разбиение $\{X_1, \ldots, X_r\}$, состоящее из связных множеств, называется *$\mathcal{D}$-разбиением.*

Заметим, что система $\{X_1, \ldots, X_r\}$ является $\mathcal{O}$-разбиением одновременно для всех множеств X таких, что $X_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ и $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$, в том числе для $X = X_0$ и $X = \overline{X}_0$.

Пример 1. Пусть $X \doteq (0, 1]$. Системы $\{(0, 1)\}$ и $\{(0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1)\}$ являются $\mathcal{D}$-разбиениями множества X. Определим интервалы $I_k \doteq \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$. Системы $\{Y_1\}$, где $Y_1 \doteq \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} I_k$, и $\{X_1, X_2\}$, где $X_1 \doteq \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} I_{2k-1}$, $X_2 \doteq \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} I_{2k}$, являются $\mathcal{O}$-разбиениями множества X. В последнем случае справедливы равенства $\overline{X_1} = \{0\} \cup \big(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \overline{I}_{2k-1}\big)$ и $\overline{X_2} = \{0\} \cup \big(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \overline{I}_{2k}\big)$. Системы $\{U_1\}$, где $U_1 \doteq \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} (I_k \times \mathbb{R})$, и $\{V_1, V_2\}$, где $V_1 \doteq \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} (I_{2k-1} \times \mathbb{R})$, $V_2 \doteq \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} (I_{2k} \times \mathbb{R})$, являются $\mathcal{O}$-разбиениями множества $X \times \mathbb{R}$.

Определение 2. Пусть $(X_0, X) \in \mathcal{O}^2_+(\mathbb{R}^n)$. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *$\mathcal{O}$-линейной* (соответственно *$\mathcal{D}$-линейной*), если существуют $\mathcal{O}$-разбиение (соответственно $\mathcal{D}$-разбиение) $\{X_1, \ldots, X_r\}$ множества X и система n-мерных векторов $\{c_1, \ldots, c_r\}$ такие, что для всех $s \in \{1, \ldots, r\}$ и $x, y \in \overline{X}_s \cap X$ имеет место равенство $f(x) - f(y) = (c_s, x - y)$.

Пример 2. Пусть $X \doteq \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$. Функция $f(x) = x$, $x \in X$, является $\mathcal{O}$-линейной (но она не $\mathcal{D}$-линейна). В примерах 3 и 4 фигурируют $\mathcal{D}$-линейные функции.

Утверждение 1. *Пусть в паре $(X_0, X) \in \mathcal{O}^2_+(\mathbb{R}^n)$ множество X_0 имеет лишь конечное число компонент связности. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ является $\mathcal{O}$-линейной тогда и только тогда, когда она $\mathcal{D}$-линейна.*

Доказательство утверждения представлено в конце работы в § 8.

Пример 3. Пусть $X \doteq \mathbb{R}^2$, $f(u, v) = |u| + |v|$, $(u, v) \in X$. Элементами $\mathcal{D}$-разбиения множества X можно определить 4 открытых квадранта плоскости (образованные осями координат). Им соответствуют векторы $c_1 = \binom{1}{1}$, $c_2 = \binom{-1}{1}$, $c_3 = \binom{-1}{-1}$, $c_4 = \binom{1}{-1}$.

Пример 4. Пусть $X \doteq (-\infty, 0)^2 \cup (0, \infty)^2$, $f(u, v) = |u| + |v|$, $(u, v) \in X$. Здесь элементами $\mathcal{D}$-разбиения множества X могут быть определены 2 квадранта $(-\infty, 0)^2$ и $(0, \infty)^2$. Им соответствуют векторы $c_1 = \binom{-1}{-1}$, $c_2 = \binom{1}{1}$.

Ниже мы адаптируем известные определения [5, с. 186] под цели настоящей работы.

Определение 3. Пусть $X \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *непрерывно дифференцируемой*, если для любого $x \in X$ существует $\operatorname{grad} f(x) = \big(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x)\big)$ и функция $\operatorname{grad} f(\cdot)\colon X \to \mathbb{R}^n$ непрерывна.

Пример 5. Непрерывная функция из примера 4 непрерывно дифференцируема. Непрерывная функция из примера 3 таковой не является (функция $\operatorname{grad} f(\cdot)$ определена не во всех точках плоскости $\mathbb{R}^2$). Производная непрерывной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такой, что $f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$, существует во всех точках, но разрывна в нуле (так как $f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f'(0) = 0$), следовательно, f не является непрерывно дифференцируемой функцией (см. также пример 11).

Определение 4. Пусть $(X_0, X) \in \mathcal{O}^2_+(\mathbb{R}^n)$. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *гладкой*, если

(1) f — непрерывная функция;

(2) сужение $f|_{\operatorname{int} X}$ $(= f|_{X_0})$ — непрерывно дифференцируемая функция;

(3) существует непрерывная функция $g\colon X \to \mathbb{R}^n$ такая, что для всех $x \in \operatorname{int} X (= X_0)$ имеет место равенство $\operatorname{grad} f(x) = g(x)$.

Пример 6. При $X \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ всякая непрерывно дифференцируемая функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ является гладкой. Следующие функции — не гладкие.

(a) Пусть $X \doteq [0,1)^2$, $f(u,v) = u^2 + v^2$ при $(u,v) \in X \backslash \{(0,0)\}$ и $f(0,0) = 1$. Здесь $g(u,v) = \binom{2u}{2v}$, $(u,v) \in X$, но сама функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ разрывна (нарушен пункт (1)).

(b) Функция из примера 3 не является гладкой (нарушен пункт (2)).

(c) Пусть $X \doteq [0,1)^2$, $f(u,v) = \sqrt{u} + \sqrt{v}$, $(u,v) \in X$. Нет такой непрерывной функции $g\colon X \to \mathbb{R}^2$, что $g(u,v) = \operatorname{col}\big(\frac{1}{2\sqrt{u}}, \frac{1}{2\sqrt{v}}\big)$ (нарушен пункт (3)).

Определение 5. Пусть $(X_0, X) \in \mathcal{O}^2_+(\mathbb{R}^n)$. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *$\mathcal{O}$-гладкой* (соответственно *$\mathcal{D}$-гладкой*), если существует $\mathcal{O}$-разбиение (соответственно $\mathcal{D}$-разбиение) $\{X_1, \ldots, X_r\}$ множества X такое, что при каждом $s \in \{1, \ldots, r\}$ функция-сужение $f|_{\overline{X_s} \cap X}$ — гладкая.

Пример 7. Пусть $X \doteq \mathbb{R}^2$. Функция $f(u,v) = u|u| + v|v|$, $(u,v) \in X$, является гладкой (поэтому она — $\mathcal{D}$-гладкая). Функция $f(u,v) = (u+1)|u| + (v+1)|v|$, $(u,v) \in X$, является $\mathcal{D}$-гладкой (но не гладкой).

Утверждение 2. *Пусть $(X_0, X) \in \mathcal{O}^2_+(\mathbb{R}^n)$. Всякая $\mathcal{O}$-гладкая функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ непрерывна.*

Следствие 1. *Пусть $(X_0, X) \in \mathcal{O}^2_+(\mathbb{R}^n)$. Всякая $\mathcal{O}$-линейная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ непрерывна.*

Доказательство утверждения 2 см. в § 8. Следствие 1 очевидно, поскольку всякая $\mathcal{O}$-линейная функция является $\mathcal{O}$-гладкой (ср. определения 2 и 5).

§ 2. Вектор $\Gamma_f = (\Delta x)^{-1}\Delta f$ — аналог отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$

Пусть $(X_0, X) \in \mathcal{O}_+^2(\mathbb{R}^n)$. Далее полагаем, что множество X_*^{n+1} состоит из всех таких упорядоченных наборов $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle$, $x_i \in X$, что векторы $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ (где $\Delta x_i \doteq x_i - x_0$) образуют ортогональный репер с началом в точке x_0, причем выпуклая оболочка $\operatorname{conv}\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ содержится в X. Совокупности $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle$ будем называть (*допустимыми*) *симплексами*. (В обозначении мы указываем лишь вершины симплекса.) Пространство X_*^{n+1} является метрическим относительно метрики

$$\varrho\big(\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle, \langle y_0, y_1, \ldots, y_n\rangle\big) \doteq \max_{i\in\{0,1,\ldots,n\}} \|x_i - y_i\|. \tag{1}$$

Составим квадратную матрицу $\Delta x \doteq \operatorname{col}(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ из элементов $\Delta x_{ij} \doteq x_i^j - x_0^j$, где через x_i^j обозначена j-я координата точки x_i. Пусть $\Delta x^\top$ — это транспонированная к Δx матрица. Покажем, что $\Delta x\, \Delta x^\top = \operatorname{diag}(\|\Delta x_1\|^2, \ldots, \|\Delta x_n\|^2)$. Действительно. Векторы $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ образуют ортогональный репер с началом в точке x_0, поэтому

$$(\Delta x\, \Delta x^\top)_{ij} = \sum_{k\in N} \Delta x_{ik}\Delta x_{jk} = (\Delta x_i, \Delta x_j) = \|\Delta x_i\|^2\, \delta_{ij}, \qquad i, j \in N, \tag{2}$$

где $N \doteq \{1, \ldots, n\}$, а δ_{ij} — символ Кронекера. Таким образом, имеет место равенство

$$(\Delta x)^{-1} = \Delta x^\top \operatorname{diag}\Big(\tfrac{1}{\|\Delta x_1\|^2}, \ldots, \tfrac{1}{\|\Delta x_n\|^2}\Big). \tag{3}$$

В соответствии с (3) для всех $i, j, k \in N$ справедливо

$$\big((\Delta x)^{-1}\big)_{ik} = \tfrac{\Delta x_{ki}}{\|\Delta x_k\|^2}, \qquad \big(\Delta x\big)_{kj} = \Delta x_{kj}, \qquad \delta_{ij} = \big((\Delta x)^{-1}\Delta x\big)_{ij} = \sum_{k\in N} \tfrac{\Delta x_{ki}\Delta x_{kj}}{\|\Delta x_k\|^2}. \tag{4}$$

Произвольной функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ поставим в соответствие векторнозначную функцию $\Gamma_f\colon X_*^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, действующую по следующему правилу:

$$\Gamma_f\,\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle \doteq \begin{pmatrix} \Delta x_{11} & \ldots & \Delta x_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta x_{n1} & \ldots & \Delta x_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \ldots \\ \Delta f_n \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $\Delta f_i \doteq f(x_i) - f(x_0)$. Если $\Delta f \doteq \operatorname{col}(\Delta f_1, \ldots, \Delta f_n)$, то формула (5) принимает компактный вид $\Gamma_f = (\Delta x)^{-1}\Delta f$. При $n = 1$ применима традиционная запись $\Gamma_f = \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

В силу (4) для координат Γ_f^i вектор-столбца $\Gamma_f = (\Delta x)^{-1}\Delta f$ справедливы равенства

$$\Gamma_f^i = \sum_{k\in N} \tfrac{\Delta x_{ki}}{\|\Delta x_k\|^2}\, \Delta f_k = \sum_{k\in N} \tfrac{\Delta x_{ki}}{\|\Delta x_k\|^2}\, \big(f(x_k) - f(x_0)\big), \qquad i \in N, \tag{6}$$

а для нормы $\|\Gamma_f\|$ имеет место доказанная ниже формула (7).

Пример 8. Зафиксируем пару $(X_0, X) \in \mathcal{O}_+^2(\mathbb{R}^n)$, вектор $c \in \mathbb{R}^n$ и определим скалярное произведение $f(x) \doteq (c, x)$, $x \in X$. В силу (6) и (4) для любых $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle \in X_*^{n+1}$ и $i \in N$ имеет место цепочка равенств

$$\Gamma_f^i = \sum_{k\in N} \tfrac{\Delta x_{ki}}{\|\Delta x_k\|^2}\,(c, \Delta x_k) = \sum_{k\in N} \tfrac{\Delta x_{ki}}{\|\Delta x_k\|^2} \sum_{j\in N} c^j \Delta x_{kj} = \sum_{j\in N} c^j \sum_{k\in N} \tfrac{\Delta x_{ki}\Delta x_{kj}}{\|\Delta x_k\|^2} = \sum_{j\in N} c^j \delta_{ij} = c^i.$$

Следовательно, $\Gamma_f\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle = c$ для всех $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle \in X_*^{n+1}$.

Пример 9. Зафиксируем пару $(X_0,X)\in\mathcal{O}^2_+(\mathbb{R}^n)$, вещественную симметрическую матрицу A порядка n и определим квадратичную форму $f(x)\doteq(Ax,x)$, $x\in X$. Для любых $\langle x_0,x_1,\ldots,x_n\rangle\in X^{n+1}_*$ и $k\in N$ справедливо $x_k=x_0+\Delta x_k$ и

$$\Delta f_k=(Ax_k,x_k)-(Ax_0,x_0)=2(Ax_0,\Delta x_k)+(A\Delta x_k,\Delta x_k)=(c,\Delta x_k)+B_k\|\Delta x_k\|^2.$$

Обозначили $c\doteq 2Ax_0$ и $B_k\doteq(A\Delta x_k,\Delta x_k)/\|\Delta x_k\|^2$, $k\in N$. В силу (6) для любого $i\in N$ имеет место цепочка равенств

$$\Gamma^i_f=\sum_{k\in N}\tfrac{\Delta x_{ki}}{\|\Delta x_k\|^2}\,(c,\Delta x_k)+\sum_{k\in N}B_k\Delta x_{ki}=c^i+\sum_{k\in N}B_k\Delta x_{ki}=\tfrac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)+\sum_{k\in N}B_k\Delta x_{ki}.$$

Следовательно, $\Gamma_f\langle x_0,x_1,\ldots,x_n\rangle=\operatorname{grad}f(x_0)+\operatorname{col}\big(\sum_{k\in N}B_k\Delta x_{k1},\ldots,\sum_{k\in N}B_k\Delta x_{kn}\big)$.

§ 3. Свойства вектор-функций Γ_f

Отображение $f\to\Gamma_f$, порожденное формулой (5), имеет канонический характер, и мы исследуем его с самых разных позиций. Например, приводимая ниже формула (10) служит отправной точкой для приближенных вычислений (см. [6, 7]), основанных на соотношении $\operatorname{grad}f(x)\approx\Gamma_f\,\langle x_0,x_1,\ldots,x_n\rangle$. Докажем следующие утверждения.

Утверждение 3. *Пусть $(X_0,X)\in\mathcal{O}^2_+(\mathbb{R}^n)$ и $f\colon X\to\mathbb{R}$ — произвольная функция. Тогда*

$$\|\,\Gamma_f\,\langle x_0,x_1,\ldots,x_n\rangle\|^2=\sum_{k\in N}\big(\tfrac{f(x_k)-f(x_0)}{\|x_k-x_0\|}\big)^2,\qquad\langle x_0,x_1,\ldots,x_n\rangle\in X^{n+1}_*.\tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (3) справедлива цепочка равенств

$$\Gamma_f=(\Delta x)^{-1}\Delta f=\underbrace{\Delta x^\top\operatorname{diag}\big(\tfrac{1}{\|\Delta x_1\|},\ldots,\tfrac{1}{\|\Delta x_n\|}\big)}_{A(\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n)=A}\operatorname{diag}\big(\tfrac{1}{\|\Delta x_1\|},\ldots,\tfrac{1}{\|\Delta x_n\|}\big)\,\Delta f=$$
$$=A(\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n)\ \operatorname{col}\big(\tfrac{\Delta f_1}{\|\Delta x_1\|},\ldots,\tfrac{\Delta f_n}{\|\Delta x_n\|}\big)=A\ \underbrace{\operatorname{col}\big(\tfrac{f(x_1)-f(x_0)}{\|x_1-x_0\|},\ldots,\tfrac{f(x_n)-f(x_0)}{\|x_n-x_0\|}\big)}_{\varphi\,(x_0,x_1,\ldots,x_n)=\varphi}.$$

Так как $\Delta x\,\Delta x^\top=\operatorname{diag}(\|\Delta x_1\|^2,\ldots,\|\Delta x_n\|^2)$, то

$$\operatorname{diag}\big(\tfrac{1}{\|\Delta x_1\|},\ldots,\tfrac{1}{\|\Delta x_n\|}\big)\,\Delta x\cdot\Delta x^\top\operatorname{diag}\big(\tfrac{1}{\|\Delta x_1\|},\ldots,\tfrac{1}{\|\Delta x_n\|}\big)=E,$$

поэтому $A^\top A=E$, то есть матрица A — ортогональная. Следовательно,

$$\|\,\Gamma_f\,\|^2=(\Gamma_f,\Gamma_f)=(A\varphi,A\varphi)=(\varphi,\varphi)=\sum_{k\in N}\big(\tfrac{f(x_k)-f(x_0)}{\|x_k-x_0\|}\big)^2.$$

Утверждение 4. *Зафиксируем пару $(X_0,X)\in\mathcal{O}^2_+(\mathbb{R}^n)$, симплекс $\langle x_0,x_1,\ldots,x_n\rangle\in X^{n+1}_*$ и функцию $f\colon X\to\mathbb{R}$. В пространстве переменных $(x,z)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ уравнение гиперплоскости, проходящей через точки $(x_m,f(x_m))\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, $m\in\{0\}\cup N$, имеет вид*

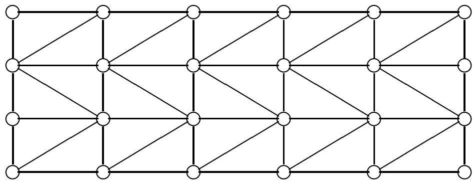
$$z=f(x_0)+\big((\Delta x)^{-1}\Delta f,x-x_0\big)\ \ \textit{или}\ \ z=f(x_0)+(\Gamma_f,x-x_0).\tag{8}$$

Действительно, $z|_{x_0}=f(x_0)$, а при $m\in N$ в соответствии с (6) и (2) справедливо

$$z|_{x_m}-f(x_0)=(\Gamma_f,\Delta x_m)=\sum_{i\in N}\Gamma^i_f\Delta x_{mi}=\sum_{i\in N}\sum_{k\in N}\tfrac{\Delta x_{ki}}{\|\Delta x_k\|^2}\,\Delta f_k\Delta x_{mi}=$$
$$=\sum_{k\in N}\tfrac{\Delta f_k}{\|\Delta x_k\|^2}\sum_{i\in N}\Delta x_{ki}\Delta x_{mi}=\sum_{k\in N}\tfrac{\Delta f_k}{\|\Delta x_k\|^2}\,\|\Delta x_m\|^2\delta_{km}=\Delta f_m=f(x_m)-f(x_0).$$

Замечание 1. При $n=1$ первая формула (8) принимает классический вид
$$z = f(x_0) + \tfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0).$$

Замечание 2. Пусть в прямоугольнике осуществлена триангуляция:



Если известны значения некоторой функции в узлах триангуляции, то формулы (8) позволяют интерполировать эту функцию на все множество. Это обстоятельство имеет определенные перспективы при построении тех или иных сплайнов.

Эволюция применения результатов и методов экстремальной интерполяции к задачам теории приближения и теории сплайнов отражена в [8]. Исследование показателей Гёльдера для регулирования гладкости сплайнов представлено в обзоре [9].

Утверждение 5. *Пусть* $(X_0, X) \in \mathcal{O}^2_+(\mathbb{R}^n)$. *Непрерывность функции* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *влечет непрерывность функции* $\Gamma_f\colon X^{n+1}_* \to \mathbb{R}^n$.

Действительно. Пусть последовательность симплексов $\{\langle x^m_0, x^m_1, \ldots, x^m_n\rangle\}^\infty_{m=1}$ и симплекс $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle$ из множества X^{n+1}_* таковы, что
$$\varrho\left(\langle x^m_0, x^m_1, \ldots, x^m_n\rangle, \langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle\right) \to 0, \qquad m \to \infty.$$
Согласно (1) при $m \to \infty$ имеем $x^m_k \to x_k$, $x^m_{ki} \to x_{ki}$, $k \in \{0\} \cup N$, $i \in N$. В силу непрерывности f справедливо $f(x^m_k) \to f(x_k)$, а в соответствии с (6) получаем, что
$$\Gamma^i_f\langle x^m_0, x^m_1, \ldots, x^m_n\rangle - \Gamma^i_f\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle =$$
$$= \sum_{k\in N} \tfrac{\Delta x^m_{ki}}{\|\Delta x^m_k\|^2}\left(f(x^m_k) - f(x^m_0)\right) - \sum_{k\in N} \tfrac{\Delta x_{ki}}{\|\Delta x_k\|^2}\left(f(x_k) - f(x_0)\right) \xrightarrow[m]{} 0.$$

§ 4. Эквивалентные определения непрерывной дифференцируемости и гладкости функций многих переменных

Определение 6. Пусть $(X_0, X) \in \mathcal{O}^2_+(\mathbb{R}^n)$. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой в себе* (или S-*дифференцируемой*), если для любого $x \in X$ существует конечный предел
$$\lim{}_* \Gamma_f\,\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle, \qquad x_0 \to x,\ x_1 \to x, \ldots,\ x_n \to x. \tag{9}$$
Символ «$*$» в выражении (9) означает, что предел вычисляется по всем таким симплексам $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle \in X^{n+1}_*$, что $x_0 \to x$, $x_1 \to x$, …, $x_n \to x$. Другими словами, вектор $\mathrm{g}(x)$ есть предел (9), если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U_x точки x такая, что $\|\,\Gamma_f\,\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle - \mathrm{g}(x)\| < \varepsilon$ для любых $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X \cap U_x$ таких, что $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle \in X^{n+1}_*$. Заметим еще, что выражение (9) — это предел по множеству X^{n+1}_*, а точка $(x, x, \ldots, x) \in X^{n+1}$ — точка прикосновения этого множества. Уместно также отметить, что при $n=1$ предел (9) имеет вид
$$\lim_{\substack{x_0\to x,\ x_1\to x\\ \langle x_0,x_1\rangle\in X^2_*}} \tfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \lim_{\substack{x_0\to x,\ x_1\to x\\ x_0\neq x_1}} \tfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$

Фигурирующие ниже теоремы 1 и 2 и следствие 2 анонсированы в докладах на конференциях. Доказательства этих утверждений приведены в [10].

Теорема 1. *Пусть $X \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. Если $f\colon X \to \mathbb{R}$ есть S-дифференцируемая функция, то для любого $x \in X$ существует* $\operatorname{grad} f(x)$ *и для предела* (9) *справедливо равенство*

$$\lim\nolimits_* \Gamma_f \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle = \operatorname{grad} f(x). \tag{10}$$

Замечание 3. Мы уже отмечали значение формулы (10) в приближенных вычислениях при решении прикладных задач. Далее при чтении текста целесообразно интерпретировать вектор $\Gamma_f \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ как «почти» градиент функции f в точке x_0.

Теорема 2. *Пусть $(X_0, X) \in \mathcal{O}^2_+(\mathbb{R}^n)$. Для того чтобы непрерывная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ была дифференцируемой в себе, необходимо и достаточно, чтобы она была гладкой.*

Непрерывность функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ требуется для того, чтобы исключить из рассмотрения разрывные функции следующего вида. Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^2$ состоит из точек (u, v) таких, что $0 \leqslant u \leqslant 1$ и $u^3 \leqslant v \leqslant u^2$, а функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ такова, что $f(u, v) = u + v$ при $(u, v) \neq (0, 0)$ и $f(0, 0) = 1$. В силу геометрической специфики множества X в точке $(0, 0)$ нет такого симплекса $\langle x_0, x_1, x_2 \rangle$ (прямоугольного треугольника), что либо $x_0 = (0, 0)$, либо $x_1 = (0, 0)$, либо $x_2 = (0, 0)$. (Напомним, что должно выполняться условие $\operatorname{conv}\{x_0, x_1, x_2\} \subseteq X$.) Следовательно, правая часть формулы (5) не зависит от числа $f(0, 0) = 1$. Таким образом, для любого $x \in X$ (в том числе для точки $x = (0, 0)$) существует предел $\lim_* \Gamma_f \langle x_0, x_1, x_2 \rangle = \binom{1}{1}$ при $x_0 \to x$, $x_1 \to x$, $x_2 \to x$, однако сама функция f разрывна на границе X. Условие непрерывности f можно снять лишь в том случае, когда X — открытое множество. Другими словами, справедливо

Следствие 2. *Пусть $X \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. Для того чтобы функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ была дифференцируемой в себе, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывно дифференцируемой.*

§ 5. Банахово пространство $\mathcal{G}(X)$

Зафиксируем пару $(X_0, X) \in \mathcal{O}^2_+(\mathbb{R}^n)$ и через $\mathcal{C}(X)$ обозначим линейное пространство, состоящее из непрерывных ограниченных функций $f\colon X \to \mathbb{R}$. Согласно [11, с. 30] пространство $\mathcal{C}(X)$, наделенное нормой $\|f\|_{\mathcal{C}(X)} \doteq \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$, банахово.

Через $\mathcal{G}(X)$ обозначим пространство всех таких функций $f \in \mathcal{C}(X)$, что

$$\gamma(f) \doteq \sup_{\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle \in X_*^{n+1}} \| \Gamma_f \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle \| < \infty. \tag{11}$$

Убедимся в линейности пространства. Пусть $c \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{G}(X)$, $h \doteq f + g$. Включение $cf \in \mathcal{G}(X)$ очевидно. Так как $\Gamma_h = \Gamma_f + \Gamma_g$, то для любого $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle \in X_*^{n+1}$

$$\| \Gamma_h \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle \| \leqslant \| \Gamma_f \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle \| + \| \Gamma_g \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle \| \leqslant \gamma(f) + \gamma(g),$$

поэтому $\gamma(h) \leqslant \gamma(f) + \gamma(g) < \infty$ и $h \in \mathcal{G}(X)$.

Пример 10. Пусть $X_0 \doteq (0, 1)$, $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Функция $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in X$, принадлежит пространству $\mathcal{C}(X)$, но $f \notin \mathcal{G}(X)$. Действительно, если $x_0, x_1 \in X$, $x_0 \neq x_1$, $x_0 \to 0$, $x_1 \to 0$, то $\Gamma_f \langle x_0, x_1 \rangle = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_0}} \to \infty$, поэтому $\gamma(f) = \infty$.

Функционал (11) порождает в пространстве $\mathcal{G}(X)$ норму

$$\|f\|_{\mathcal{G}(X)} \doteq \|f\|_{\mathcal{C}(X)} + \gamma(f). \tag{12}$$

Теорема 3. *Пусть $(X_0, X) \in \mathcal{O}^2_+(\mathbb{R}^n)$. Пространство $\mathcal{G}(X)$ банахово по норме* (12).

Доказательство. Зафиксируем фундаментальную последовательность $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $f_m \in \mathcal{G}(X)$. При $\ell, m \to \infty$ справедливо $\|f_\ell - f_m\|_{\mathcal{G}(X)} \to 0$, поэтому $\|f_\ell - f_m\|_{\mathcal{C}(X)} \to 0$ и $\gamma(f_\ell - f_m) \to 0$. В силу полноты пространства $\langle\, \mathcal{C}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{C}(X)}\,\rangle$ существует функция $f \in \mathcal{C}(X)$ такая, что $\|f_\ell - f\|_{\mathcal{C}(X)} \to 0$, $\ell \to \infty$.

Так как $\gamma(f_\ell - f_m) \to 0$ при $\ell, m \to \infty$, то в соответствии с формулой (7) для любого $\varepsilon > 0$ найдется m_0 такое, что для всех $\ell, m > m_0$

$$\sup_{\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle \in X_*^{n+1}} \sum_{k\in N} \Big(\tfrac{f_\ell(x_k) - f_m(x_k) - f_\ell(x_0) + f_m(x_0)}{\|x_k - x_0\|}\Big)^2 < \varepsilon^2.$$

Зафиксируем симплекс $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle \in X_*^{n+1}$ и $k \in N$. Тогда для всех $\ell, m > m_0$

$$-\varepsilon\|x_k - x_0\| < f_\ell(x_k) - f_m(x_k) - f_\ell(x_0) + f_m(x_0) < \varepsilon\|x_k - x_0\|. \qquad (13)$$

Так как $\|f_\ell - f\|_{\mathcal{C}(X)} \to 0$ при $\ell \to \infty$, то существует m_1 такое, что для всех $\ell > m_1$ имеет место оценка $\|f_\ell - f\|_{\mathcal{C}(X)} < \varepsilon\theta$, где $\theta \doteq \min\limits_{\nu\in N} \|x_\nu - x_0\| > 0$. Пусть $m_2 \doteq \max\{m_0, m_1\}$. Тогда $|f_\ell(z) - f(z)| < \varepsilon\theta$ для всех $\ell > m_2$ и $z \in X$. В частности,

$$-\varepsilon\theta < f(x_k) - f_\ell(x_k) < \varepsilon\theta \ \text{ и } \ -\varepsilon\theta < f_\ell(x_0) - f(x_0) < \varepsilon\theta,$$

поэтому $-2\varepsilon\theta < f(x_k) - f_\ell(x_k) + f_\ell(x_0) - f(x_0) < 2\varepsilon\theta$, а с учетом (13) имеем

$$-\varepsilon\|x_k - x_0\| - 2\varepsilon\theta < f(x_k) - f_m(x_k) - f(x_0) + f_m(x_0) < \varepsilon\|x_k - x_0\| + 2\varepsilon\theta.$$

Поскольку $\theta \leqslant \|x_k - x_0\|$, то $|f(x_k) - f_m(x_k) - f(x_0) + f_m(x_0)| < 3\varepsilon\|x_k - x_0\|$. Это неравенство справедливо для всех $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle \in X_*^{n+1}$, $k \in N$ и $m > m_0$. Следовательно,

$$\sup_{\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle \in X_*^{n+1}} \sum_{k\in N} \Big(\tfrac{f(x_k) - f_m(x_k) - f(x_0) + f_m(x_0)}{\|x_k - x_0\|}\Big)^2 \leqslant 9n\varepsilon^2, \qquad m > m_0.$$

Итак, в силу формул (7) и (11) для любого $\varepsilon > 0$ существует m_0 такое, что при всех $m > m_0$ справедливо $\gamma(f - f_m) \leqslant 3\sqrt{n}\,\varepsilon$, следовательно, $\gamma(f - f_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Так как $\|f - f_m\|_{\mathcal{C}(X)} \to 0$, то $\|f - f_m\|_{\mathcal{G}(X)} \to 0$. Включение $f \in \mathcal{G}(X)$ очевидно. □

§ 6. $\mathcal{G}(X)$ — аналог пространства функций типа Липшица–Гёльдера

Пусть $(X_0, X) \in \mathcal{O}_+^2(\mathbb{R}^n)$. Через $\mathcal{F}(X)$ обозначим линейное пространство всех таких функций $f \in \mathcal{C}(X)$, что $\lambda(f) \doteq \sup\limits_{x,y\in X,\, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} < \infty$. В этом пространстве определена норма $\|f\|_{\mathcal{F}(X)} \doteq \|f\|_{\mathcal{C}(X)} + \lambda(f)$ и оно входит в семейство банаховых пространств функций типа Липшица–Гёльдера (см., например, [12, с. 209]). Пространства находят широкое применение, например, в работе [13] для определенных показателей Гёльдера доказана разрешимость задачи Дирихле, в [14] доказано существование решения нелинейного интегрального уравнения Вольтерра в пространстве Гёльдера.

Утверждение 6. *Если $(X_0, X) \in \mathcal{O}_+^2(\mathbb{R}^n)$, то $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{G}(X)$. Если, кроме того, X_0 — выпуклое множество, то $\mathcal{F}(X) = \mathcal{G}(X)$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{F}(X)$ и $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle \in X_*^{n+1}$. Согласно (7) семейство неравенств $|f(x_k) - f(x_0)| \leqslant \lambda(f)\,\|x_k - x_0\|$, $k \in N$, порождает неравенство $\|\,\Gamma_f\,\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle\|^2 \leqslant n\lambda^2(f)$. Следовательно, $\gamma(f) \leqslant \sqrt{n}\,\lambda(f)$, поэтому $f \in \mathcal{G}(X)$.

Пусть X_0 — выпуклое множество, $f \in \mathcal{G}(X)$ и $x, y \in X$, $x \neq y$. Сначала предположим, что хотя бы одна из точек x, y — внутренняя. Пусть, например, $x \in X_0$. Полагаем $x_0 = x$ и

$x_1 = y$. Так как множество X выпукло, то весь отрезок $[x_0, x_1]$, соединящий точки x_0 и x_1, содержится в X. Существует открытый шар B с центром в точке $x_0 \in X_0$ такой, что $B \subset X_0$. Пусть C — это гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, перпендикулярная отрезку $[x_0, x_1]$ и такая, что $x_0 \in C$. В пересечении $B \cap C$ найдутся точки $x_k \in X_0$, $k = 2, \ldots, n$, такие, что $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle \in \in X_*^{n+1}$(в силу построений выпуклая оболочка $\operatorname{conv}\{\, x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ содержится в X). Тогда $|f(x) - f(y)| \leqslant \gamma(f)\,\|x - y\|$, поскольку в соответствии с формулой (7) справедливо

$$\gamma^2(f) \geqslant \|\,\Gamma_f \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle\|^2 = \sum_{k \in N} \big(\tfrac{f(x_k) - f(x_0)}{\|x_k - x_0\|}\big)^2 \geqslant \big(\tfrac{f(x_1) - f(x_0)}{\|x_1 - x_0\|}\big)^2 = \big(\tfrac{f(y) - f(x)}{\|y - x\|}\big)^2.$$

Пусть теперь $x, y \in \partial X$. Найдется последовательность $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ такая, что $x_m \in X_0$, $x_m \to x$. Так как $x_m \in X_0$, то $|f(x_m) - f(y)| \leqslant \gamma(f)\,\|x_m - y\|$. Поскольку $f \in \mathcal{G}(X)$ — непрерывная функция, то при $m \to \infty$ получаем $|f(x) - f(y)| \leqslant \gamma(f)\,\|x - y\|$. Таким образом, $f \in \mathcal{F}(X)$ и $\mathcal{F}(X) = \mathcal{G}(X)$. □

§ 7. Подпространства пространства $\mathcal{G}(X)$

7.1. Банахово пространство $\mathcal{V}(X)$

Зафиксируем пару $(X_0, X) \in \mathcal{O}_+^2(\mathbb{R}^n)$ и через $\mathcal{V}(X)$ обозначим линейное пространство, состоящее из всех таких функций $f \in \mathcal{G}(X)$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\mathcal{O}$-разбиение $\{X_1, \ldots, X_r\}$ множества X такое, что

$$\max_{s \in \{1, \ldots, r\}} \sup_{\langle x \rangle, \langle y \rangle \in (X_s)_*^{n+1}} \|\,\Gamma_f \langle x \rangle - \Gamma_f \langle y \rangle\| < \varepsilon. \tag{14}$$

Здесь и далее для симплексов $\langle z_0, z_1, \ldots, z_n \rangle$ используется краткое обозначение $\langle z \rangle$.

Убедимся в линейности пространства. Пусть $c \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{V}(X)$, $h \doteq f + g$. Включение $cf \in \mathcal{V}(X)$ очевидно. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\mathcal{O}$-разбиения $\{X_1, \ldots, X_r\}$ и $\{Y_1, \ldots, Y_\ell\}$ такие, что

$$\max_{s \in \{1, \ldots, r\}} \sup_{\langle x \rangle, \langle y \rangle \in (X_s)_*^{n+1}} \|\,\Gamma_f \langle x \rangle - \Gamma_f \langle y \rangle\| < \varepsilon, \qquad \max_{t \in \{1, \ldots, \ell\}} \sup_{\langle x \rangle, \langle y \rangle \in (Y_t)_*^{n+1}} \|\,\Gamma_g \langle x \rangle - \Gamma_g \langle y \rangle\| < \varepsilon.$$

Пусть $Z_{st} \doteq X_s \cap Y_t$. Через S обозначим совокупность всех пар (s, t) таких, что $Z_{st} \neq \varnothing$. Легко понять, что совокупность $\{Z_{st}\}_{(s,t) \in S}$ является $\mathcal{O}$-разбиением множества X. Так как $Z_{st} \subseteq X_s$, $Z_{st} \subseteq Y_t$ и $\Gamma_h = \Gamma_f + \Gamma_g$, то

$$\max_{(s,t) \in S} \sup_{\langle x \rangle, \langle y \rangle \in (Z_{st})_*^{n+1}} \|\,\Gamma_f \langle x \rangle - \Gamma_f \langle y \rangle\| < \varepsilon, \qquad \max_{(s,t) \in S} \sup_{\langle x \rangle, \langle y \rangle \in (Z_{st})_*^{n+1}} \|\,\Gamma_g \langle x \rangle - \Gamma_g \langle y \rangle\| < \varepsilon,$$

$$\max_{(s,t) \in S} \sup_{\langle x \rangle, \langle y \rangle \in (Z_{st})_*^{n+1}} \|\,\Gamma_h \langle x \rangle - \Gamma_h \langle y \rangle\| < 2\varepsilon.$$

Утверждение 7. *Пусть $(X_0, X) \in \mathcal{O}_+^2(\mathbb{R}^n)$. Включение $f \in \mathcal{V}(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\mathcal{O}$-разбиение $\{X_1, \ldots, X_r\}$ множества X такое, что*

$$\max_{s \in \{1, \ldots, r\}} \sup_{\langle x \rangle, \langle y \rangle \in (\overline{X}_s \cap X)_*^{n+1}} \|\,\Gamma_f \langle x \rangle - \Gamma_f \langle y \rangle\| < \varepsilon. \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность очевидна.

Необходимость. Пусть $f \in \mathcal{V}(X)$ и $\varepsilon > 0$, тогда существует $\mathcal{O}$-разбиение $\{X_1, \ldots, X_r\}$ множества X такое, что для всех $s \in S \doteq \{1, \ldots, r\}$ и $\langle x \rangle, \langle y \rangle \in (X_s)_*^{n+1}$ имеет место неравенство $\|\,\Gamma_f \langle x \rangle - \Gamma_f \langle y \rangle\| < \varepsilon$.

Зафиксируем s и симплексы $\langle x\rangle \doteq \langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle$ и $\langle y\rangle \doteq \langle y_0, y_1, \ldots, y_n\rangle$ из множества $(\overline{X}_s \cap X)_*^{n+1}$. Пусть $\xi \doteq (x_0 + x_1 + \ldots + x_n)/(n+1)$ — центр масс, а последовательность $\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ такова, что $\lambda_m \in (0,1)$ и $\lambda_m \to 1$. Сконструируем последовательность симплексов $\{\langle x_0^m, x_1^m, \ldots, x_n^m\rangle\}_{m\in\mathbb{N}}$ такую, что $x_k^m \doteq (1-\lambda_m)\xi + \lambda_m x_k$, $k \in \{0\} \cup N$ (применяем преобразование гомотетии). Очевидно, $\operatorname{conv}\{x_0^m, x_1^m, \ldots, x_n^m\} \subset \operatorname{int}\operatorname{conv}\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ для всех m и $x_k^m \underset{m}{\longrightarrow} x_k$ для всех k. Обозначим $\langle x^m\rangle \doteq \langle x_0^m, x_1^m, \ldots, x_n^m\rangle$. Тогда $\varrho(\langle x^m\rangle, \langle x\rangle) \to 0$ (см. (1)), а в силу утверждения 5 имеем $\Gamma_f\langle x^m\rangle \to \Gamma_f\langle x\rangle$, причем $\langle x^m\rangle \in (X_s)_*^{n+1}$.

Аналогичным образом построим последовательность симплексов $\{\langle y^m\rangle\}_{m\in\mathbb{N}}$ такую, что $\Gamma_f\langle y^m\rangle \to \Gamma_f\langle y\rangle$ и $\langle y^m\rangle \in (X_s)_*^{n+1}$. В силу (14) справедливо $\|\,\Gamma_f\langle x^m\rangle - \Gamma_f\langle y^m\rangle\| < \varepsilon$, а так как $\Gamma_f\langle x^m\rangle \to \Gamma_f\langle x\rangle$ и $\Gamma_f\langle y^m\rangle \to \Gamma_f\langle y\rangle$, то $\|\,\Gamma_f\langle x\rangle - \Gamma_f\langle y\rangle\| \leqslant \varepsilon$. □

Теорема 4. *Пусть* $(X_0, X) \in \mathcal{O}_+^2(\mathbb{R}^n)$. *Пространство* $\mathcal{V}(X)$ *замкнуто в банаховом пространстве* $\langle \mathcal{G}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{G}(X)}\rangle$ *и, следовательно, является полным.*

Доказательство. Зафиксируем функцию $f \in \overline{\mathcal{V}(X)}$. Существует последовательность $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $f_m \in \mathcal{V}(X)$, такая, что $\|f_m - f\|_{\mathcal{G}(X)} \to 0$, $m \to \infty$. В частности, $\gamma(f_m - f) \to 0$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует m_0 такое, что $\gamma(f_m - f) < \varepsilon$ для всех $m > m_0$. Зафиксируем $m > m_0$. Поскольку $\Gamma_{f_m - f} = \Gamma_{f_m} - \Gamma_f$, то для всех $\langle x\rangle \in X_*^{n+1}$ справедливо $\|\,\Gamma_{f_m}\langle x\rangle - \Gamma_f\langle x\rangle\| < \varepsilon$.

Так как $f_m \in \mathcal{V}(X)$, то существует $\mathcal{O}$-разбиение $\{X_1, \ldots, X_r\}$ множества X такое, что

$$\max_{s\in\{1,\ldots,r\}} \sup_{\langle x\rangle, \langle y\rangle \in (X_s)_*^{n+1}} \|\,\Gamma_{f_m}\langle x\rangle - \Gamma_{f_m}\langle y\rangle\| < \varepsilon.$$

Для любых $s \in \{1, \ldots, r\}$ и $\langle x\rangle, \langle y\rangle \in (X_s)_*^{n+1}$ справедливо

$$\|\,\Gamma_f\langle x\rangle - \Gamma_f\langle y\rangle\| \leqslant \|\,\Gamma_f\langle x\rangle - \Gamma_{f_m}\langle x\rangle\| + \|\,\Gamma_{f_m}\langle x\rangle - \Gamma_{f_m}\langle y\rangle\| + \|\,\Gamma_{f_m}\langle y\rangle - \Gamma_f\langle y\rangle\| < 3\varepsilon,$$

следовательно, $f \in \mathcal{V}(X)$ (см. (14)). □

7.2. Банахово пространство $\mathcal{U}(X)$

Зафиксируем пару $(X_0, X) \in \mathcal{O}_+^2(\mathbb{R}^n)$ и через $\mathcal{U}(X)$ обозначим линейное пространство, состоящее из всех таких функций $f \in \mathcal{G}(X)$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\mathcal{D}$-разбиение $\{X_1, \ldots, X_r\}$ множества X, удовлетворяющее неравенству (14). Понятно, что $\mathcal{U}(X) \subseteq \mathcal{V}(X)$. В соответствии с приведенным ниже примером 11 данное включение, вообще говоря, строгое.

Утверждение 8. *Пусть* $(X_0, X) \in \mathcal{O}_+^2(\mathbb{R}^n)$. *Включение* $f \in \mathcal{U}(X)$ *имеет место тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\mathcal{D}$*-разбиение* $\{X_1, \ldots, X_r\}$ *множества* X, *удовлетворяющее неравенству* (15).

Доказательство дословно повторяет доказательство утверждения 7, следует лишь заменить термины «$\mathcal{V}(X)$» и «$\mathcal{O}$-разбиение» на «$\mathcal{U}(X)$» и «$\mathcal{D}$-разбиение» соответственно. Это же замечание относится к теореме 5 (см. доказательство теоремы 4).

Теорема 5. *Пусть* $(X_0, X) \in \mathcal{O}_+^2(\mathbb{R}^n)$. *Пространство* $\mathcal{U}(X)$ *замкнуто в банаховом пространстве* $\langle \mathcal{G}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{G}(X)}\rangle$ *и, следовательно, является полным.*

Пример 11. Пусть $X \doteq [-1, 0]$, а функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ такова, что $f(x) = x^2\cos\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ (см. пример 5). Очевидно, f — непрерывная ограниченная функция, то есть $f \in \mathcal{C}(X)$. Пусть $-1 \leqslant x_0 < x_1 \leqslant 0$. Если $x_1 = 0$, то $|\,\Gamma_f\langle x_0, x_1\rangle| = |\,x_0\cos\frac{1}{x_0}| < 1$. Если же

$x_1 \neq 0$, то $f(x_1) - f(x_0) = f'(\xi)(x_1 - x_0)$ для некоторого $\xi \in (x_0, x_1)$, а так как $|f'(\xi)| < 3$, то $|\,\Gamma_f\,\langle x_0, x_1\rangle| < 3$. Следовательно, $\gamma(f) < \infty$ и $f \in \mathcal{G}(X)$.

Покажем включение $f \in \mathcal{V}(X)\backslash\mathcal{U}(X)$. Зафиксируем числа $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$, и определим интервал $I_k \doteq \left(-\frac{1}{k}, -\frac{1}{k+1}\right)$. На отрезке $\overline{I}_k$ функция f' непрерывна, следовательно, она равномерно непрерывна там, поэтому существует $\delta_k > 0$ такое, что для любых $\xi, \eta \in \overline{I}_k$ справедлива импликация $|\xi - \eta| < \delta_k \Longrightarrow |f'(\xi) - f'(\eta)| < \varepsilon$.

Определим числа $a_k \doteq -\frac{1}{k}$, $b_k \doteq -\frac{1}{k+1}$, $m_k \doteq [\frac{b_k - a_k}{\delta_k}] + 1$, $h_k \doteq \frac{b_k - a_k}{m_k}$ (выражение $[\sigma]$ обозначает целую часть числа $\sigma \in \mathbb{R}$), и пусть, далее, $\tau_k^i \doteq a_k + ih_k$, $i \in \{0, 1, \ldots, m_k\}$, и $I_k^i \doteq (\tau_k^{i-1}, \tau_k^i)$, $i \in \{1, \ldots, m_k\}$. Так как $m_k - 1 \leqslant \frac{b_k - a_k}{\delta_k} < m_k$, то $h_k < \delta_k$.

Зафиксируем $i \in \{1, \ldots, m_k\}$ и точки x_0, x_1, y_0, y_1 такие, что $\tau_k^{i-1} < x_0 < x_1 < \tau_k^i$ и $\tau_k^{i-1} < y_0 < y_1 < \tau_k^i$. Существуют $\xi \in (x_0, x_1)$ и $\eta \in (y_0, y_1)$ такие, что

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(\xi)(x_1 - x_0) \quad \text{и} \quad f(y_1) - f(y_0) = f'(\eta)(y_1 - y_0),$$

поэтому $d \doteq |\,\Gamma_f\,\langle x_0, x_1\rangle - \Gamma_f\,\langle y_0, y_1\rangle| = |f'(\xi) - f'(\eta)|$. Так как $|\xi - \eta| < \tau_k^i - \tau_k^{i-1} = h_k < \delta_k$, то $|f'(\xi) - f'(\eta)| < \varepsilon$ и $d < \varepsilon$. Таким образом, для любых $k \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \ldots, m_k\}$ и $\langle x_0, x_1\rangle, \langle y_0, y_1\rangle \in (I_k^i)_*^2$ справедливо $|\,\Gamma_f\,\langle x_0, x_1\rangle - \Gamma_f\,\langle y_0, y_1\rangle| < \varepsilon$.

Выпишем интервалы I_k^i по порядку: $I_1^1, \ldots, I_1^{m_1}, I_2^1, \ldots, I_2^{m_2}, I_3^1, \ldots, I_3^{m_3}, \ldots$ (в соответствии с ростом чисел $\inf I_k^i$), а затем переобозначим их: $J_1, J_2, J_3, \ldots$. Легко убедиться, что система $\{X_1, X_2\}$, в которой $X_1 \doteq \bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} J_{2l-1}$ и $X_2 \doteq \bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} J_{2l}$, является $\mathcal{O}$-разбиением множества X и удовлетворяет неравенству (14). (Напомним, что в соответствии с определением симплекса для любого $\langle x_0, x_1\rangle \in (X_\varkappa)_*^2$, $\varkappa = 1, 2$, выпуклая оболочка $\operatorname{conv}\{\,x_0, x_1\}$ должна содержаться в каком-либо связном множестве J_l.) Таким образом, $f \in \mathcal{V}(X)$.

Допустим, что $f \in \mathcal{U}(X)$. Тогда для фиксированного $\varepsilon \in (0, \frac{1}{\pi})$ найдется $\mathcal{D}$-разбиение $\{X_1, \ldots, X_r\}$ множества X, удовлетворяющее неравенству (14). Так как $0 \in X$, то существует s такое, что $0 \in \overline{X}_s$. В силу связности множества X_s имеет место представление $X_s = (a, 0)$ (при некотором $a < 0$). В силу (14) для всех $\langle x_0, x_1\rangle, \langle y_0, y_1\rangle \in (a, 0)_*^2$ справедливо неравенство $|\,\Gamma_f\,\langle x_0, x_1\rangle - \Gamma_f\,\langle y_0, y_1\rangle| < \varepsilon$. Пусть, в частности, $x_0 = y_0 = -\frac{1}{2m\pi}$, $x_1 = 0$, $y_1 = -\frac{1}{(2m+1)\pi}$, где $m \in \mathbb{N}$ таково, что $a < -\frac{1}{2m\pi}$. Легко убедиться, что

$$\Gamma_f\,\langle x_0, x_1\rangle = -\tfrac{1}{2m\pi}, \quad \Gamma_f\,\langle y_0, y_1\rangle = -\tfrac{8m^2+4m+1}{2m(2m+1)\pi}, \quad |\,\Gamma_f\,\langle x_0, x_1\rangle - \Gamma_f\,\langle y_0, y_1\rangle| = \tfrac{4m+1}{(2m+1)\pi} > \tfrac{1}{\pi} > \varepsilon,$$

— противоречие, следовательно, $f \notin \mathcal{U}(X)$.

7.3. Пространство $\mathcal{L}(X)$ ограниченных $\mathcal{O}$-линейных функций

Через $\mathcal{L}(X)$ при $(X_0, X) \in \mathcal{O}_+^2(\mathbb{R}^n)$ обозначим линейное пространство, состоящее из ограниченных $\mathcal{O}$-линейных функций $f\colon X \to \mathbb{R}$. В силу следствия 1 справедливо вложение $\mathcal{L}(X) \subset \mathcal{C}(X)$.

Теорема 6. *Пусть* $(X_0, X) \in \mathcal{O}_+^2(\mathbb{R}^n)$. *Тогда* $\mathcal{L}(X) \subset \mathcal{G}(X)$.

Доказательство теоремы см. в § 8.

Теорема 7. *Пусть* $(X_0, X) \in \mathcal{O}_+^2(\mathbb{R}^n)$. *Тогда* $\overline{\mathcal{L}(X)} \subseteq \mathcal{V}(X)$.

Доказательство. Пусть $f \in \overline{\mathcal{L}(X)}$. Поскольку $\overline{\mathcal{L}(X)} \subset \overline{\mathcal{G}(X)} = \mathcal{G}(X)$ (см. теоремы 6 и 3), то $f \in \mathcal{G}(X)$. Существует последовательность $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $f_m \in \mathcal{L}(X)$, такая, что $\|f_m - f\|_{\mathcal{G}(X)} \to 0$, $m \to \infty$. Следовательно, $\gamma(f_m - f) \to 0$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется m_0 такое, что $\|\,\Gamma_{f_m}\langle x\rangle - \Gamma_f\,\langle x\rangle\| < \varepsilon$ при всех $m > m_0$ и $\langle x\rangle \in X_*^{n+1}$ (напомним, что мы пишем $\langle x\rangle$ вместо $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle$).

Зафиксируем $m > m_0$. Существуют $\mathcal{O}$-разбиение $\{X_1, \ldots, X_r\}$ множества X и система n-мерных векторов $\{c_1, \ldots, c_r\}$ такие, что для всех $s \in S \doteq \{1, \ldots, r\}$ и $x, y \in X_s$ имеет место равенство $f_m(x) - f_m(y) = (c_s, x - y)$.

Для всех $s \in S$ и $\langle x\rangle, \langle y\rangle \in (X_s)_*^{n+1}$ справедливо $\Gamma_{f_m}\langle x\rangle = \Gamma_{f_m}\langle y\rangle$ (см. пример 8) и

$$\|\,\Gamma_f\,\langle x\rangle - \Gamma_f\,\langle y\rangle\| \leqslant \|\,\Gamma_f\,\langle x\rangle - \Gamma_{f_m}\langle x\rangle\| + \|\,\Gamma_{f_m}\langle x\rangle - \Gamma_{f_m}\langle y\rangle\| + \|\,\Gamma_{f_m}\langle y\rangle - \Gamma_f\,\langle y\rangle\| < 2\varepsilon,$$

следовательно, $f \in \mathcal{V}(X)$ (см. (14)). □

Теорема 8. *Пусть в паре $(X_0, X) \in \mathcal{O}_+^2(\mathbb{R}^n)$ множество X_0 имеет лишь конечное число компонент связности. Тогда $\overline{\mathcal{L}(X)} \subseteq \mathcal{U}(X)$.*

Доказательство. В силу утверждения 1 любая $\mathcal{O}$-линейная функция является $\mathcal{D}$-линейной. Далее следует повторить выкладки из доказательства теоремы 7, заменив термины «$\mathcal{O}$-разбиение» и «$\mathcal{V}(X)$» на «$\mathcal{D}$-разбиение» и «$\mathcal{U}(X)$» соответственно. □

7.4. Замыкание пространства $\mathcal{L}(X)$ в случае $n = 1$

Теорема 9. *Пусть в паре $(X_0, X) \in \mathcal{O}_+^2(\mathbb{R})$ множество X_0 ограничено и состоит из конечного числа попарно непересекающихся интервалов. Тогда $\overline{\mathcal{L}(X)} = \mathcal{U}(X)$.*

Доказательство. Включение $\overline{\mathcal{L}(X)} \subseteq \mathcal{U}(X)$ доказано выше. Пусть $f \in \mathcal{U}(X)$.

По условию $X_0 = \bigcup X^k$ — это дизъюнктное объединение интервалов из системы $\{X^1, \ldots, X^l\}$. Очевидно, она является $\mathcal{D}$-разбиением множеств X_0 и X. Будем считать, что $\sup X^k \leqslant \inf X^{k+1}$ для всех $k < l$. Осуществим следующую процедуру: последовательно меняем индекс k от 2 до l; если окажется, что $\overline{X^{k-1}} \cap \overline{X^k} \cap X \neq \varnothing$, то удаляем из системы элементы X^{k-1} и X^k, а вместо них включаем интервал $\operatorname{int}(\overline{X^{k-1}} \cup \overline{X^k})$; за новым элементом сохраняем обозначение X^k. Каждая из промежуточных систем является $\mathcal{D}$-разбиением множеств X_0 и X. Пусть $K \doteq \{1, \ldots, \ell\}$, где ℓ — количество элементов в итоговой системе. Выпишем ее элементы в порядке возрастания индексов, а затем переобозначим: $Y^1, \ldots, Y^\ell$. Для всех $k \in K \backslash \{\ell\}$ справедливо $\sup Y^k \leqslant \inf Y^{k+1}$, а для всех $k \in K \backslash \{1\}$ имеем $\overline{Y^{k-1}} \cap \overline{Y^k} \cap X = \varnothing$ и $Z^{k-1} \cap Z^k = \varnothing$, где $Z^k \doteq \overline{Y^k} \cap X$, $k \in K$. Легко убедиться, что $Y^k \subseteq Z^k \subseteq \overline{Y^k}$ для всех $k \in K$ и $\sup Z^k \leqslant \inf Z^{k+1}$ для всех $k \in K \backslash \{\ell\}$.

В силу равенств

$$\bigcup_{k \in K} \overline{Y^k} = \overline{X}_0 \quad \text{и} \quad \bigcup_{k \in K} Z^k = \bigcup_{k \in K} (\overline{Y^k} \cap X) = \Bigl(\bigcup_{k \in K} \overline{Y^k}\Bigr) \cap X = \overline{X}_0 \cap X = X$$

имеет место дизъюнктное объединение $X = \bigcup\limits_{k \in K} Z^k$. Таким образом, функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ распадается на функции-сужения $f^k\colon Z^k \to \mathbb{R}$, $k \in K$. Следовательно, достаточно исследовать ее поведение на каждом из множеств Z^k. Зафиксируем $k \in K$.

Пусть $a \doteq \inf X = \inf Z^1$, $b \doteq \sup X = \sup Z^\ell$. Так как X — ограниченное множество, то $a, b \in \mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ и $\varepsilon \doteq \varepsilon_0/(1 + b - a)$. Так как $f \in \mathcal{U}(X)$, то в соответствии с утверждением 8 существует $\mathcal{D}$-разбиение $\{X_1, \ldots, X_r\}$ множества X, удовлетворяющее неравенству (15). Определим множества $X_s^k \doteq X_s \cap Y^k$, $s \in S \doteq \{1, \ldots, r\}$, и пусть $S^k \doteq \{s \in S\colon X_s^k \neq \varnothing\}$. Система $\{X_s^k\}_{s \in S^k}$ — это $\mathcal{D}$-разбиение интервала Y^k (и множества Z^k), причем для всех $s \in S^k$ и $\langle x_0, x_1\rangle, \langle y_0, y_1\rangle \in (\overline{X_s^k} \cap Z^k)_*^2$ имеем оценку вида (15):

$$|\,\Gamma_f\,\langle x_0, x_1\rangle - \Gamma_f\,\langle y_0, y_1\rangle| < \varepsilon. \tag{16}$$

Выпишем интервалы X_s^k по порядку в соответствии с ростом чисел $\inf X_s^k$, а затем переобозначим их: $(\tau_0, \tau_1), (\tau_1, \tau_2), \ldots (\tau_p, \tau_{p+1})$. (Здесь $\tau_0 = \inf Z^k$ и $\tau_{p+1} = \sup Z^k$.) Для всех $i \in \{0, 1, \ldots, p\}$ и $\langle x_0, x_1\rangle, \langle y_0, y_1\rangle \in ([\tau_i, \tau_{i+1}] \cap Z^k)_*^2$ справедливо неравенство (16).

Если $p = 0$, то $Y^k = (\tau_0, \tau_1)$. Зафиксируем симплекс $\langle u, v\rangle \in (Z^k)^2_*$, определим линейную функцию $h^k(x) \doteq f(u) + \Gamma_f \langle u, v\rangle\,(x - u)$ и разность $\varphi^k(x) \doteq f(x) - h^k(x)$, $x \in Z^k$. Если $\langle x, y\rangle \in (Z^k)^2_*$, то $\varphi^k(x) - \varphi^k(y) = f(x) - f(y) - \Gamma_f \langle u, v\rangle\,(x - y)$. Согласно (16)

$$|\,\Gamma_{\varphi^k}\langle x, y\rangle| = \left|\tfrac{\varphi^k(x)-\varphi^k(y)}{x-y}\right| = |\,\Gamma_f\langle x, y\rangle - \Gamma_f\langle u, v\rangle| < \varepsilon \ \text{ и } \ |\,\varphi^k(x) - \varphi^k(y)| < \varepsilon|x - y|. \tag{17}$$

Очевидно, $\varphi^k(u) = 0$. Полагая $y = u$, получаем $|\,\varphi^k(x)| \leqslant \varepsilon|x - u| \leqslant \varepsilon(b - a)$, поэтому

$$\|\,f - h^k\|_{\mathcal{G}(Z^k)} = \|\,\varphi^k\|_{\mathcal{G}(Z^k)} = \sup_{x\in Z^k}|\,\varphi^k(x)| + \sup_{\langle x,y\rangle\in(Z^k)^2_*}|\,\Gamma_{\varphi^k}\langle x, y\rangle| < \varepsilon(1 + b - a) = \varepsilon_0. \tag{18}$$

Если $p > 0$, то зафиксируем точки $u \in [\tau_0, \tau_1] \cap Z^k$, $v \in [\tau_p, \tau_{p+1}] \cap Z^k$ и определим кусочно-линейную (непрерывную) функцию $h^k\colon Z^k \to \mathbb{R}$ такую, что

$$h^k(x) \doteq \begin{cases} f(\tau_1) + \Gamma_f\langle u, \tau_1\rangle\,(x - \tau_1), & x \in [\tau_0, \tau_1] \cap Z^k,\\ f(\tau_{i-1}) + \Gamma_f\langle \tau_{i-1}, \tau_i\rangle\,(x - \tau_{i-1}), & x \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \quad \forall\, i \in \{2, \ldots, p\},\\ f(\tau_p) + \Gamma_f\langle \tau_p, v\rangle\,(x - \tau_p), & x \in [\tau_p, \tau_{p+1}] \cap Z^k.\end{cases}$$

Пусть $\varphi^k(x) \doteq f(x) - h^k(x)$, $x \in Z^k$, и $\langle x, y\rangle \in (Z^k)^2_*$. Без ограничения общности полагаем, что $y < x$. Существуют μ и ν такие, что $y \in [\tau_{\mu-1}, \tau_\mu]$, $x \in [\tau_\nu, \tau_{\nu+1}]$. В случае $\mu = \nu + 1$ справедливы неравенства (17), в частности, $|\,\varphi^k(x) - \varphi^k(y)| < \varepsilon(x - y)$. Если $\mu \leqslant \nu$, то

$$\big|\,\varphi^k(x) - \varphi^k(y)\big| \leqslant \big|\,\varphi^k(x) - \varphi^k(\tau_\nu)\big| + \sum_{i=\mu+1}^{\nu}\big|\,\varphi^k(\tau_i) - \varphi^k(\tau_{i-1})\big| + \big|\,\varphi^k(\tau_\mu) - \varphi^k(y)\big| <$$
$$< \varepsilon(x - \tau_\nu) + \varepsilon\sum_{i=\mu+1}^{\nu}(\tau_i - \tau_{i-1}) + \varepsilon(\tau_\mu - y) = \varepsilon(x - y),$$

поэтому $|\,\Gamma_{\varphi^k}\langle x, y\rangle| < \varepsilon$.

Так как $\varphi^k(\tau_1) = 0$, то $|\,\varphi^k(x)| = |\,\varphi^k(x) - \varphi^k(\tau_1)| \leqslant \varepsilon|x - \tau_1| \leqslant \varepsilon(b - a)$, откуда следует цепочка (18). Таким образом, $\|\,f - h^k\|_{\mathcal{G}(Z^k)} < \varepsilon_0$ для всех $k \in K$, поэтому $f \in \overline{\mathcal{L}(X)}$. $\square$

Пример 12. Мы допускаем, что требование ограниченности множества X_0 в теореме 9 можно отменить. Пусть, например, $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in X \doteq [1, \infty)$. Покажем, что $f \in \overline{\mathcal{L}(X)}$.

Пусть числа $\varepsilon_0 > 0$ и $\varepsilon \in (0, \frac{1}{3})$ таковы, что $\varepsilon + \sqrt{\varepsilon} < \varepsilon_0$. Отталкиваясь от точки $\tau_0 = 1$, построим в X множество точек $\{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_r\}$, применяя следующее рекурсивное определение. Последовательно полагаем $k = 1, 2, \ldots$, и если окажется, что $1 - \varepsilon\tau^2_{k-1} > 0$, то вычисляем τ_k по формуле $\tau_k = \frac{\tau_{k-1}}{1-\varepsilon\tau^2_{k-1}}$ (очевидно, $\tau_k > \tau_{k-1}$). Покажем, что данная процедура конечна (наступит событие $1 - \varepsilon\tau^2_r < 0$ или, что равносильно, $\tau_r > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$).

Заметим, что числа τ_1 и τ_2 существуют: $\tau_1 = \frac{1}{1-\varepsilon}$, $\tau_2 = \frac{1-\varepsilon}{1-3\varepsilon+\varepsilon^2}$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ такое, что существуют числа $\tau_{k-1}, \tau_k, \tau_{k+1}$, и пусть $a \doteq \sqrt{\varepsilon}\,\tau_{k-1}$, $b \doteq \sqrt{\varepsilon}\,\tau_k$. Тогда

$$a < b, \quad a^2 < 1, \quad b^2 < 1, \quad \Delta\tau_k \doteq \tau_k - \tau_{k-1} = \tfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\tfrac{a^3}{1-a^2}, \quad \Delta\tau_{k+1} \doteq \tau_{k+1} - \tau_k = \tfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\tfrac{b^3}{1-b^2},$$
$$\sqrt{\varepsilon}\,(\Delta\tau_{k+1} - \Delta\tau_k)(1 - a^2)(1 - b^2) = b^3(1 - a^2) - a^3(1 - b^2) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(b - a)\big[(a + b)^2 + a^2(1 - b^2) + b^2(1 - a^2)\big] > 0.$$

Следовательно, $\Delta\tau_{k+1} > \Delta\tau_k$ и $\tau_{k+1} - \tau_k > \tau_1 - \tau_0 = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, то есть расстояние между любыми двумя соседними точками не меньше, чем $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, поэтому отрезок $[1, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}]$ содержит лишь конечное число этих точек. Обозначим $X_k \doteq [\tau_{k-1}, \tau_k]$, $k \in K \doteq \{1, \ldots, r\}$, $X_{r+1} \doteq [\tau_r, \infty)$.

В пространстве $\mathcal{L}(X)$ определим функцию

$$h(x) \doteq \begin{cases} \frac{1}{\tau_{k-1}} + \frac{1}{\tau_k} - \frac{x}{\tau_{k-1}\tau_k}, & x \in X_k, \quad \forall\, k \in K, \\ \frac{1}{\tau_r}, & x \in X_{r+1}, \end{cases}$$

и пусть $\varphi(x) \doteq f(x) - h(x)$, $x \in X$. Если $k \in K$, $\langle x, y\rangle \in (X_k)^2_*$, $u \doteq \tau_{k-1}$ и $v \doteq \tau_k$, то $v = \frac{u}{1-\varepsilon u^2}$, $\varphi(x) - \varphi(y) = \frac{1}{x} + \frac{x}{uv} - \frac{1}{y} - \frac{y}{uv}$ и $\Gamma_\varphi \langle x, y\rangle = \frac{1}{uv} - \frac{1}{xy}$. Так как $u^2 \leqslant xy \leqslant v^2$, то $\frac{u-v}{u^2 v} \leqslant \Gamma_\varphi \langle x, y\rangle \leqslant \frac{v-u}{uv^2}$, поэтому $|\,\Gamma_\varphi \langle x, y\rangle| \leqslant \max\left\{\frac{v-u}{u^2 v}, \frac{v-u}{uv^2}\right\} = \frac{v-u}{u^2 v} = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u}\frac{1-\varepsilon u^2}{u} = \varepsilon$.

Если $\langle x, y\rangle \in (X_{r+1})^2_*$, то $\varphi(x) - \varphi(y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, $\Gamma_\varphi \langle x, y\rangle = -\frac{1}{xy}$ и $|\,\Gamma_\varphi \langle x, y\rangle| \leqslant \frac{1}{\tau_r^2} < \varepsilon$.

Зафиксируем симплекс $\langle x, y\rangle \in X^2_*$ (считаем $y < x$). Найдутся $\mu, \nu \in K \cup \{r+1\}$ такие, что $y \in X_\mu$, $x \in X_\nu$. При $\mu = \nu$ неравенство $|\,\Gamma_\varphi \langle x, y\rangle| < \varepsilon$ доказано. Если $\mu < \nu$, то

$$|\,\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant |\,\varphi(x) - \varphi(\tau_{\nu-1})| + \sum_{k=\mu+1}^{\nu-1} |\,\varphi(\tau_k) - \varphi(\tau_{k-1})| + |\,\varphi(\tau_\mu) - \varphi(y)| <$$
$$< \varepsilon(x - \tau_{\nu-1}) + \varepsilon \sum_{k=\mu+1}^{\nu-1} (\tau_k - \tau_{k-1}) + \varepsilon(\tau_\mu - y) = \varepsilon(x - y),$$

следовательно, $|\,\Gamma_\varphi \langle x, y\rangle| < \varepsilon$ и $\gamma(f - h) = \gamma(\varphi) \leqslant \varepsilon$. Далее оценим норму $\|f - h\|_{\mathcal{C}(X)}$.

Пусть $k \in K$. Для сужения функции φ на отрезок X_k справедливы следующие легко проверяемые утверждения: $\varphi(\tau_{k-1}) = \varphi(\tau_k) = 0$; $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\tau_{k-1}\tau_k}$; единственное решение уравнения $\varphi'(x) = 0$ — это точка $\overline{x} = \sqrt{\tau_{k-1}\tau_k}$. Следовательно,

$$\max_{x \in X_k} |\,\varphi(x)| = |\,\varphi(\overline{x})| = \Big|\frac{1}{\sqrt{\tau_{k-1}\tau_k}} - \frac{1}{\tau_{k-1}} - \frac{1}{\tau_k} + \frac{1}{\sqrt{\tau_{k-1}\tau_k}}\Big| = \Big(\frac{1}{\sqrt{\tau_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{\tau_k}}\Big)^2 =$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\tau_{k-1}}} - \frac{\sqrt{1-\varepsilon\tau_{k-1}^2}}{\sqrt{\tau_{k-1}}}\right)^2 = \frac{1}{\tau_{k-1}} \frac{\varepsilon^2 \tau_{k-1}^4}{\left(1+\sqrt{1-\varepsilon\tau_{k-1}^2}\right)^2} < \varepsilon^2 \tau_{k-1}^3 = \sqrt{\varepsilon}\,(\varepsilon\tau_{k-1}^2)^{3/2} < \sqrt{\varepsilon}.$$

Так как $\sup\limits_{x \in X_{r+1}} |\,\varphi(x)| = \frac{1}{\tau_r} < \sqrt{\varepsilon}$, то $\|f - h\|_{\mathcal{C}(X)} = \|\,\varphi\|_{\mathcal{C}(X)} < \sqrt{\varepsilon}$. Таким образом, для любого $\varepsilon_0 > 0$ найдется функция $h \in \mathcal{L}(X)$ такая, что $\|f{-}h\|_{\mathcal{G}(X)} < \sqrt{\varepsilon}{+}\varepsilon < \varepsilon_0$. Следовательно, $f \in \overline{\mathcal{L}(X)}$. Заметим, что в силу теоремы 8 справедливо включение $f \in U(X)$.

Пример открывает перспективы для новых исследований, в том числе в случае $n \geqslant 2$.

7.5. Пространство ограниченных гладких функций с ограниченным градиентом

Пусть $(X_0, X) \in \mathcal{O}^2_+(\mathbb{R}^n)$, а гладкая функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ ограничена вместе со всеми своими частными производными первого порядка (определенными на множестве X_0). Включение $f \in \mathcal{C}(X)$ очевидно. Покажем, что $f \in \mathcal{G}(X)$.

Зафиксируем симплекс $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle \in X^{n+1}_*$ и сконструируем (гомотетией, как в доказательстве утверждения 7) последовательность симплексов $\{\langle x^m_0, x^m_1, \ldots, x^m_n\rangle\}_{m \in \mathbb{N}}$ такую, что $\operatorname{conv}\{x^m_0, x^m_1, \ldots, x^m_n\} \subset \operatorname{int}\operatorname{conv}\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ для всех $m \in \mathbb{N}$ и $x^m_k \xrightarrow[m]{} x_k$ для всех $k \in \{0\} \cup N$. Напомним, что $N \doteq \{1, \ldots, n\}$.

Очевидно, $\operatorname{conv}\{x^m_0, x^m_1, \ldots, x^m_n\} \subset X_0$, поэтому отрезок, соединяющий точки x^m_0 и x^m_k (для всех $k \in N$), целиком содержится в множестве X_0. В силу непрерывной дифференцируемости сужения $f|_{X_0}$ для любых $(k, m) \in N \times \mathbb{N}$ найдется $\lambda^m_k \in (0, 1)$ такое, что

$$f(x^m_k) - f(x^m_0) = \big(\operatorname{grad} f(\xi^m_k),\, x^m_k - x^m_0\big), \qquad \xi^m_k \doteq (1{-}\lambda^m_k)x^m_0 + \lambda^m_k x^m_k.$$

(Точка ξ_k^m принадлежит отрезку, соединяющему точки x_0^m и x_k^m, поэтому $\xi_k^m \in X_0$.)

Согласно (7) имеет место цепочка соотношений

$$\|\,\Gamma_f\,\langle x_0^m, x_1^m, \ldots, x_n^m\rangle\|^2 = \sum_{k\in N}\Big(\tfrac{f(x_k^m)-f(x_0^m)}{\|x_k^m-x_0^m\|}\Big)^2 = \sum_{k\in N}\Big(\tfrac{(\operatorname{grad} f(\xi_k^m),\, x_k^m-x_0^m)}{\|x_k^m-x_0^m\|}\Big)^2 \leqslant \sum_{k\in N}\big\|\operatorname{grad} f(\xi_k^m)\big\|^2.$$

Так как все частные производные ограничены, то существует константа $C>0$ такая, что $|\,\frac{\partial f}{\partial x^j}(\xi)| < C$ для всех $j\in N$ и $\xi\in X_0$, следовательно, $\|\,\Gamma_f\,\langle x_0^m, x_1^m, \ldots, x_n^m\rangle\|^2 \leqslant n^2C^2$. В соответствии с утверждением 5 функция Γ_f непрерывна, поэтому справедливы оценки $\|\,\Gamma_f\,\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle\| \leqslant nC$ и $\gamma(f)\leqslant nC$, следовательно, $f\in\mathcal{G}(X)$.

§ 8. Доказательство утверждений

Доказательство утверждения 1. По условию множество X_0 является дизъюнктным объединением некоторых связных множеств $X^1, \ldots, X^\ell \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, система $\{X^1, \ldots, X^\ell\}$ — это $\mathcal{D}$-разбиение множеств X_0 и X.

Достаточность утверждения очевидна. Необходимость. По условию для функции f существуют $\mathcal{O}$-разбиение $\{X_1, \ldots, X_r\}$ множества X и система n-мерных векторов $\{c_1, \ldots, c_r\}$ такие, что $f(x)-f(y) = (c_s, x-y)$ для всех $s\in S \doteq \{1,\ldots,r\}$ и $x,y\in \overline{X}_s\cap X$.

На каждом пересечении $\overline{X}_s\cap X$ функция f имеет вид $f(x)=(c_s,x)+q_s$, $c_s\in\mathbb{R}^n$, $q_s\in\mathbb{R}$, и порождает гиперплоскость $H_s \doteq \{(x,z)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\colon z=(c_s,x)+q_s\}$.

Назовем индексы $t,s\in S$ эквивалентными, если $(c_t,q_t)=(c_s,q_s)$ (что равносильно равенству $H_t=H_s$). Для любого класса $[s]$ полагаем $X_{[s]} \doteq \bigcup\limits_{\nu\in[s]} X_\nu$, и пусть $[S]$ — это совокупность всех классов эквивалентности. Легко убедиться, что система $\{X_{[s]}\}_{[s]\in[S]}$ является $\mathcal{O}$-разбиением множества X и на каждом пересечении $\overline{X}_{[s]}\cap X$ функция f имеет вид $f(x)=(c_s,x)+q_s$.

Теперь можно считать, что изначально в $\mathcal{O}$-разбиении $\{X_1,\ldots,X_r\}$ каждый класс состоит ровно из одного элемента (если это не так, то проведем предварительную факторизацию индексов). Тем самым, $(c_t,q_t)\neq(c_s,q_s)$ для всех $(t,s)\in S^2$ таких, что $t\neq s$. Заметим, что если $r=1$, то $f(x)-f(y)=(c_1,x-y)$ для всех $x,y\in\overline{X}_1\cap X$ $(=\overline{X}\cap X = X)$, поэтому последнее равенство справедливо на всех пересечениях $\overline{X^k}\cap X$ из $\mathcal{D}$-разбиения $\{X^1,\ldots,X^\ell\}$, что и требуется. Далее считаем, что $r\geqslant 2$.

Зафиксируем $k\in K\doteq\{1,\ldots,\ell\}$, и пусть $S_k \doteq \{s\in S\colon X_s^k\neq\varnothing\}$, где $X_s^k \doteq X_s\cap X^k$. Понятно, что система $\{X_s^k\}_{s\in S_k}$ — это $\mathcal{O}$-разбиение множества X^k. Так как $X_s^k\subseteq X_s$ при всех $s\in S_k$, то на каждом пересечении $\overline{X_s^k}\cap X$ функция f имеет вид $f(x)=(c_s,x)+q_s$.

Обозначим $Q_k \doteq \{(t,s)\in S_k^2\colon c_t\neq c_s\}$ и исследуем две альтернативные ситуации.

(A). Если $Q_k=\varnothing$, то $c_t=c_s$ и $q_t\neq q_s$ для всех $(t,s)\in S_k^2$ таких, что $t\neq s$. Допустим, что $\operatorname{card} S_k\geqslant 2$. Зафиксируем индекс $s\in S_k$, и пусть $Y\doteq X^k\backslash\overline{X_s^k}$. Очевидно, $Y\in\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, $Y\cap X_s^k=\varnothing$ и $\overline{Y}\cup\overline{X_s^k} = \overline{X^k}$, поэтому система $\{Y, X_s^k\}$ является $\mathcal{O}$-разбиением множества X^k. Зафиксируем какие-нибудь точки $y\in Y$ и $z\in X_s^k$ (понятно, что $y,z\in X^k$). Так как X^k — связное открытое множество, то существует непрерывная кривая $\varphi\colon[0,1]\to\mathbb{R}^n$ такая, что $\varphi(0)=y$, $\varphi(1)=z$ и $\varphi(\lambda)\in X^k$ для всех $\lambda\in[0,1]$.

Отталкиваясь от отрезка $[a_0,b_0]\doteq[0,1]$, построим последовательность $\{[a_m,b_m]\}_{m\in M}$ вложенных отрезков, применяя итерационную процедуру половинного деления. Последовательно меняем индекс $m=1,2,\ldots$. Обозначим $c_m\doteq\frac12(a_{m-1}+b_{m-1})$ и $\xi_m\doteq\varphi(c_m)$.

В случае $\xi_m\in\overline{Y}\cap\overline{X_s^k}$ справедливо $\xi_m\in X^k\cap\overline{Y}\cap\overline{X_s^k}$ и мы завершаем процесс (здесь $\operatorname{card} M<\infty$.) Так как $\overline{Y}=\overline{X^k}\backslash\overline{X_s^k}\subset\bigcup\limits_{t\in S_k\backslash\{s\}}\overline{X_t^k}$, то существует индекс $t\in S_k\backslash\{s\}$ такой, что $\xi_m\in\overline{X_t^k}$, следовательно, $X^k\cap\overline{X_t^k}\cap\overline{X_s^k}\neq\varnothing$ для некоторых $t,s\in S_k$, $t\neq s$.

В случае $\xi_m \notin \overline{Y} \cap \overline{X_s^k}$ полагаем $[a_m, b_m] \doteq [c_m, b_{m-1}]$ или $[a_m, b_m] \doteq [a_{m-1}, c_m]$ при $\xi_m \in \overline{Y} \backslash \overline{X_s^k}$ или $\xi_m \in \overline{X_s^k} \backslash \overline{Y}$ соответственно. Если процесс бесконечен (здесь $M = \mathbb{N}$), то по теореме о вложенных отрезках существует $c \in [0,1]$ такое, что $a_m \to c$ и $b_m \to c$. Так как функция φ непрерывна, то $\varphi(a_m) \to \xi$ и $\varphi(b_m) \to \xi$, где $\xi \doteq \varphi(c) \in X^k$. Из построений следует, что $\varphi(a_m) \in \overline{Y}$, поэтому $\xi \in \overline{Y}$. Аналогично, $\varphi(b_m) \in \overline{X_s^k}$ и $\xi \in \overline{X_s^k}$. Следовательно, $\xi \in X^k \cap \overline{Y} \cap \overline{X_s^k}$ и $X^k \cap \overline{X_t^k} \cap \overline{X_s^k} \neq \varnothing$ для некоторых $t, s \in S_k$, $t \neq s$.

В обоих случаях найдутся индексы $t, s \in S_k$ такие, что $t \neq s$ и $\overline{X_t^k} \cap \overline{X_s^k} \neq \varnothing$, поэтому для любого $x \in \overline{X_t^k} \cap \overline{X_s^k}$ справедливо $(c_t, x) + q_t = f(x) = (c_s, x) + q_s$, — противоречие. Значит, $\operatorname{card} S_k = 1$, поэтому $\mathcal{O}$-разбиение $\{X_s^k\}_{s \in S_k}$ множества X^k состоит из одного-единственного элемента (обозначим его X_ν^k). Так как $\overline{X^k} = \overline{X_\nu^k} \subseteq \overline{X_\nu}$, то для любых $x, y \in \overline{X^k} \cap X \subseteq \overline{X_\nu} \cap X$ имеет место равенство $f(x) - f(y) = (c_\nu, x - y)$, то есть функция f линейна на множестве $\overline{X^k} \cap X$, а система $\{X^k\}$ — это $\mathcal{D}$-разбиение множества X^k.

(B). Пусть $Q_k \neq \varnothing$. Для всех $(t, s) \in Q_k$ справедливы равенства

$$H_t \cap H_s = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{matrix} z = (c_t, x) + q_t, \\ z = (c_s, x) + q_s \end{matrix} \right\} = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{matrix} z = (c_t, x) + q_t, \\ (C_{ts}, x) = q_{st} \end{matrix} \right\}.$$

Здесь и далее для всех $(t, s) \in Q_k$ используются обозначения $C_{ts} \doteq c_t - c_s$, $q_{st} \doteq q_s - q_t$. Определим гиперплоскость $H_{ts} \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \colon (C_{ts}, x) = q_{st}\}$ — проекцию множества $H_t \cap H_s$ на пространство $\mathbb{R}^n$. Равенство $H_{ts} = H_{st}$ очевидно. Пусть, далее,

$$\mathcal{H}'_k \doteq \bigcup_{(t,s) \in Q_k} H_{ts}, \qquad \mathcal{H}_k \doteq \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{H}'_k. \tag{19}$$

Определим множество $B \doteq \{0, 1\}$, числа $\varkappa_0 = -1$, $\varkappa_1 = 1$ и для всех $((t, s), \iota) \in Q_k \times B$ обозначим $H_{ts}^\iota \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \colon \varkappa_\iota [(C_{ts}, x) - q_{st}] > 0\}$ — полупространства в $\mathbb{R}^n$. Понятно, что $H_{ts}^0 \cup H_{ts} \cup H_{ts}^1 = \mathbb{R}^n$ — дизъюнктное объединение.

Для каждого $x \in \mathcal{H}_k$ полагаем $W(x) \doteq \{((t, s), \iota) \in Q_k \times B \colon x \in H_{ts}^\iota\}$. Считаем точки $x, y \in \mathcal{H}_k$ эквивалентными, если $W(x) = W(y)$. Легко убедиться, что для классов эквивалентности справедливо представление

$$[x] = \bigcap_{((t,s),\,\iota) \in W(x)} H_{ts}^\iota, \qquad x \in \mathcal{H}_k. \tag{20}$$

Конечную совокупность всех классов эквивалентности обозначим через $[\mathcal{H}_k]$.

Так как полупространства H_{ts}^ι — это связные открытые множества, то такими же являются все множества $[x] \in [\mathcal{H}_k]$. Классы $[x]$ попарно не пересекаются и объединение всех их замыканий равно $\mathbb{R}^n$, поэтому система, состоящая из всех этих классов, является $\mathcal{D}$-разбиением пространства $\mathbb{R}^n$ (и открытого множества $\mathcal{H}_k$.) Обозначим $m \doteq \operatorname{card}[\mathcal{H}_k]$, $M \doteq \{1, \ldots, m\}$, а классы эквивалентности $[x]$ обозначим как $Y_1, \ldots, Y_m$. В соответствии с (19) и (20) справедливы включения $Y_i \subset \mathcal{H}_k$, $i \in M$.

Полагаем далее $Z_i \doteq Y_i \cap X^k$ для всех $i \in M$ и $M_k \doteq \{i \in M \colon Z_i \neq \varnothing\}$. Из построений следует, что система $\{Z_i\}_{i \in M_k}$ является $\mathcal{D}$-разбиением множества X^k. Заметим также, что $Z_i \subset \mathcal{H}_k$ для всех $i \in M_k$. Исходное $\mathcal{O}$-разбиение $\{X_s^k\}_{s \in S_k}$ множества X^k порождает множества $V_{is} \doteq Z_i \cap X_s^k$, $(i, s) \in M_k \times S_k$ (очевидно, $V_{is} \subset \mathcal{H}_k$).

Зафиксируем $i \in M_k$, и пусть $M_{ki} \doteq \{s \in S_k \colon V_{is} \neq \varnothing\}$. Очевидно, система $\{V_{is}\}_{s \in M_{ki}}$ является $\mathcal{O}$-разбиением множества Z_i. Допустим, что $\operatorname{card} M_{ki} \geqslant 2$. В этом случае по аналогии с пунктом (A) можно показать, что существуют индексы $t, s \in M_{ki}$ такие, что $t \neq s$ и $\Omega \doteq Z_i \cap \overline{V_{it}} \cap \overline{V_{is}} \neq \varnothing$. (Здесь в роли связного множества X^k выступает связное множество Z_i, они имеют $\mathcal{O}$-разбиения $\{X_s^k\}_{s \in S_k}$ и $\{V_{is}\}_{s \in M_{ki}}$ соответственно.) Для любого

$x \in \Omega$ справедливо $x \in Z_i \subset \mathcal{H}_k$, а с другой стороны, $x \in \overline{V_{it}} \cap \overline{V_{is}} \subseteq \overline{X_t^k} \cap \overline{X_s^k}$, поэтому $(c_t, x) + q_t = f(x) = (c_s, x) + q_s$, следовательно, $x \in H_{ts} \subset \mathcal{H}'_k$ и $x \notin \mathcal{H}_k$, — противоречие. Значит, $\operatorname{card} M_{ki} = 1$, поэтому $\mathcal{O}$-разбиение $\{V_{is}\}_{s \in M_{ki}}$ множества Z_i состоит из одного-единственного элемента (обозначим его V_{is_i}). Так как $\overline{Z}_i = \overline{V_{is_i}} \subseteq \overline{X_{s_i}^k}$, то для любых $x, y \in \overline{Z}_i \cap X \subseteq \overline{X_{s_i}^k} \cap X$ имеет место равенство $f(x) - f(y) = (c_{s_i}, x - y)$.

Таким образом, функция f линейна на каждом множестве $\overline{Z}_i \cap X$, $i \in M_k$, причем система $\{Z_i\}_{i \in M_k}$ — это $\mathcal{D}$-разбиение множества X^k. Объединение (по всем $k \in K$) построенных $\mathcal{D}$-разбиений является требуемым $\mathcal{D}$-разбиением исходного множества X. $\square$

Замечание 4. Пусть в условиях утверждения 1 непустое множество X_0 есть пересечение конечного числа открытых полупространств (поэтому $\ell = 1$ и $X_0 = X^1$). Тогда все элементы $\mathcal{D}$-разбиения, построенного для $\mathcal{O}$-линейной функции $f\colon X \to \mathbb{R}$, — суть открытые выпуклые многогранные множества (такими являются само множество X_0, все классы Y_i и все множества $Z_i = Y_i \cap X^1 = Y_i \cap X_0$).

Доказательство утверждения 2. Так как f — это $\mathcal{O}$-гладкая функция, то в соответствии с определением 5 существует $\mathcal{O}$-разбиение $\{X_1, \ldots, X_r\}$ множества X такое, что для всех $s \in S \doteq \{1, \ldots, r\}$ функция-сужение $f|_{\overline{X}_s \cap X}$ является гладкой.

Зафиксируем $x \in X$, и пусть $S_x \doteq \{s \in S\colon x \in \overline{X}_s\}$ (очевидно $S_x \neq \varnothing$). Множество $\{x\}$ и объединение $U'_x \doteq \bigcup\limits_{s \in S \setminus S_x} \overline{X}_s$ замкнуты и не пересекаются, поэтому они отделимы и, в частности, существует окрестность B_x точки x такая, что $U'_x \cap B_x = \varnothing$. Обозначим $U_x \doteq \bigcup\limits_{s \in S_x} \overline{X}_s$ и $C_x \doteq X \cap B_x$. Тогда $C_x \subseteq \overline{X} \cap B_x = (U'_x \cup U_x) \cap B_x = U_x \cap B_x \subseteq U_x$.

Пусть последовательность $\{x_m\}$, $x_m \in X$, $m \in \mathbb{N}$, такова, что $x_m \to x$. Существует m_0 такое, что $x_m \in B_x$ для всех $m > m_0$, значит, $x_m \in C_x$ при $m > m_0$. Далее без ограничения общности можно считать, что $x_m \in C_x$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

Определим следующие множества: $Y_s \doteq \overline{X}_s \cap C_x$, $s \in S_x$;

$$N_s \doteq \{m \in \mathbb{N}\colon\ x_m \in Y_s\},\ s \in S_x; \qquad T'_x \doteq \{s \in S_x\colon \operatorname{card} N_s < \infty\}; \qquad T_x \doteq S_x \setminus T'_x;$$
$$D'_x \doteq \bigcup_{s \in T'_x} Y_s = \Big(\bigcup_{s \in T'_x} \overline{X}_s\Big) \cap C_x; \qquad D_x \doteq \bigcup_{s \in T_x} Y_s = \Big(\bigcup_{s \in T_x} \overline{X}_s\Big) \cap C_x.$$

Легко убедиться, что $D'_x \cup D_x = U_x \cap C_x = C_x$. В множествах D'_x и $D'_x \setminus D_x$ (вне множества D_x) находится лишь конечное число элементов последовательности $\{x_m\}$ (напомним, что $x_m \in C_x$, $m \in \mathbb{N}$), поэтому далее можно считать, что $x_m \in D_x$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

Для всех $s \in T_x$ определена подпоследовательность $\{x_m\}$, $x_m \in Y_s$. Переобозначим ее через $\{x_m^s\}$. Так как $x_m^s \in Y_s = \overline{X}_s \cap C_x \subset \overline{X}_s \cap X$, $x \in \overline{X}_s \cap X$ и $x_m^s \to x$ при $m \to \infty$, то в силу непрерывности функции $f|_{\overline{X}_s \cap X}$ имеем $f(x_m^s) \to f(x)$. Поскольку предельное значение одинаково для всех $s \in T_x$, то $f(x_m) \to f(x)$, $x_m \in D_x$, поэтому f — непрерывная в точке x функция и, таким образом, она непрерывна на всем множестве X. $\square$

Доказательство теоремы 6. Пусть $f \in \mathcal{L}(X)$. Существуют $\mathcal{O}$-разбиение $\{X_s\}_{s \in S}$ множества X (где $S \doteq \{1, \ldots, r\}$) и система $\Sigma \doteq \{(c_s, q_s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\}_{s \in S}$ такие, что $f(x) = (c_s, x) + q_s$ для всех $s \in S$ и $x \in \overline{X}_s \cap X$. Будем считать, что $(c_t, q_t) \neq (c_s, q_s)$ для всех $(t, s) \in S^2$ таких, что $t \neq s$ (если это не так, то проведем процедуру факторизации индексов, описанную в доказательстве утверждения 1). Обозначим $\Theta \doteq \max\limits_{(c_s, q_s) \in \Sigma} \|c_s\|$.

Зафиксируем $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle \in X_*^{n+1}$ и обозначим $X' \doteq \operatorname{int} \operatorname{conv}\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. По определению симплекса справедливо $\operatorname{conv}\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$, поэтому $X' \subset X$. Кроме того, X' — это открытый выпуклый многогранник. Пусть $X'_s \doteq X_s \cap X'$ для всех $s \in S$

и $S' \doteq \{s \in S\colon\, X'_s \neq \varnothing\}$. Понятно, что система $\{X'_s\}_{s\in S'}$ — это $\mathcal{O}$-разбиение множества X', а так как $X'_s \subseteq X_s$ для всех $s \in S'$, то на каждом пересечении $\overline{X'_s} \cap X$ функция f имеет вид $f(x) = (c_s, x) + q_s$. Пусть $\Sigma' \doteq \{(c_s, q_s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\}_{s\in S'}$. Очевидно, $\Sigma' \subseteq \Sigma$.

В силу утверждения 1 для функции $f|_{X'}$ существуют $\mathcal{D}$-разбиение $\{Z_t\}_{t\in T}$ множества X' (где $T \doteq \{1, \ldots, \ell\}$) и система $\{(c'_t, q'_t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\}_{t\in T}$ (допускаются одинаковые пары) такие, что $f(x) = (c'_t, x) + q'_t$ для всех $t \in T$ и $x \in \overline{Z}_t \cap X'$. Понятно, что $(c'_t, q'_t) \in \Sigma' \,(\subseteq \Sigma)$ для всех $t \in T$, а в соответствии с замечанием 4 все множества Z_t — это открытые выпуклые многогранники, причем если $t \neq s$ и $\overline{Z}_t \cap \overline{Z}_s \neq \varnothing$, то для любого $x \in \overline{Z}_t \cap \overline{Z}_s$ справедливо равенство $(C'_{ts}, x) = q'_{st}$, где $C'_{ts} \doteq c'_t - c'_s$ и $q'_{st} \doteq q'_s - q'_t$.

Пусть $x, y \in X'$, $x \neq y$ и $L \doteq \{(1-\lambda)y + \lambda x\}_{\lambda\in[0,1]}$. Очевидно, $L \subset X'$. Если $x, y \in \overline{Z}_t$ для некоторого $t \in T$, то $f(x) - f(y) = (c'_t, x - y)$ и $|f(x) - f(y)| \leqslant \Theta\,\|x - y\|$.

Если $x \in \overline{Z}_t$ для некоторого $t \in T$, а $y \notin \overline{Z}_t$, то существует $s \in T\backslash\{t\}$ такое, что $y \in \overline{Z}_s$, и найдется, по крайней мере, одна пара $(\tau, \sigma) \in T^2$ такая, что многогранники Z_t и Z_s находятся по разные стороны от гиперплоскости $H_{\tau\sigma} \doteq \{x \in \mathbb{R}^n\colon (C'_{\tau\sigma}, x) = q'_{\sigma\tau}\}$. Совокупность всех таких пар обозначим через D.

Зафиксируем $(\tau, \sigma) \in D$. Так как L — это отрезок прямой, $x \in L \cap \overline{Z}_t$, $y \in L \cap \overline{Z}_s$, а $H_{\tau\sigma}$ — гиперплоскость, разделяющая многогранники Z_t и Z_s, то существует $\lambda_{\tau\sigma} \in [0, 1]$ такое, что точка $\xi_{\tau\sigma} \doteq (1-\lambda_{\tau\sigma})y + \lambda_{\tau\sigma}x$ принадлежит пересечению $L \cap H_{\tau\sigma}$.

Пусть $\Lambda \doteq \{0, 1\} \cup \{\lambda_{\tau\sigma}\}_{(\tau,\sigma)\in D}$ и $d \doteq \operatorname{card}\Lambda - 1$. Переобозначим элементы множества Λ, упорядочив их по возрастанию: $0 = \lambda^0 \leqslant \lambda^1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda^d = 1$. Соответствующие им точки $\xi^i \doteq (1-\lambda^i)y + \lambda^i x$, $i \in \{0\} \cup I$ (где $I \doteq \{1, \ldots, d\}$), принадлежат отрезку L, причем $\xi^0 = y$ и $\xi^d = x$.

Пусть, далее, $L^i \doteq \{(1-\lambda)\xi^{i-1} + \lambda\xi^i\}_{\lambda\in(0,1)}$, $i \in I$. В силу построений интервал L^i не пересекается ни с одной гиперплоскостью $H_{\tau\sigma}$, следовательно, существует $t_i \in T$ такое, что $L^i \subset \overline{Z_{t_i}}$, поэтому $f(\xi^i) - f(\xi^{i-1}) = (c'_{t_i}, \xi^i - \xi^{i-1}) = \alpha^i\,(c'_{t_i}, x - y)$ (где $\alpha^i \in (0, 1)$ — коффициент вхождения отрезка $\overline{L^i}$ в отрезок L). Очевидно, $\alpha^1 + \ldots + \alpha^d = 1$, поэтому

$$|f(x) - f(y)| = \Big|\sum_{i\in I}\big(f(\xi^i) - f(\xi^{i-1})\big)\Big| = \Big|\sum_{i\in I}\alpha^i\,(c'_{t_i}, x - y)\Big| \leqslant \Theta\,\|x - y\|. \tag{21}$$

Сконструируем (гомотетией, как в доказательстве утверждения 7) последовательность $\{\langle x_0^m, x_1^m, \ldots, x_n^m\rangle\}_{m\in\mathbb{N}}$ такую, что $\operatorname{conv}\{x_0^m, x_1^m, \ldots, x_n^m\} \subset X'$ для всех $m \in \mathbb{N}$ и $x_k^m \xrightarrow[m]{} x_k$ для всех $k \in \{0\} \cup N$. В силу формул (7) и (21) справедливо $\|\,\Gamma_f\,\langle x_0^m, x_1^m, \ldots, x_n^m\rangle\|^2 \leqslant n\Theta^2$. Так как f — непрерывная функция, то в силу утверждения 5 функция Γ_f тоже непрерывна, поэтому справедлив предельный переход: $\|\,\Gamma_f\,\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle\| \leqslant \sqrt{n}\,\Theta$, следовательно, $\gamma(f) \leqslant \sqrt{n}\,\Theta$ и $f \in \mathcal{G}(X)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А. Б., Пеллер В. В. Операторно липшицевы функции // Успехи математических наук. 2016. Т. 71. Вып. 4 (430). С. 3–106. https://doi.org/10.4213/rm9729
2. McDonald E., Sukochev F. Lipschitz estimates in quasi-Banach Schatten ideals // Mathematische Annalen. 2021. Vol. 383. Nos. 1–2. P. 571–619. https://doi.org/10.1007/s00208-021-02247-x
3. Mohanta K., Mudarra C., Oikari T. Traces of vanishing Hölder spaces // Journal of Geometric Analysis. 2024. Vol. 35. Issue 1. Article number: 34. https://doi.org/10.1007/s12220-024-01871-8
4. Bittencourt T., Ferreira O. P. Kantorovich's theorem on Newton's method under majorant condition in Riemannian manifolds // Journal of Global Optimization. 2016. Vol. 68. No. 2. P. 387–411. https://doi.org/10.1007/s10898-016-0472-y

5. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 2. М.: Высшая школа, 1981. https://zbmath.org/0485.26002
6. Родионов В. И. К вопросу о сплайн-аппроксимации функций нескольких переменных // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2007. Вып. 1. С. 121–126. https://www.mathnet.ru/rus/vuu270
7. Родионов В. И. Об одном семействе интерполяционных многочленов нескольких переменных // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 2. С. 127–132. https://doi.org/10.20537/vm100212
8. Субботин Ю. Н., Новиков С. И., Шевалдин В. Т. Экстремальная функциональная интерполяция и сплайны // Труды института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24. № 3. С. 200–225. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-3-200-225
9. Зайцева Т. И. Многомерные тайловые B-сплайны // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2023. Т. 87. Вып. 2. С. 89–132. https://doi.org/10.4213/im9296
10. Демышев А. С., Родионов В. И. Об эквивалентном определении непрерывной дифференцируемости // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2006. Вып. 2 (36). С. 39–42. https://www.mathnet.ru/rus/iimi110
11. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983.
12. Эванс Л. К. Уравнения с частными производными. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003.
13. Багапш А. О. Метод возмущений для сильно эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Уфимский математический журнал. 2023. Т. 15. Вып. 4. С. 20–29. https://www.mathnet.ru/rus/ufa673
14. Bhujel M., Hazarika B. Solvability of quartic integral equations in Hölder space // Rocky Mountain Journal of Mathematics. 2024. Vol. 54. No. 4. P. 955–963. https://doi.org/10.1216/rmj.2024.54.955

Поступила в редакцию 15.01.2025
Принята к публикации 29.03.2025

Родионов Виталий Иванович, к. ф.-м. н., зав. кафедрой, кафедра информатики и математики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
ORCID: https://orcid.org/0009-0009-4502-4464
E-mail: rodionov@uni.udm.ru

Цитирование: В. И. Родионов. О специальной норме и полноте пространств непрерывных функций многих переменных с ограничениями типа Липшица–Гёльдера // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 2. С. 261–281.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2025. Vol. 35. Issue 2. Pp. 261–281.

V. I. Rodionov

On the special norm and completeness of spaces of continuous functions of several variables with Lipschitz–Hölder type constraints

Keywords: Lipschitz–Hölder condition, frame, simplex, partition of a set, piecewise linear function.

MSC2020: 26A16, 41A05

DOI: 10.35634/vm250207

Let $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ be a nonempty open set and $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. We admit that the set X_0 is unbounded and/or has a countable number of connected components. In this paper, we study some spaces of functions $f\colon X \to \mathbb{R}$ endowed with a special norm $\|\cdot\|$. The definition of the norm involves an n-dimensional vector $(\Delta x)^{-1}\Delta f$, which is an analogue of the relation $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ generating the concept of the derivative of a function of one variable. The vector $(\Delta x)^{-1}\Delta f$ can be associated with the vector $\operatorname{grad} f(\cdot)$. The invertible matrix Δx of order n consists of special increments of the argument $x \in \mathbb{R}^n$, and the vector Δf consists of special increments of the function f. A number of properties of the vector $(\Delta x)^{-1}\Delta f$ is proved, and an exact formula for its Euclidean norm is obtained. We prove the completeness with respect to a special norm $\|\cdot\|$ of the space $\mathcal{G}(X)$ consisting of continuous bounded functions $f\colon X \to \mathbb{R}$ and having additional restrictions of the Lipschitz–Hölder type. Such functions play an important role in solving mathematical physics problems. A number of important subspaces of the space $\mathcal{G}(X)$ is investigated. It is proved that two of them are Banach, and one of them, for $n = 1$ and under certain conditions, is the closure of the space of piecewise linear functions $f\colon X \to \mathbb{R}$.

REFERENCES

1. Aleksandrov A. B., Peller V. V. Operator Lipschitz functions, *Russian Mathematical Surveys*, 2016, vol. 71, issue 4, pp. 605–702. https://doi.org/10.1070/RM9729
2. McDonald E., Sukochev F. Lipschitz estimates in quasi-Banach Schatten ideals, *Mathematische Annalen*, 2021, vol. 383, nos. 1–2, pp. 571–619. https://doi.org/10.1007/s00208-021-02247-x
3. Mohanta K., Mudarra C., Oikari T. Traces of vanishing Hölder spaces, *Journal of Geometric Analysis*, 2024, vol. 35, issue 1, article number: 34. https://doi.org/10.1007/s12220-024-01871-8
4. Bittencourt T., Ferreira O. P. Kantorovich's theorem on Newton's method under majorant condition in Riemannian manifolds, *Journal of Global Optimization*, 2016, vol. 68, no. 2, pp. 387–411. https://doi.org/10.1007/s10898-016-0472-y
5. Kudryavtsev L. D. *Kurs matematicheskogo analiza. Tom 2* (A course in mathematical analysis. Vol. 2), Moscow: Vysshaya Shkola, 1981. https://zbmath.org/?q=an:0485.26002
6. Rodionov V. I. On spline-approximation of functions of some variables, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika*, 2007, issue 1, pp. 121–126 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/vuu270
7. Rodionov V. I. On family of interpolated polynomials of some variables, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2010, issue 2, pp. 127–132 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm100212
8. Subbotin Yu. N., Novikov S. I., Shevaldin V. T. Extremal functional interpolation and splines, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 200–225 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-3-200-225
9. Zaitseva T. I. Multivariate tile B-splines, *Izvestiya: Mathematics*, 2023, vol. 87, issue 2, pp. 284–325. https://doi.org/10.4213/im9296e
10. Demyshev A. S., Rodionov V. I. On equivalent definition of continuous differentiability, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2006, issue 2 (36), pp. 39–42 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/iimi110
11. Hutson V., Pym J. S. *Applications of functional analysis and operator theory*, London: Academic Press, 1980. https://zbmath.org/0426.46009

Translated under the title *Prilozheniya fuktsional'nogo analiza i teorii operatorov*, Moscow: Mir, 1983.

12. Evans L. C. *Partial differential equations*, Providence: AMS, 1998. https://zbmath.org/0902.35002 Translated under the title *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi*, Novosibirsk: Tamara Rozhkovskaya, 2003.
13. Bagapsh A. O. Perturbation method for strongly elliptic second order systems with constant coefficients, *Ufa Mathematical Journal*, 2023, vol. 15, issue 4, pp. 21–30. https://doi.org/10.13108/2023-15-4-21
14. Bhujel M., Hazarika B. Solvability of quartic integral equations in Hölder space, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 2024, vol. 54, no. 4, pp. 955–963. https://doi.org/10.1216/rmj.2024.54.955

Received 15.01.2025
Accepted 29.03.2025

Vitalii Ivanovich Rodionov, Candidate of Physics and Mathematics, Head of Department, Department of Informatics and Mathematics, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0009-0009-4502-4464
E-mail: rodionov@uni.udm.ru

Citation: V. I. Rodionov. On the special norm and completeness of spaces of continuous functions of several variables with Lipschitz–Hölder type constraints, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 2, pp. 261–281.