

УДК 517.926

© А. Х. Сташ, А. Е. Артисевич

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ГЛАВНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ ЗНАКОВ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Тематика исследования данной работы находится на стыке двух направлений качественной теории дифференциальных уравнений — теории показателей Ляпунова и теории колеблемости. В настоящей работе исследуются различные разновидности показателей колеблемости (строгих и нестрогих) знаков решений линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка с непрерывными на положительной полуоси коэффициентами. Конструктивно в работе построено многопараметрическое семейство дифференциальных уравнений третьего порядка, на котором реализуются различные соотношения между главными значениями показателей колеблемости. При фиксированных значениях последовательности параметров получаются точки из указанного семейства уравнений, в которых все главные значения показателей колеблемости не являются инвариантными относительно бесконечно малых возмущений (то есть исчезающих на бесконечности). Кроме того, на множестве всех ненулевых решений указанного семейства уравнений все показатели колеблемости совпадают между собой. При построении указанного уравнения и доказательстве требуемых результатов использованы аналитические методы качественной теории дифференциальных уравнений и методы теории возмущений решений линейных дифференциальных уравнений, в частности, метод варьирования уравнения.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, линейная система, колеблемость, число нулей, показатель колеблемости, характеристическая частота, показатель Ляпунова.

DOI: [10.35634/vm250208](https://doi.org/10.35634/vm250208)

Введение

В работах [1–4] И. Н. Сергеева вводились и исследовались различные характеристики ляпуновского типа ненулевых решений линейных дифференциальных уравнений и систем, отвечающие за колеблемость, вращаемость и блуждаемость решений на полупрямой. В 2015 году все введенные к тому моменту характеристики ляпуновского типа были систематизированы, что привело к изменению названий некоторых из них (см. [4]): в частности, полные и векторные частоты были переименованы соответственно в сильные и слабые показатели колеблемости. В работах [5–7] характеристические частоты стали называться частотами Сергеева.

Известно, что у любого уравнения второго порядка все верхние (как и все нижние) характеристики колеблемости одинаковы и устойчивы при равномерно малых и бесконечно малых возмущениях коэффициентов уравнения, а у уравнения третьего порядка бывают различны, причем для каждого из главных значений характеристических частот существует пример ее неустойчивости [1–3].

Из результатов работ [3, 8–11] вытекает, что каждое из главных значений показателей колеблемости, блуждаемости и ориентированной вращаемости на пространстве автономных дифференциальных уравнений есть непрерывная функция.

Вопросы устойчивости и неустойчивости некоторых главных значений показателей колеблемости, блуждаемости и ориентированной вращаемости на множестве линейных однородных дифференциальных систем изучались в работах [12–15].

Настоящая работа логически продолжает и развивает некоторые основные результаты работы [1] на большее число разновидностей характеристик колеблемости.

§ 1. Основные обозначения и определения

Для заданного натурального $n > 1$ рассмотрим множество $\tilde{\mathcal{E}}^n$ линейных однородных уравнений n -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty),$$

задаваемых наборами *непрерывных* функций $a \equiv (a_1, \dots, a_n): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения. Подмножество таких уравнений с ограниченными на $\mathbb{R}_+$ коэффициентами обозначим через $\mathcal{E}^n$. Пространство решений уравнения $\tilde{\mathcal{E}}^n$ обозначим через $\mathcal{S}(a)$ и положим

$$\mathcal{S}_*(a) \equiv \mathcal{S}(a) \setminus \{0\}, \quad \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{E}}}^n = \bigcup_{a \in \tilde{\mathcal{E}}^n} \mathcal{S}_*(a).$$

Определение 1 (см. [1]). Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая (нестрогая) смена знака* функции $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, если в любой проколотой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

Определение 2 (см. [1, 2]). Для любых момента $t > 0$ и функции $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ введем следующие обозначения:

$\nu^-(y, t)$ — число точек ее *строгой смены знака* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^\sim(y, t)$ — число точек ее *нестрогой смены знака* на промежутке $(0, t]$.

Заметим справедливость неравенства $\nu^-(y, t) \leq \nu^\sim(y, t)$. Например, у функции $y = \sin t$ точка $t = \pi$ является строгой и нестрогой сменой знака, а нуль $t = \pi/2$ функции $z = \sin t - 1$ не является ни строгой, ни нестрогой сменой знака. Функция $u \equiv 0$ на $\mathbb{R}_+$ не имеет ни одной точки строгой смены знака, а каждая точка интервала $(0, 1]$ для нее является нестрогой сменой, поэтому $\nu^-(u, 1) = 0$ и $\nu^\sim(u, 1) = +\infty$.

Для вектора $m \in \mathbb{R}_*^n \equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и вектор-функции $\psi^n y = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ введем обозначение $\nu^\alpha(y, m, t) \equiv \nu^\alpha(\langle \psi^n y, m \rangle, t)$, где $\alpha \in \{-, \sim\}$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение. Далее, для любых функций $y \in \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{E}}}^n$, вектора $m \in \mathbb{R}_*^n$ и чисел $s < t$ добавим обозначения

$$\nu^-(y, s, t) \equiv \nu^-(y, t) - \nu^-(y, s), \quad \nu^\alpha(y, m, s, t) \equiv \nu^\alpha(y, m, t) - \nu^\alpha(y, m, s), \quad \alpha \in \{-, \sim\}.$$

Определение 3 (см. [1, 2]). *Верхние (нижние) характеристические частоты строгих смен знаков* решения $y \in \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{E}}}^n$ зададим соответственно формулами

$$\hat{\omega}^-(y) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^-(y, t) \quad \left(\check{\omega}^-(y) \equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^-(y, t) \right).$$

Определение 4 (см. [3, 4]). *Верхние (нижние) сильный и слабый показатели колеблемости строгих и нестрогих смен знаков* функции $y \in \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{E}}}^n$ зададим при $\alpha \in \{-, \sim\}$ соответственно формулами

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_\bullet^\alpha(y) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y, m, t) & \left(\check{\nu}_\bullet^\alpha(y) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y, m, t) \right), \\ \hat{\nu}_\circ^\alpha(y) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y, m, t) & \left(\check{\nu}_\circ^\alpha(y) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(y, m, t) \right). \end{aligned}$$

Замечание 1. Для любой функции $y \in \mathcal{S}_{\varepsilon}^n$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \check{\nu}_{\circ}^{-}(y) &\leq \hat{\nu}_{\circ}^{-}(y), \quad \check{\nu}_{\bullet}^{-}(y) \leq \hat{\nu}_{\bullet}^{-}(y), \quad \check{\nu}_{\circ}^{\sim}(y) \leq \hat{\nu}_{\circ}^{\sim}(y), \quad \check{\nu}_{\bullet}^{\sim}(y) \leq \hat{\nu}_{\bullet}^{\sim}(y), \quad \check{\omega}^{-}(y) \leq \hat{\omega}^{-}(y), \\ \check{\nu}_{\circ}^{-}(y) &\leq \check{\nu}_{\circ}^{\sim}(y), \quad \check{\nu}_{\bullet}^{-}(y) \leq \check{\nu}_{\bullet}^{\sim}(y), \quad \hat{\nu}_{\circ}^{-}(y) \leq \hat{\nu}_{\circ}^{\sim}(y), \quad \hat{\nu}_{\bullet}^{-}(y) \leq \hat{\nu}_{\bullet}^{\sim}(y), \\ \check{\nu}_{\circ}^{\sim}(y) &\leq \check{\nu}_{\bullet}^{\sim}(y), \quad \hat{\nu}_{\circ}^{\sim}(y) \leq \hat{\nu}_{\bullet}^{\sim}(y), \quad \check{\nu}_{\circ}^{-}(y) \leq \check{\nu}_{\bullet}^{-}(y) \leq \check{\omega}^{-}(y), \quad \hat{\nu}_{\circ}^{-}(y) \leq \hat{\nu}_{\bullet}^{-}(y) \leq \hat{\omega}^{-}(y). \end{aligned}$$

Определение 5 (см. [16]). Для функции $y \in \mathcal{S}_{\varepsilon}^n$ условимся о следующем:

- (1) если значение некоторой верхней (с крышечкой) характеристики (показателя колеблемости или характеристической частоты) совпадает со значением одноименной нижней (с галочкой) характеристикой, то будем называть это значение *точным*, записывая его без галочки и без крышечки;
- (2) если значение некоторого слабого (с пустым кружочком) показателя колеблемости совпадает со значением одноименного сильного (с полным кружочком) показателя, то будем называть это значение *абсолютным*, записывая его без кружочков вообще.

Вычисления показателей колеблемости упрощают следующие две леммы.

Лемма 1. Пусть строго возрастающая последовательность положительных чисел (t_k) удовлетворяет условиям

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{t_{k+1}}{t_k} = 1. \quad (1.1)$$

Тогда для любой нестрого возрастающей функции $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ справедливы равенства

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} = \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(t_k)}{t_k}, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(t_k)}{t_k}, \quad (1.2)$$

а при дополнительном условии

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (t_{k+1} - t_k) = +\infty, \quad (1.3)$$

верно еще и следующее: если для некоторых чисел $T, l \geq 0$ в знаменателях (1.2) каждое из чисел t_k уменьшить на $T_k \leq kT$, а каждое из чисел $f(t_k)$ — на $l_k \leq kl$, то значения пределов (1.2) от этого не изменятся.

Доказательство.

1. Сначала фиксируем очевидные оценки

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(t_k)}{t_k}, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(t_k)}{t_k}.$$

Теперь, учитывая условия (1.1), на основании неотрицательности и нестрогого возрастания функции $f(\cdot)$ запишем недостающие оценки

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} &\geq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(t_k)}{t_{k+1}} = \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(t_k)}{t_{k+1}} \cdot \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{t_{k+1}}{t_k} = \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(t_k)}{t_k}, \\ \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(t_{k+1})}{t_k} = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(t_{k+1})}{t_{k+1}} \cdot \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{t_{k+1}}{t_k} = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(t_k)}{t_k} \end{aligned}$$

для установления справедливости равенств (1.2).

2. Из условия (1.3) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ при каждом $k \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого номера k_0 , имеет место оценка $t_{k+1} - t_k > 1/\varepsilon$, а с ней и оценка для предела

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{t_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{t_{k_0} + (t_k - t_{k_0})} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{t_{k_0} + (k - k_0)/\varepsilon} = \varepsilon,$$

который в силу произвольности числа ε равен нулю. Следовательно, при выполнении обоих условий (1.1) и (1.3) будем иметь цепочку равенств

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(t_k) - l_k}{t_k - T_k} = \frac{\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(t_k)}{t_k} - \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{l_k}{t_k}}{1 - \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{T_k}{t_k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(t_k)}{t_k},$$

справедливую и при замене нижнего предела на верхний.

Лемма 1 полностью доказана. $\square$

Заметим, что при любых фиксированных $\alpha \in \{-, \sim\}$, $y \in \mathcal{S}_{\varepsilon}^n$, $m \in \mathbb{R}_*^n$ каждая из функций $f(\cdot) = \nu^-(y, \cdot)$, $f(\cdot) = \nu^\alpha(y, m, \cdot)$, $f(\cdot) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \nu^\alpha(y, m, \cdot)$ нестрого возрастает на $\mathbb{R}_+$. Следовательно, из леммы 1 вытекает (см. также [1, лемма 6] и [17, лемма 1]) справедливость следующей леммы.

Лемма 2. Пусть строго возрастающая последовательность положительных чисел (t_k) удовлетворяет условиям (1.1). Тогда для любых $y \in \mathcal{S}_{\varepsilon}^n$ и $\alpha \in \{-, \sim\}$ справедливы равенства

$$\hat{\omega}^-(y) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t_k} \nu^-(y, t_k) \quad \left(\check{\omega}^-(y) = \underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t_k} \nu^-(y, t_k) \right), \quad (1.4)$$

$$\hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(y) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t_k} \nu^{\alpha}(y, m, t_k) \quad \left(\check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(y) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t_k} \nu^{\alpha}(y, m, t_k) \right), \quad (1.5)$$

$$\hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}(y) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t_k} \nu^{\alpha}(y, m, t_k) \quad \left(\check{\nu}_{\circ}^{\alpha}(y) = \underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t_k} \nu^{\alpha}(y, m, t_k) \right), \quad (1.6)$$

а при дополнительном условии (1.3) верно еще и следующее: если для некоторых чисел T , $l \geq 0$ в знаменателях (1.4), (1.5) и (1.6) каждое из чисел t_k уменьшить на $T_k \leq kT$, а каждое из чисел $\nu^-(y, t_k)$, $\nu^\alpha(y, m, t_k)$ — на $l_k \leq kl$, то значения пределов (1.4), (1.5) и (1.6) от этого не изменятся.

Определение 6. Спектром показателя $\varkappa$ уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$ назовем множество

$$\varkappa(\mathcal{S}_*(a)) \equiv \{\varkappa(y) \mid y \in \mathcal{S}_*(a)\}.$$

Приведем несколько примеров вычисления спектров показателей колеблемости.

Пример 1. Найдем спектры показателей колеблемости автономного уравнения

$$\ddot{y} + \dot{y} = 0, \quad (1.7)$$

соответствующего вектору $a \equiv (0, 1, 0)$.

Решение. Для произвольного нетривиального решения $y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3$ и вектора $m^0 = (1, 0, 1)$ имеем два случая.

1. Если $c_3 \neq 0$, то имеем представление $\langle \psi^3 y, m^0 \rangle = \ddot{y} + y = c_3$, а значит, $\nu^-(y) = \nu^\sim(y) = 0$.

2. Если $c_3 = 0$, то в силу $\langle \psi^3 y, m^0 \rangle \equiv 0$ при любом $t > 0$ выполнены равенства

$$\nu^-(y, m^0, t) = 0, \quad \nu^{\sim}(y, m^0, t) = +\infty,$$

откуда получим $\nu^-(y) = 0$. Для любого вектора $m \nparallel m^0$ найдутся вспомогательный аргумент t_m и число $A_m \neq 0$, что справедливо представление $\langle \psi^3 y, m \rangle = A_m \sin(t - t_m)$, из которого получим

$$\check{\nu}^{\sim}(y) = \hat{\nu}^{\sim}(y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \left[\frac{t}{\pi} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \left(\frac{t}{\pi} - \left\{ \frac{t}{\pi} \right\} \right) = 1.$$

Следовательно, спектры показателей колеблемости знаков равны

$$\nu^-(\mathcal{S}_*(a)) = \{0\}, \quad \nu^{\sim}(\mathcal{S}_*(a)) = \{0, 1\}.$$

Пример 2. Сделаем в уравнении (1.7) замену $y(t) = e^{-t^2} z(t)$. Найдем спектры характеристик колеблемости получившегося уравнения, коэффициенты которого обозначим через $b \equiv (b_1, b_2, b_3)$.

Решение. Положим $c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$. Каждому решению

$$y_c(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin(t - t_c) + c_3$$

уравнения (1.7) поставим в соответствие решение $z_c(t) = e^{t^2} y_c(t)$ уравнения b . Очевидно, что для любого набора $c \in \mathbb{R}_*^3$ нули и точки строгой смены знака двух функций y_c и z_c совпадают между собой.

1. Если $c_1^2 + c_2^2 \leq c_3^2$, то для вектора $m^1 = (1, 0, 0)$ выполнено равенство

$$\langle \psi^3 z_c(t), m^1 \rangle = e^{t^2} \left(\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin(t - t_c) + c_3 \right),$$

из которого получаем $\omega^-(z_c) = \nu^-(z_c) = \nu^{\sim}(z_c) = 0$.

2. Если $c_1^2 + c_2^2 > c_3^2$, то функция $\langle \psi^3 z_c, m^1 \rangle = z_c$ на каждом полуинтервале длины 2π имеет два нуля, являющиеся точками строгих смен знаков. Поэтому на основании леммы 2 оценим верхние характеристики колеблемости

$$\hat{\omega}^-(z_c) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^-(z_c, t) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2\pi k} \sum_{i=1}^k \nu(z_c, 2\pi(i-1), 2\pi i) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{2k}{2k} = 1, \quad (1.8)$$

$$\hat{\nu}_{\bullet}^{\sim}(z_c) = \inf_{m \in \mathbb{R}^3} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^{\sim}(z_c, m, t) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^-(z_c, t) = 1. \quad (1.9)$$

Для любого $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{R}_*^3$ рассмотрим поведение функции

$$\begin{aligned} e^{-t^2} \langle \psi^3 z_c(t), m \rangle &\equiv m_1 \left(\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin(t - t_c) + c_3 \right) + \\ &+ m_2 \left(2t \left(\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin(t - t_c) + c_3 \right) + \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos(t - t_c) \right) + \\ &+ m_3 \left((4t^2 + 2) \left(\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin(t - t_c) + c_3 \right) + 4t \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos(t - t_c) - \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin(t - t_c) \right) \end{aligned}$$

на всех промежутках вида $(t_k, t_{k+1}]$, где $t_k = \pi/2 + \pi k + t_c$, начиная с некоторого достаточно большого номера k .

Если $m_3 \neq 0$, то найдутся такие K_c, L_c , что выполнена оценка сверху

$$\left| \langle \psi^3 z_c(t), m \rangle - m_3 e^{t^2} (4t^2 + 2) \left(\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin(t - t_c) + c_3 \right) \right| \leq e^{t^2} (K_c t + L_c).$$

Следовательно, найдется такой номер k_c , что выполнены оценки снизу

$$\nu^-(z_c, m, t_k, t_{k+1}) \geq 1, \quad k \geq k_c. \quad (1.10)$$

Если $m_3 = 0, m_2 \neq 0$, то также выполнены соотношения (1.10), поскольку для некоторого M_c выполнена оценка

$$\left| \langle \psi^3 z_c(t), m \rangle - 2m_2 t e^{t^2} \left(\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin(t - t_c) + c_3 \right) \right| \leq M_c e^{t^2}.$$

Справедливость нестрогих неравенств (1.10) очевидна и в случае $m_2 = m_3 = 0$, поскольку

$$\langle \psi^3 z_c(t), m \rangle = m_1 e^{t^2} \left(\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin(t - t_c) + c_3 \right).$$

Следовательно, на основании леммы 2 получим соотношение

$$\begin{aligned} \check{\nu}_o^-(z_c) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^3} \nu^-(z_c, m, t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t_k} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^3} \nu^-(z_c, m, t_k, t_{k+1}) = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t_k - t_{k_c}} \sum_{i=k_c}^k \inf_{m \in \mathbb{R}_*^3} \nu^-(z_c, m, t_i, t_{i+1}) \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi(k - k_c)}{\pi(k - k_c)} = 1, \end{aligned}$$

из которого с учетом равенства (1.8), оценки (1.9) и замечания 1, следует справедливость цепочки равенств $\omega^-(z_c) = \nu^-(z_c) = \nu^{\sim}(z_c) = 1$.

Таким образом, спектры всех характеристик колеблемости состоят из двух чисел

$$\nu^-(\mathcal{S}_*(b)) = \nu^{\sim}(\mathcal{S}_*(b)) = \omega^-(\mathcal{S}_*(b)) = \{0, 1\}.$$

Определение 7 (см. [1–3]). Для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ и

$$\varkappa = \check{\nu}_o^-, \check{\nu}_o^{\sim}, \hat{\nu}_o^-, \hat{\nu}_o^{\sim}, \check{\nu}_{\bullet}^-, \check{\nu}_{\bullet}^{\sim}, \hat{\nu}_{\bullet}^-, \hat{\nu}_{\bullet}^{\sim}, \check{\omega}^-, \hat{\omega}^- \quad (1.11)$$

назовем i -м верхним $\varkappa_i(a)$ и нижним $\varkappa_{\underline{i}}(a)$ главными (или *регуляризованными по Миллионщикovu*) значениями соответствующего показателя колеблемости уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$ величины, задаваемые равенствами

$$\varkappa_i(a) \equiv \inf_{L \in G^i(a)} \sup_{y \in L_*} \varkappa(y), \quad \varkappa_{\underline{i}}(a) \equiv \sup_{L \in G^{n-i+1}(a)} \inf_{y \in L_*} \varkappa(y),$$

где $L_* = L \setminus \{0\}$, а через $G^i(a)$ обозначено множество i -мерных подпространств пространства $\mathcal{S}(a)$.

Замечание 2. Если для уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$ отображение $\varphi_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{S}(a)$ осуществляет изоморфизм линейных пространств, то для каждого $i = 1, \dots, n$ отображение φ_a порождает также и изоморфизм множеств G^i и $G^i(a)$, где G^i — множество i -мерных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$. Следовательно, для любого показателя $\varkappa$ из списка (1.11) справедливы формулы

$$\varkappa_i(a) = \inf_{L \in G^i} \sup_{c \in L_*} \varkappa(\varphi_a(c)), \quad \varkappa_{\underline{i}}(a) = \sup_{L \in G^{n-i+1}} \inf_{c \in L_*} \varkappa(\varphi_a(c)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Определение 8 (см. [1–3]). Скажем, что функционал $\varkappa: \tilde{\mathcal{E}}^n \rightarrow \mathbb{R}$ не инвариантен в точке $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$ относительно бесконечно малых возмущений, если существует уравнение $b \in \tilde{\mathcal{E}}^n$, удовлетворяющее условиям

$$\varkappa(b) \neq \varkappa(a), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |b(t) - a(t)| = 0,$$

где обозначено $|a(t)| = \sqrt{a_1^2(t) + \dots + a_n^2(t)}$.

§ 2. Формулировка основных результатов

Доказательство теоремы VI [1] переносится на рассматриваемые функционалы (1.11). Следовательно, для любого уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$ справедливы соотношения

$$0 \leq \varkappa_{\overline{1}}(a) \leq \dots \leq \varkappa_{\overline{n}}(a), \quad 0 \leq \varkappa_{\underline{1}}(a) \leq \dots \leq \varkappa_{\underline{n}}(a), \quad (2.1)$$

$$\varkappa_{\underline{i}}(a) \leq \varkappa_{\overline{i}}(a), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

$$\varkappa_{\underline{1}}(a) = \varkappa_{\overline{1}}(a) = \inf_{y \in \mathcal{S}_*(a)} \varkappa(y), \quad \varkappa_{\underline{n}}(a) = \varkappa_{\overline{n}}(a) = \sup_{y \in \mathcal{S}_*(a)} \varkappa(y).$$

На множестве автономных уравнений нестрогие неравенства (2.2) всегда превращаются в равенства, а любое из неравенств (2.1) иногда и обращается в равенство (см. [3, 8–10]), но уже для уравнения третьего порядка каждое из этих неравенств может оказаться строгим, причем практически независимо друг от друга, о чем говорит

Теорема 1. *Существуют такие уравнения $a^1, a^2, a^3, a^4 \in \tilde{\mathcal{E}}^3$, что для каждого показателя $\varkappa$ из списка (1.11) выполняются соотношения*

$$\begin{aligned} 0 < \varkappa_1(a^1) = \varkappa_{\underline{2}}(a^1) < \varkappa_{\overline{2}}(a^1) = \varkappa_3(a^1), & \quad 0 < \varkappa_1(a^2) < \varkappa_{\underline{2}}(a^2) = \varkappa_{\overline{2}}(a^2) < \varkappa_3(a^2), \\ 0 < \varkappa_1(a^3) = \varkappa_{\underline{2}}(a^3) < \varkappa_{\overline{2}}(a^3) < \varkappa_3(a^3), & \quad 0 = \varkappa_1(a^4) < \varkappa_{\underline{2}}(a^4) < \varkappa_{\overline{2}}(a^4) = \varkappa_3(a^4), \end{aligned}$$

причем

$$\nu^-(x) = \nu^{\sim}(x) = \omega^-(x), \quad x \in \mathcal{S}_*(a^i), \quad i = \overline{1, 4}.$$

Следующая теорема делает содержательным исследование устойчивости главных значений показателей колеблемости на множестве уравнений порядка выше второго.

Теорема 2. *Существуют дифференциальные уравнения на множестве $\tilde{\mathcal{E}}^3$, в которых все главные значения показателей колеблемости не инвариантны относительно бесконечно малых возмущений.*

Замечание 3. Из теоремы 2, на основании леммы 7 [1], не следует разрывность показателей колеблемости в равномерной топологии на множестве $\tilde{\mathcal{E}}^3$, поскольку сильные показатели колеблемости нестрогих знаков не являются остаточными (то есть инвариантными относительно изменения решения на любом конечном отрезке) на множестве $\mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{E}}}^3$ (см. [18]), а вопрос об остаточности сильных и слабых показателей колеблемости строгих знаков до сих пор открыт.

§ 3. Вспомогательные результаты

Описанное ниже семейство уравнений, по существу, уже было построено в лемме 15 [1]. Однако отметим, что фигурирующее в этой лемме некоторое значение $T_0 > 0$ может быть заменено конкретным числом $T_0 = 2\pi$ благодаря теореме 3 [19], позволяющей строить уравнение с гладкими коэффициентами, имеющее фундаментальную систему решений, совпадающую слева и справа от заданного участка с произвольными заранее заданными наборами решений (с положительными определителями Вронского) и гладко зависящую от самих этих наборов. Следовательно, заменяя $m \in \mathbb{N}$ на $p \in \mathbb{N}$ при $k_p = p$, будем иметь следующее утверждение.

Лемма 3. Для множества $M \equiv [1/2; 2]$ существует семейство уравнений $a_{\bar{\mu}} \in \mathcal{E}^3$, зависящее от последовательности параметров $\mu_1, \mu_2, \dots \in M$, обозначаемой через $\bar{\mu}$, и обладающее свойствами:

- (1) для каждой последовательности $\bar{\mu} \in M^\infty$ уравнение $a_{\bar{\mu}}$ имеет набор решений y_1, y_2, y_3 , удовлетворяющий при каждом $p \in \mathbb{N}$ требованиям

$$(y_1, y_2, y_3)(t) = \begin{cases} (\sin(t - r_p), & \mu_p, & \cos(t - r_p)), & t_{p-1} + 2\pi \leq t \leq r_p, \\ (\mu_p, & \cos(t - s_p), & \sin(t - s_p)), & r_p + 2\pi \leq t \leq s_p, \\ (\cos(t - t_p), & \sin(t - t_p), & \mu_p), & s_p + 2\pi \leq t \leq t_p, \end{cases}$$

где $t_0 \equiv 0$ и при каждом $p = 1, 2, \dots$ последовательно обозначено

$$r_p \equiv t_{p-1} + 2\pi + 2\pi p, \quad s_p \equiv r_p + 2\pi + 2\pi p, \quad t_p \equiv s_p + 2\pi + 2\pi p;$$

- (2) для некоторой константы d выполнена оценка

$$\|a_{\bar{\mu}}\| \leq d, \quad \bar{\mu} \in M^\infty;$$

- (3) функции $a_{\bar{\mu}}(t)$ бесконечно дифференцируемы по t и непрерывны по каждому из параметров $\mu_p \in M$ равномерно по $(p, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$;

- (4) для каждого $p \in \mathbb{N}$ при всех $t \leq t_{p-1}$ или $t \geq t_p + 2\pi$ строка коэффициентов любого уравнения $a_{\bar{\mu}}$ не зависит значения μ_p .

Пример 3. Найдем спектры показателей колеблемости строгих знаков каждого уравнения семейства $a_{\bar{\mu}}$, существование которого утверждается в лемме 3.

Решение. Построенная в лемме 3 последовательность

$$t_0 = 0, \quad t_p = t_{p-1} + 6\pi(p + 1), \quad p \in \mathbb{N},$$

удовлетворяет условиям

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{t_p}{t_{p-1}} = 1 + \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{12\pi}{t_{p-1}} + 6\pi \cdot \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p-1}{t_{p-1}} = 1, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} (t_p - t_{p-1}) = +\infty.$$

Для любого ненулевого решения y семейства уравнений $a_{\bar{\mu}}$ и вектора $m^0 = (1, 0, 1)$ на каждом из отрезков $[t_{p-1} + 2\pi, r_p]$, $[r_p + 2\pi, s_p]$, $[s_p + 2\pi, t_p]$, $p \in \mathbb{N}$, скалярное произведение $\langle \psi^3 y, m^0 \rangle$ постоянно, а значит, выполняются равенства

$$\nu^-(y, m^0, t_{p-1} + 2\pi, r_p) = \nu^-(y, m^0, r_p + 2\pi, s_p) = \nu^-(y, m^0, s_p + 2\pi, t_p) = 0, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Из процедуры построения семейства $a_{\bar{\mu}}$ (см. [1]) следует существование такого числа T , что выполнены оценки

$$\nu^-(y, m^0, r_p, r_p + 2\pi) + \nu^-(y, m^0, s_p, s_p + 2\pi) + \nu^-(y, m^0, t_p, t_p + 2\pi) \leq T, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Поэтому при вычислении показателей колеблемости строгих знаков решения y любого из уравнений $a_{\bar{\mu}}$, согласно лемме 2, можно не брать в расчет полуинтервалы

$$(0; 2\pi], \quad (r_p; r_p + 2\pi], \quad (s_p; s_p + 2\pi], \quad (t_p; t_p + 2\pi], \quad p \in \mathbb{N},$$

то есть не учитывать их вклад ни в длину промежутка, на котором подсчитывается число точек строгих смен знака решения, ни в само это число. Следовательно, имеем

$$\hat{\nu}_{\bullet}^-(y) = \inf_{m \in \mathbb{R}_*^3} \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t_p} \nu^-(y, m, t_p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t_p} \nu^-(y, m^0, t_p) = 0,$$

а с учетом замечания 1 окончательно получим $\nu^-(\mathcal{S}_*(a_{\bar{\mu}})) = \{0\}$.

Сделав в семействе уравнений a_{μ} замену $y(t) = e^{-t^2} z(t)$, получим однородное уравнение третьего порядка

$$\ddot{z} + b_1(t)\dot{z} + b_2(t)z + b_3(t)z = 0 \quad (3.1)$$

с неограниченными при $t \rightarrow +\infty$ коэффициентами

$$b_1(t) = -e^{-3t^2} \cdot \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \dot{z}_1 & \dot{z}_2 & \dot{z}_3 \\ \ddot{z}_1 & \ddot{z}_2 & \ddot{z}_3 \end{vmatrix} = o(t^5), \quad b_2(t) = e^{-3t^2} \cdot \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \ddot{z}_1 & \ddot{z}_2 & \ddot{z}_3 \\ \ddot{z}_1 & \ddot{z}_2 & \ddot{z}_3 \end{vmatrix} = o(t^6),$$

$$b_3(t) = -e^{-3t^2} \cdot \begin{vmatrix} \dot{z}_1 & \dot{z}_2 & \dot{z}_3 \\ \ddot{z}_1 & \ddot{z}_2 & \ddot{z}_3 \\ \ddot{z}_1 & \ddot{z}_2 & \ddot{z}_3 \end{vmatrix} = o(t^7),$$

где определители Вронского фундаментальных систем решений

$$z_1(t) = e^{t^2} y_1(t), \quad z_2(t) = e^{t^2} y_2(t), \quad z_3(t) = e^{t^2} y_3(t)$$

семейств уравнений $b_{\mu}(t)$ (3.1) и $a_{\mu}(t)$ в силу задачи 57 [20, с. 126] связаны равенством

$$W_{z_1, z_2, z_3}(t) = e^{3t^2} W_{y_1, y_2, y_3}(t), \quad t \geq 0.$$

Каждая строгая смена знака любой функции $y \in S_{\varepsilon}^n$ является нестрогой, а значит, с учетом замечания 1 получим справедливость следующей

Лемма 4. Если для некоторой функции $y \in S_{\varepsilon}^n$ выполнено условие $\check{\omega}^-(y) = 0$, то справедливы равенства

$$\check{\nu}_{\circ}^{\alpha}(e^{t^2} y) = \check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(e^{t^2} y) = 0, \quad \alpha \in \{-, \sim\},$$

а если же условие $\hat{\omega}^-(y) = 0$, то справедливы равенства

$$\hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}(e^{t^2} y) = \hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(e^{t^2} y) = 0, \quad \alpha \in \{-, \sim\}.$$

Лемма 5. Пусть функция $y \in S_{\varepsilon}^3$ имеет строгие смены знака и удовлетворяет условиям:

(1) для некоторого L выполнена оценка

$$|y(t)| + |\dot{y}(t)| + |\ddot{y}(t)| < L < +\infty;$$

(2) существует такое $\delta > 0$, что для любых соседних точек t_1 и t_2 строгих смен знаков выполнено неравенство

$$\max_{t \in [t_1, t_2]} |y(t)| > \delta.$$

Тогда имеют место следующие цепочки равенств

$$\check{\nu}_{\circ}^{\alpha}(e^{t^2} y) = \check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(e^{t^2} y) = \check{\omega}^-(y), \quad \hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}(e^{t^2} y) = \hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(e^{t^2} y) = \hat{\omega}^-(y), \quad \alpha \in \{-, \sim\}.$$

Доказательство. Сначала выбираем функцию $y \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^3$, удовлетворяющую условиям (1) и (2). Тогда из определений характеристик колеблемости (учитывая, что каждая нестрогая смена знака функции y является строгой) при любом $\alpha \in \{-, \sim\}$ следуют очевидные соотношения

$$\check{\nu}_{\circ}^{\alpha}(e^{t^2}y) \leq \check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(e^{t^2}y) \leq \check{\omega}^{-}(e^{t^2}y) = \check{\omega}^{-}(y), \quad \hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}(e^{t^2}y) \leq \hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(e^{t^2}y) \leq \hat{\omega}^{-}(e^{t^2}y) = \hat{\omega}^{-}(y).$$

Для завершения доказательства установим противоположные неравенства. Для любого ненулевого вектора $m = (m_1, m_2, m_3)$ рассмотрим скалярное произведение

$$\langle \psi^3(e^{t^2}y), m \rangle = e^{t^2} (m_1y + m_2(2ty + \dot{y}) + m_3(2y + 4t^2y + 2t\dot{y} + \ddot{y})).$$

Если $m_3 \neq 0$, то при любом $t > 0$ справедливы соотношения

$$\nu^{\sim}(e^{t^2}y, m, t) \geq \nu^{-}(e^{t^2}y, m, t) \geq \nu^{-}(y, t)$$

в силу представления

$$\frac{\langle \psi^3(e^{t^2}y), m \rangle}{4m_3t^2e^{t^2}} = y + \frac{m_1y + m_2(2ty + \dot{y}) + m_3(2y + 2t\dot{y} + \ddot{y})}{4m_3t^2}.$$

Если $m_2 \neq 0$, $m_3 = 0$, то при любом $t > 0$ неравенство $\nu^{-}(e^{t^2}y, m, t) \geq \nu^{-}(y, t)$ также выполняется, так как

$$\frac{\langle \psi^3(e^{t^2}y), m \rangle}{2m_2te^{t^2}} = y + \frac{m_1y + m_2\dot{y}}{2m_2t}.$$

Если $m_1 \neq 0$, $m_2 = m_3 = 0$, то выполнены равенства

$$\nu^{\sim}(e^{t^2}y, m, t) = \nu^{-}(e^{t^2}y, m, t) = \nu^{-}(y, t), \quad t > 0.$$

Следовательно, установили неравенства

$$\inf_{m \in \mathbb{R}_+^3} \nu^{\alpha}(e^{t^2}y, m, t) \geq \nu^{-}(y, t), \quad \alpha \in \{-, \sim\},$$

из которых вытекают

$$\check{\nu}_{\circ}^{\alpha}(e^{t^2}y) \geq \check{\omega}^{-}(y), \quad \hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}(e^{t^2}y) \geq \hat{\omega}^{-}(y), \quad \alpha \in \{-, \sim\}.$$

Лемма 5 полностью доказана. □

§ 4. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1.

1. Фиксируем произвольную последовательность параметров $\bar{\mu} \in M^{\infty}$. Положим $c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$. Каждому решению

$$y_c(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + c_3y_3(t)$$

уравнения $a_{\bar{\mu}} \in \mathcal{E}^3$, существование которого утверждается в лемме 3, поставим в соответствие решение $z_c(t) = e^{t^2}y_c(t)$ уравнения $b_{\bar{\mu}} \in \tilde{\mathcal{E}}^3$. Тогда в силу леммы 5 будем иметь цепочку равенств

$$\nu^{-}(z_c) = \nu^{\sim}(z_c) = \omega^{-}(z_c) = \omega^{-}(y_c), \quad z_c \in \mathcal{S}_{*}(b_{\bar{\mu}}), \quad y_c \in \mathcal{S}_{*}(a_{\bar{\mu}}),$$

из которой вытекают равенства для главных значений характеристик колеблемости

$$\begin{aligned} \nu_1^{-}(b_{\bar{\mu}}) &= \nu_1^{\sim}(b_{\bar{\mu}}) = \omega_1^{-}(a_{\bar{\mu}}), & \nu_3^{-}(b_{\bar{\mu}}) &= \nu_3^{\sim}(b_{\bar{\mu}}) = \omega_3^{-}(a_{\bar{\mu}}), \\ \nu_2^{-}(b_{\bar{\mu}}) &= \nu_2^{\sim}(b_{\bar{\mu}}) = \omega_2^{-}(a_{\bar{\mu}}), & \nu_2^{-}(b_{\bar{\mu}}) &= \nu_2^{\sim}(b_{\bar{\mu}}) = \omega_2^{-}(a_{\bar{\mu}}). \end{aligned}$$

2. Для рассматриваемого семейства уравнений в лемме 18 [1] доказано:

- (1) если $\sqrt{2}/2 < \mu_p < 1$, то $\frac{2}{3} = \omega_1^-(a_{\mu}) = \omega_2^-(a_{\mu}) < \omega_2^-(a_{\mu}) = \omega_3^-(a_{\mu}) = 1$;
- (2) если $\mu_p = 1$, то $\frac{1}{3} = \omega_1^-(a_{\mu}) < \omega_2^-(a_{\mu}) = \omega_2^-(a_{\mu}) = \frac{2}{3} < \omega_3^-(a_{\mu}) = 1$;
- (3) если $1 < \mu_p < \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \equiv \mu^*$, то $\frac{1}{3} = \omega_1^-(a_{\mu}) < \omega_2^-(a_{\mu}) = \omega_2^-(a_{\mu}) = \frac{2}{3} < \omega_3^-(a_{\mu}) = 1$;
- (4) если $\mu^* \leq \mu_p < \sqrt{2}$, то $\frac{1}{3} = \omega_1^-(a_{\mu}) = \omega_2^-(a_{\mu}) < \omega_2^-(a_{\mu}) = \frac{2}{3} < \omega_3^-(a_{\mu}) = 1$;
- (5) если $\mu_p = \sqrt{2}$, то $0 = \omega_1^-(a_{\mu}) < \omega_2^-(a_{\mu}) = \frac{1}{3} < \omega_2^-(a_{\mu}) = \omega_3^-(a_{\mu}) = \frac{2}{3}$.

3. Таким образом, доказано существование уравнений

$$a^1(t) \equiv b_{\mu}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}^3, \text{ где } \sqrt{2}/2 < \mu_p < 1 \text{ при } p \in \mathbb{N},$$

$$a^2(t) \equiv b_{\mu}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}^3, \text{ где } \mu_p = 1 \text{ при } p \in \mathbb{N},$$

$$a^3(t) \equiv b_{\mu}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}^3, \text{ где } \mu_p = \mu^* \text{ при } p \in \mathbb{N},$$

$$a^4(t) \equiv b_{\mu}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}^3, \text{ где } \mu_p = \sqrt{2} \text{ при } p \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2.

Фиксируем произвольный показатель $\varkappa$ из списка (1.11) и снова обратимся к семейству уравнений (3.1). Из этого семейства $b_{\mu}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}^3$ выделим уравнение $b_{\mu_-}(t)$ при $\mu_p = 1 - \exp(-t_p)$, $p \in \mathbb{N}$. Примером точки неинвариантности относительно бесконечно малых возмущений для функций $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ служит уравнение b_{μ_-} из построенного в п. 2 доказательства теоремы 1 семейства при постоянной последовательности $\mu_1 = \mu_2 = \dots \equiv 1$, в котором $\varkappa_1(b_{\mu_-}) = 1/3$ и $\varkappa_2(b_{\mu_-}) = 2/3$. Действительно, возмущенное уравнение b_{μ_-} обладает свойствами

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |b_{\mu_-}(t) - b_{\mu_-}(t)| = 0, \quad \varkappa_1(b_{\mu_-}) = 2/3, \quad \varkappa_2(b_{\mu_-}) = 1.$$

Аналогично, примером точки неинвариантности относительно бесконечно малых возмущений для функций $\varkappa_2$ служит уравнение b_{μ^*} (см. п. 2 доказательства теоремы 1), поскольку для него существует такое возмущенное уравнение $b_{\mu^*_-}$ при $\mu_p = \mu^* - \exp(-t_p)$, $p \in \mathbb{N}$, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |b_{\mu^*_-}(t) - b_{\mu^*_-}(t)| = 0, \quad \varkappa_2(b_{\mu^*_-}) \neq \varkappa_2(b_{\mu^*_-}).$$

Существование для $b_{\sqrt{2}}^-$ возмущенного уравнения $b_{\sqrt{2}_-}$ соответствующего последовательности $\mu_p = \sqrt{2} - \exp(-t_p)$, $p \in \mathbb{N}$ гарантирует неинвариантность функций $\varkappa_3$ относительно бесконечно малых возмущений (см. п. 2 доказательства теоремы 1), так как

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |b_{\sqrt{2}_-}(t) - b_{\sqrt{2}_-}(t)| = 0, \quad \varkappa_3(b_{\sqrt{2}_-}) \neq \varkappa_3(b_{\sqrt{2}_-}).$$

Теорема 2 доказана. $\square$

Авторы выражают признательность И. Н. Сергееву за обсуждение результатов настоящей работы, а также А. Н. Ветохину за ценные замечания.

Финансирование. Исследования авторов выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 075-03-2024-074/5 по проекту «Исследование асимптотических характеристик колеблемости дифференциальных уравнений и систем, а также оптимизационных методов».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергеев И. Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды семинара имени И. Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294. <https://www.mathnet.ru/rus/tsp65>
2. Сергеев И. Н. Свойства характеристических частот линейных уравнений произвольного порядка // Труды семинара имени И. Г. Петровского. 2013. Вып. 29. С. 414–442. <https://www.mathnet.ru/rus/tsp13>
3. Сергеев И. Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2012. Т. 76. Вып. 1. С. 149–172. <https://doi.org/10.4213/im5035>
4. Сергеев И. Н. Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2015. Вып. 2 (46). С. 171–183. <https://www.mathnet.ru/rus/iimi318>
5. Барабанов Е. А., Войделевич А. С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 10. С. 1302–1320. <https://doi.org/10.1134/S0374064116100034>
6. Барабанов Е. А., Войделевич А. С. Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2016. Т. 60. № 1. С. 24–31. <https://doklady.belnauka.by/jour/article/view/8>
7. Войделевич А. С. О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2019. № 1. С. 28–32. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-28-32>
8. Бурлаков Д. С., Цой С. В. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Труды семинара имени И. Г. Петровского. 2014. Вып. 30. С. 75–93. <https://www.mathnet.ru/rus/tsp71>
9. Сташ А. Х. Свойства полных и векторных частот знака решений линейных автономных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1418–1422. <https://doi.org/10.1134/S0374064114100203>
10. Сташ А. Х. Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 4. С. 558–568. <https://doi.org/10.20537/vm190407>
11. Сташ А. Х. Показатели ориентированной вращаемости решений автономных дифференциальных систем // Владикавказский математический журнал. 2022. Т. 24. Вып. 3. С. 120–132. <https://doi.org/10.46698/a8125-0078-5238-y>
12. Барабанов Е. А., Войделевич А. С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1595–1609. <https://doi.org/10.1134/S0374064116120013>
13. Быков В. В. О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 4. С. 419–425. <https://doi.org/10.1134/S0374064116040026>
14. Сергеев И. Н. О показателях колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальных систем, задающих повороты плоскости // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2019. № 1. С. 21–26. <https://www.mathnet.ru/rus/vmumm595>
15. Сташ А. Х. О разрывности крайних показателей колеблемости на множестве линейных однородных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2023. № 1. С. 78–109. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu35.2023.106>
16. Сергеев И. Н. Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Математические заметки. 2016. Т. 99. Вып. 5. С. 732–751. <https://doi.org/10.4213/mzm10555>
17. Сташ А. Х. О спектрах полных и векторных частот линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Труды семинара имени И. Г. Петровского. 2014. Вып. 30. С. 252–269. <https://www.mathnet.ru/rus/tsp82>

18. Сташ А. Х., Лобода Н. А. К вопросу об остаточности сильных показателей колеблемости на множестве решений дифференциальных уравнений третьего порядка // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23. Вып. 3. С. 348–356. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-348-356>
19. Сергеев И. Н. Об управлении решениями линейного дифференциального уравнения // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2009. № 3. С. 25–33. <https://www.mathnet.ru/rus/vmumm873>
20. Полия Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 02.09.2024

Принята к публикации 20.04.2025

Сташ Айдамир Хазретович, к. ф.-м. н., доцент, декан факультета математики и компьютерных наук, Кавказский математический центр, Адыгейский государственный университет, 385000, Россия, г. Майкоп, ул. Первомайская, 208.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3008-7859>

E-mail: aidamir.stash@gmail.com

Артисевич Анжела Евгеньевна, старший преподаватель, кафедра математического анализа и методики преподавания математики, Адыгейский государственный университет, 385000, Россия, г. Майкоп, ул. Первомайская, 208.

E-mail: artisevichangela@gmail.com

Цитирование: А. Х. Сташ, А. Е. Артисевич. О некоторых свойствах главных значений показателей колеблемости знаков линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 2. С. 282–296.

A. Kh. Stash, A. E. Artisevich

On some properties of the main values of the oscillation exponents of signs of linear differential equations of the third order

Keywords: differential equation, linear system, oscillation, number of zeros, oscillation exponent, characteristic frequency, Lyapunov exponent.

MSC2020: 34C10

DOI: [10.35634/vm250208](https://doi.org/10.35634/vm250208)

The subject of the research of this work is at the intersection of two directions in the qualitative theory of differential equations — the theory of Lyapunov exponents and the theory of oscillation. In the present work, we investigate various types of oscillation exponents (strict and non-strict) of the signs of solutions of linear homogeneous differential equations of the third order with coefficients continuous on the positive semi-axis. Structurally, a multiparameter family of third-order differential equations is constructed in the work, on which various relationships between the main values of the oscillation exponents are realized. For fixed values of the sequence of parameters, points are obtained from the specified family of equations, in which all the main values of the oscillation exponents are not invariant with respect to infinitesimal perturbations (i. e., vanishing at infinity). In addition, on the set of all non-zero solutions of the specified family of equations, all oscillation exponents coincide with each other. When constructing the specified equation and proving the required results, analytical methods of the qualitative theory of differential equations and methods of perturbation theory of solutions of linear differential equations, in particular, the method of equation variation, were used.

Funding. The authors' research was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of state assignment No. 075-03-2024-074/5 for the project “Study of asymptotic characteristics of oscillation of differential equations and systems, as well as optimization methods”.

REFERENCES

1. Sergeev I. N. Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 135, issue 1, pp. 2764–2793.
<https://doi.org/10.1007/s10958-006-0142-6>
2. Sergeev I. N. Properties of characteristic frequencies of linear equations of arbitrary order, *Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 197, issue 3, pp. 410–426.
<https://doi.org/10.1007/s10958-014-1723-4>
3. Sergeev I. N. Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential systems, *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, issue 1, pp. 139–162.
<https://doi.org/10.1070/IM2012v076n01ABEH002578>
4. Sergeev I. N. The complete set of relations between the oscillation, rotation and wandering indicators of solutions of differential systems, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2015, issue 2 (46), pp. 171–183 (in Russian).
<https://www.mathnet.ru/eng/iimi318>
5. Barabanov E. A., Voidelevich A. S. Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs, and roots for solutions of linear differential equations: I, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 10, pp. 1249–1267. <https://doi.org/10.1134/S0012266116100013>
6. Barabanov E. A., Vaidzelevich A. S. Spectra of the upper Sergeev frequencies of zeros and signs of linear differential equations, *The Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2016, vol. 60, no. 1, pp. 24–31 (in Russian). <https://doklady.belnauka.by/jour/article/view/8>
7. Vaidzelevich A. S. On spectra of upper Sergeev frequencies of linear differential equations, *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2019, no. 1, pp. 28–32 (in Russian).
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-28-32>

8. Burlakov D. S., Tsoii S. V. Coincidence of complete and vector frequencies of solutions of a linear autonomous system, *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 210, issue 2, pp. 155–167. <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2554-7>
9. Stash A. Kh. Properties of complete and vector sign frequencies of solutions of linear autonomous differential equations, *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 10, pp. 1413–1417. <https://doi.org/10.1134/S0012266114100206>
10. Stash A. Kh. Properties of exponents of oscillation of linear autonomous differential system solutions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 4, pp. 558–568 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm190407>
11. Stash A. Kh. Oriented rotatability exponents of solution of autonomous differential systems, *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal*, 2022, vol. 24, issue 3, pp. 120–132. <https://doi.org/10.46698/a8125-0078-5238-y>
12. Barabanov E. A., Voidelevich A. S. Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs, and roots for solutions of linear differential equations: II, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 12, pp. 1523–1538. <https://doi.org/10.1134/S0012266116120016>
13. Bykov V. V. On the Baire classification of Sergeev frequencies of zeros and roots of solutions of linear differential equations, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 4, pp. 413–420. <https://doi.org/10.1134/S0012266116040029>
14. Sergeev I. N. Oscillation, rotatability, and wandering characteristic indicators for differential systems determining rotations of plane, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2019, vol. 74, issue 1, pp. 20–24. <https://doi.org/10.3103/s0027132219010042>
15. Stash A. Kh. On the discontinuity of extreme exponents of oscillation on a set of linear homogeneous differential systems, *Differential Equations and Control Processes*, 2023, no. 1, pp. 78–109 (in Russian). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu35.2023.106>
16. Sergeev I. N. Oscillation, rotation, and wandering exponents of solutions of differential systems, *Mathematical Notes*, 2016, vol. 99, issue 5, pp. 729–746. <https://doi.org/10.1134/S0001434616050114>
17. Stash A. Kh. Spectra of total and vector frequencies of third-order linear differential equations, *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 210, issue 3, pp. 270–280. <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2565-4>
18. Stash A. Kh., Loboda N. A. On the question of residual of strong exponents of oscillation on the set of solutions of third-order differential equations, *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, issue 3, pp. 348–356 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-348-356>
19. Sergeev I. N. Controlling solutions to a linear differential equation, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2009, vol. 64, no. 3, pp. 113–120. <https://doi.org/10.3103/S0027132209030048>
20. Pólya G., Szegő G. *Problems and theorems in analysis. II*, New York: Springer, 1972.

Received 02.09.2024

Accepted 20.04.2025

Aidamir Khazretovich Stash, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Dean of the Faculty of Mathematics and Computer Science, Caucasus Mathematical Center, Adyghe State University, ul. Pervomaiskaya, 208, Maikop, 385000, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3008-7859>

E-mail: aidamir.stash@gmail.com

Angela Evgen'evna Artisevich, Senior Lecturer, Department of Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics, Adyghe State University, ul. Pervomaiskaya, 208, Maikop, 385000, Russia.

E-mail: artisevichangela@gmail.com

Citation: A. Kh. Stash, A. E. Artisevich. On some properties of the main values of the oscillation exponents of signs of linear differential equations of the third order, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 2, pp. 282–296.