ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2023. Т. 33. Вып. 3. С. 434–451.

УДК 519.644.5

© *Д. Ю. Иванов*

ОБ ОДНОЙ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

На основе кусочно-квадратичной интерполяции получены полуаналитические аппроксимации нормальной производной потенциала простого слоя вблизи и на границе двумерной области. Для вычисления интегралов, образующихся после интерполяции функции плотности, используется точное интегрирование по переменной $\rho = (r^2 - d^2)^{1/2}$, где d и r — расстояния от наблюдаемой точки до границы области и до граничной точки интегрирования соответственно. Доказана устойчивая сходимость таких аппроксимаций с кубической скоростью равномерно вблизи границы класса C^5, а также на самой границе. Также доказано, что на границе аппроксимации по аналогии с точной функцией терпят разрыв, величина которого пропорциональна значениям интерполированной функции плотности, но могут быть доопределены на границе до функций, непрерывных или на замкнутой внутренней, или на замкнутой внешней приграничной области. Теоретические выводы о равномерной сходимости подтверждены результатами вычисления нормальной производной вблизи границы единичного круга.

Ключевые слова: квадратурная формула, нормальная производная потенциала простого слоя, граничный элемент, почти сингулярный интеграл, эффект пограничного слоя, равномерная сходимость.

DOI: 10.35634/vm230304

Введение

В рамках метода граничных элементов (МГЭ) [1, п. 2.5] для вычисления потенциалов простого и двойного слоев и их производных в точках x двумерной открытой области Ω граница $\partial\Omega$ разбивается на дуги Γ_i, называемые граничными элементами (ГЭ), на каждой из которых осуществляется полиномиальная интерполяция функции плотности $v(x')$ ($x' \in \partial\Omega$). Возникающие после этого интегралы на ГЭ в общем случае не могут быть вычислены аналитически. Традиционно для вычисления таких интегралов используются простые квадратурные формулы Гаусса (ПКФГ) [1, п. 2.6], демонстрирущие высокую точность, если точка наблюдения x расположена достаточно далеко от границы $\partial\Omega$. По мере приближения x к $\partial\Omega$ возникает известный эффект пограничного слоя [2], проявляющийся в падении точности вычисления потенциалов и их производных при таком использовании ПКФГ. Этот эффект принято объяснять наличием у интегральных операторов сингулярностей при $x = x'$, благодаря которым при приближении точки x к узлам ПКФГ x_γ аппроксимации неограниченно возрастают и точность катастрофически падает (см., например, [3, 4]). Но точность падает и в тех случаях, когда точка x при пересечении границы проходит мимо узлов x_γ, и аппроксимации остаются конечными. В случае потенциала двойного слоя (ПДС) и нормальной производной (НП) потенциала простого слоя (ППС) это можно объяснить тем, что ПДС и НП ППС при переходе через границу $\partial\Omega$ терпят конечный разрыв, а их аппроксимации на основе ПКФГ непрерывны во всех точках $x \neq x_\gamma$, и если аппроксимации сходятся к точным значениям во всех точках $x \in \overline{\Omega}$, то эта сходимость не может быть равномерной, так как в достаточной близости от $\partial\Omega$ сохраняется абсолютная погрешность, близкая к величине разрыва.

Интегралы на ГЭ, содержащих точку наблюдения $x \in \partial\Omega$, называются сингулярными интегралами (СИ), а интегралы на ГЭ, близких к точке наблюдения $x \in \Omega$, называются почти сингулярными интегралами (ПСИ) [5]. Одним из подходов, используемых для повышения точности вычисления СИ и ПСИ, являются полуаналитические методы [3, 4, 6–14]. Также используются метод адаптивного деления ГЭ [12, 15] и методы нелинейного преобразования переменной интегрирования: sinh-преобразование [5, 16, 17] и экспоненциальное преобразование [2, 18]. Необходимость вычислений вблизи границы области возникает при решении задач в тонкостенных и многослойных конструкциях, тонких покрытиях, пленках, на концах трещин [8, 11, 15, 17, 18]. В таких задачах большое значение имеет высокоточная аппроксимация границы $\partial\Omega$. Поэтому линейная аппроксимация ГЭ, применяемая в рамках полуаналитических методов [3, 4, 6, 7, 12–14], считается неудовлетворительной [9, 18], и полуаналитические методы были реализованы также в случае квадратичной аппроксимации ГЭ [7–10].

Граница аппроксимируется по двум причинам. Первая, неустранимая, заключается в том, что на практике известны координаты лишь конечного числа граничных точек, с помощью которых осуществляется интерполяция границы $\partial\Omega$. Вторая причина заключается в необходимости задания границы более простыми функциями для возможности реализации вычислительного алгоритма. Полуаналитические методы основаны на точном интегрировании, которое становится возможным, в частности, благодаря аппроксимации границы, причем уточнение аппроксимации сопряжено с существенным усложнением алгоритма. Заметим, что аппроксимацией границы можно также считать замену координатных функций и функции расстояния первыми членами разложения их в ряды Тейлора, образованные степенями шагов дискретизации криволинейных координат границы.

В связи с этим представляет интерес полуаналитический метод, предложенный в работах [7–9]. Для аппроксимации ПСИ в работах [8, 9] применяется точное интегрирование по переменной $\rho \equiv (r^2 - d^2)^{1/2}$, где d и r — расстояния от наблюдаемой точки x до границы $\partial\Omega$ и до граничной точки интегрирования x' соответственно. Для того чтобы точное интегрирование по ρ стало возможным, подынтегральная функция представляется в виде произведения двух функций, одна из которых при малых значениях d является быстро изменяющейся вблизи $\rho = 0$ и берется в качестве весовой, а другая является медленно изменяющейся и аппроксимируется с помощью полиномиальной интерполяции по переменной ρ. В более ранней работе [7] таким образом вычисляются СИ (при $d = 0$). Хотя в работах [7–9] этот метод предложен для вычисления СИ и ПСИ на линейных и квадратичных ГЭ, на самом деле он может быть использован для любой достаточно гладкой аналитически заданной кривой $\partial\Omega$, так как интегралы по переменной ρ зависят от кривой $\partial\Omega$ только параметрически. Поскольку медленно изменяющаяся функция входит в виде множителя в числитель подынтегрального выражения, сложность интегралов при увеличении степени интерполянтов существенно не возрастает, и достаточно легко может быть повышен порядок аппроксимации. Недостатком данного метода является его реализация в настоящее время только для двумерной области Ω.

Точное интегрирование по переменной ρ использовано автором для получения равномерно сходящихся вблизи границы $\partial\Omega$ аппроксимаций теплового ППС [19], теплового ПДС [20], ППС для уравнения Лапласа [21]. В настоящей работе точное интегрирование по ρ используется для построения аппроксимаций НП ППС для уравнения Лапласа. Равномерная сходимость аппроксимаций основана на представлении подынтегральной функции НП ППС в виде суммы (1.2), в каждом слагаемом которой извлекаются весовые функции с более слабыми особенностями, чем у весовой функции, которая может быть получена без такого представления и которая использовалась в работах [7, 8]. На основе аналогичных представлений были построены аппроксимации ПДС в работах автора [20, 21].

Доказано (см. следствие 2), что реализованные с помощью кусочно-квадратичной интерполяции (ККИ) аппроксимации НП ППС равномерно сходятся с кубической скоростью в приграничной области, включающей границу $\partial\Omega \in C^5$. Доказано (см. теорему 4), что такие полуаналитические аппроксимации НП ППС обладают свойством, которое аналогично свойству точной НП ППС: при переходе границы $\partial\Omega$ они терпят разрыв первого рода, величина которого пропорциональна значениям ККИ функции плотности $v(x')$, но могут быть доопределены на границе до функций, непрерывных или на замкнутой внутренней, или на замкнутой внешней приграничной области. Отметим, что в работе [21] не затрагивались вопросы, связанные с непрерывностью аппроксимаций ПДС для уравнения Лапласа, но для них сходным образом могут быть доказаны аналогичные утверждения. В заключение настоящей работы приведены результаты вычисления НП ППС вблизи границы единичного круга, которые подтверждают, что применение точного интегрирования по ρ обеспечивает равномерную сходимость аппроксимаций в приграничной области, близкую к кубической, в то время как использование вместо этого ПКФГ влечет серьезное нарушение точности вблизи границы $\partial\Omega$.

§ 1. Предварительные определения и замечания

Пусть Ω_+ — двумерная открытая ограниченная односвязная область с границей $\partial\Omega$, $\Omega_- \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_+}$ — ее открытая внешность. В декартовых координатах (x_1, x_2) зададим параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$: $x_1 = \widetilde{x}_1(s)$, $x_2 = \widetilde{x}_2(s)$. Параметр s по модулю равен длине дуги, откладываемой от некоторой фиксированной точки и заканчивающейся в точке $\widetilde{x}(s) \equiv (\widetilde{x}_1(s), \widetilde{x}_2(s))$, и увеличивается, когда область Ω_+ при обходе границы $\partial\Omega$ остается слева. Функции $\widetilde{x}_1(s)$, $\widetilde{x}_2(s)$ ($s \in \mathbb{R}$), периодические с периодом $2S$ (S — половина длины $\partial\Omega$), осуществляют взаимнооднозначное отображение множества $I_S \equiv [-S, S)$ на множество $\partial\Omega$. Условимся далее писать $\partial\Omega \in C^n$, если существуют непрерывные на замкнутом множестве $\overline{I_S}$ производные $\widetilde{x}_i^{(l)}(s)$ ($l = \overline{0, n}$, $i = 1, 2$), причем $\widetilde{x}_i^{(l)}(-S+0) = \widetilde{x}_i^{(l)}(S-0)$. Будем считать, что $\partial\Omega \in C^2$, если иное не оговорено особо.

Обозначим через $\vec{e}(s)$ единичный вектор, направленный по касательной к кривой $\partial\Omega$ в точке $\widetilde{x}(s)$ в сторону увеличения параметра s, а через $\vec{n}(s)$ — единичную нормаль к кривой $\partial\Omega$, проходящую через точку $\widetilde{x}(s)$ и направленную внутрь области Ω_+. Векторы $\vec{e}(s)$, $\vec{n}(s)$ образуют правую систему, и их координаты (x_1, x_2) вычисляются с помощью формул: $\vec{e}(s) \equiv (\widetilde{x}_1'(s), \widetilde{x}_2'(s))$, $\vec{n}(s) = (-\widetilde{x}_2'(s), \widetilde{x}_1'(s))$.

Через $C(\partial\Omega)$ обозначим банахово пространство периодических с периодом $2S$ и непрерывных на всей числовой оси $\mathbb{R}$ вещественных функций $f(s)$, с нормой $\|f\|_{C(\partial\Omega)} = \sup\limits_{s\in I_S} |f(s)|$. Через $C^n(\partial\Omega)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) обозначим банаховы пространства функций $f \in C(\partial\Omega)$, имеющих непрерывные производные $f^{(l)}(s)$ ($s \in \mathbb{R}$, $l = \overline{1, n}$), с нормой $\|f\|_{C^n(\partial\Omega)} = \sum\limits_{l=0}^{n} \sup\limits_{s\in I_S} \left|f^{(l)}(s)\right|$ ($C^0(\partial\Omega) = C(\partial\Omega)$) [22, гл. IV, п. 2, подп. 23].

Обозначим через D треть радиуса круга Ляпунова [23, п. 94]. Введем в рассмотрение местные системы декартовых координат (ξ_s, η_s) с началами в точках $\widetilde{x}(s)$ и осями ординат, сонаправленными с соответствующими векторами $\vec{n}(s)$. Точки $\widetilde{x}_d(s)$ ($s \in I_S$) с местными координатами $(\xi_s, \eta_s) = (0, d)$ при фиксированном $d \in I_D \equiv [-D, 0) \cup (0, D]$ образуют замкнутую линию $\partial\Omega_d \in C^1$, при этом соответствие между точками $\widetilde{x}_d(s)$ и $\widetilde{x}(s)$ взаимно однозначное ($\widetilde{x}_0(s) \equiv \widetilde{x}(s)$), а нормали $\widetilde{x}(s)\widetilde{x}_d(s)$ к кривой $\partial\Omega$ являются и нормалями к кривой $\partial\Omega_d$ (см. [23, п. 102]). Кривые $\partial\Omega_d$ ($d \in I_D$) согласно [23, п. 102] называются кривыми, параллельными кривой $\partial\Omega$.

Обозначим через Ω_D множество, образованное точками $\widetilde{x}_d(s)$ ($d \in I_D$, $s \in I_S$). На множестве $\overline{\Omega_D}$ зададим функцию $u(x) \equiv (2\pi)^{-1} G(x)\, v$ ($v \in C(\partial\Omega)$), где $G(x)$ при каждом фиксированном $x \equiv (x_1, x_2) \in \overline{\Omega_D}$ — линейный функционал, отображающий пространство $C(\partial\Omega)$ в банахово пространство вещественных чисел $\mathbb{R}$:

$$G(x)\,v \equiv \int_{I_S} g(x,s')v(s')\,ds', \quad g(x,s') \equiv \partial_{\vec{n}(s)} \ln r^{-1} = -2^{-1}\left(\partial_{\vec{n}(s)} r^2\right)/r^2. \tag{1.1}$$

Здесь $r(x,s') = |\vec{r}|$, $\vec{r}(x,s') \equiv \overrightarrow{x\widetilde{x}(s')}$; дифференцирование $\partial_{\vec{n}(s)}$ осуществляется по переменной $x = \widetilde{x}_d(s)$ в направлении $\vec{n}(s)$ (условимся, что мы можем иногда для краткости не писать аргументы функции, если они такие же, какие используются при определении функции). Функция $u(x)$ при $x \in \Omega_D$ — НП двумерного ППС с плотностью v, при $x \in \partial\Omega$ — прямое значение НП ППС [23, п. 97].

Получим представление функции $g(x,s')$, которое будет использовано для полуаналитической аппроксимации функции $u(x)$ в замкнутой области $\overline{\Omega_D} = \Omega_D \cup \partial\Omega$. Пусть $\vec{r}_0(s,s') \equiv \overrightarrow{\widetilde{x}(s)\widetilde{x}(s')}$, $r_0(s,s') \equiv |\vec{r}_0|$. Зададим на замкнутом множестве $\Theta \equiv \left\{(s,s')\colon s \in \overline{I_S}, s'-s \in \overline{I_S}\right\}$ функции $\psi_i(s,s')$ $(i = \overline{0,3})$: при $s' \neq s$ равенствами $\psi_i \equiv \varphi_i/(s'-s)^2$ $(i = 0,2)$, $\psi_i \equiv \varphi_i/(s'-s)$ $(i = 1,3)$, где

$$\varphi_0(s,s') \equiv r_0^2 = \left[\widetilde{x}_1(s') - \widetilde{x}_1(s)\right]^2 + \left[\widetilde{x}_2(s') - \widetilde{x}_2(s)\right]^2,$$
$$\varphi_1(s,s') \equiv 2^{-1}\partial_{s'} r_0^2 = \widetilde{x}_1'(s')\left[\widetilde{x}_1(s') - \widetilde{x}_1(s)\right] + \widetilde{x}_2'(s')\left[\widetilde{x}_2(s') - \widetilde{x}_2(s)\right] = \left(\vec{e}(s'), \vec{r}_0\right)_{\mathbb{R}^2},$$
$$\varphi_2(s,s') \equiv 2^{-1}\partial_{\vec{n}(s)} r_0^2 = -\widetilde{x}_2'(s)\left[\widetilde{x}_1(s) - \widetilde{x}_1(s')\right] + \widetilde{x}_1'(s)\left[\widetilde{x}_2(s) - \widetilde{x}_2(s')\right] = -\left(\vec{n}(s), \vec{r}_0\right)_{\mathbb{R}^2},$$
$$\varphi_3 \equiv \partial_{s'}\varphi_2 = \widetilde{x}_2'(s)\,\widetilde{x}_1'(s') - \widetilde{x}_1'(s)\,\widetilde{x}_2'(s')$$

(здесь $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^2}$ — скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$), а при $s' = s$ равенствами $\psi_0 = \psi_1 \equiv 1$, $\psi_3 = 2\psi_2 \equiv \widetilde{x}_2'(s)\,\widetilde{x}_1''(s) - \widetilde{x}_1'(s)\,\widetilde{x}_2''(s)$. В силу леммы [24] при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ существуют непрерывные на множестве Θ производные $\partial_{s'}^j \psi_i$ $(j = \overline{0,n}$, $i = \overline{0,3})$.

Мы считаем, что значение параметра s соответствует точке наблюдения $x = \widetilde{x}_d(s)$, а значение s' — точке интегрирования $\widetilde{x}(s')$ в выражении (1.1) для НП ППС. Местные координаты (ξ_s, η_s) точек $\widetilde{x}_d(s)$ и $\widetilde{x}(s')$ равны $(0,d)$ и $((\vec{e}(s),\vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2}, (\vec{n}(s),\vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2})$ соответственно, поэтому $r^2 = \left|\overrightarrow{\widetilde{x}_d(s)\widetilde{x}(s')}\right|^2 = r_0^2 - 2d\,(\vec{n}(s),\vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2} + d^2$. На множестве $\Upsilon \equiv \overline{I_D} \times \Theta$ зададим функцию $\varphi_0'(d,s,s') \equiv r^2 - d^2 = \varphi_0 + 2d\,\varphi_2$. Так как кривая $\partial\Omega$ и окружность радиуса $d \in I_D$ с центром $\widetilde{x}_d(s)$ имеют только одну общую точку $\widetilde{x}(s)$, то $2d\,\cos\alpha < r_0$, где α — угол между лучами $\widetilde{x}(s)\widetilde{x}(s')$ и $\widetilde{x}(s)\widetilde{x}_d(s)$. Следовательно, $\varphi_0' \geqslant 0$ при $(d,s,s') \in \Upsilon$ ($\varphi_0' > 0$ при $s \neq s'$, $\varphi_0' = 0$ при $s = s'$). На множестве Υ зададим непрерывные функции $\rho'(d,s,s')$, $\psi_0'(d,s,s')$, $\psi_1'(d,s,s')$: $\rho' = \sqrt{\varphi_0'}$, если $s' \geqslant s$, и $\rho' = -\sqrt{\varphi_0'}$, если $s' < s$; $\psi_0' \equiv \psi_0 + 2d\,\psi_2$, $\psi_1' \equiv \psi_1 + d\,\psi_3$.

Так как контур $\partial\Omega$ не имеет точек самопересечения, то $c_r \equiv \inf\limits_{(s,s')\in\Theta} \psi_0 > 0$ $(c_r \leqslant 1)$. Справедлива оценка: $\vartheta \leqslant c_K\,|s'-s| \leqslant c_K c_r^{-1/2} r_0$, где ϑ — острый угол между нормалями, проходящими через точки $\widetilde{x}(s)$ и $\widetilde{x}(s')$; $c_K \equiv \sup\limits_{s\in\overline{I_S}} K(s,s)$ ($K(s,s) = |\psi_3(s,s)| = 2\,|\psi_2(s,s)|$ — кривизна кривой $\partial\Omega$ в точке $\widetilde{x}(s)$). Поэтому величина $3D$, где $D \equiv c_r^{1/2}\big/(3c_K)$, может быть взята в качестве радиуса круга Ляпунова. Так как $\psi_0(s,s) = \psi_1(s,s) = 1$, $|\psi_3(s,s)| = 2\,|\psi_2(s,s)| = K(s,s)$ и $D \leqslant 1/(3c_K)$, то при $(d,s) \in \overline{I_D} \times \overline{I_S}$ имеем оценки: $\psi_i'(d,s,s) \geqslant 2/3$ $(i = 0,1)$. Кроме того, $\psi_0' = \varphi_0'/(s'-s)^2 > 0$ при $(d,s,s') \in \Upsilon$, $s' \neq s$. Поэтому $\psi_0' > 0$ на множестве Υ.

Так как $r^2 = \varphi_0 + 2d\,\varphi_2 + d^2$, то $2^{-1}\partial_{\vec{n}(s)} r^2 = 2^{-1}\partial_d r^2 = \varphi_2 + d$ и $g(\widetilde{x}_d(s),s') = -(\varphi_2 + d)\,/\,(\varphi_0' + d^2)$. Поэтому функция g при $x = \widetilde{x}_d(s)$, $(d,s,s') \in \Upsilon$ (кроме $d = s'-s =$

$= 0$) может быть записана в следующем виде:

$$\begin{gathered} g(\widetilde{x}_d(s), s') = a_1(d,\rho')\ \delta_1(d,s,s') + a_2(d,\rho')\,\delta_2(d,s,s'), \\ a_1(d,\rho) \equiv \rho^2 \big/ \left(\rho^2 + d^2\right), \quad a_2(d,\rho) \equiv d \big/ \left(\rho^2 + d^2\right), \quad \delta_1 \equiv -\psi_2/\psi_0', \quad \delta_2 \equiv -1. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Так как $\psi_0' > 0$ на множестве Υ, то при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) существуют непрерывные на множестве Υ производные $\partial_{s'}^j \delta_1$ ($j = \overline{0,n}$).

При фиксированном $s \in I_S$ обозначим через E_s замкнутую дугу кривой $\partial\Omega$, ограниченную двумя параллельными прямыми, находящимися на расстоянии D от прямой $\widetilde{x}(s)\widetilde{x}_D(s)$, причем $\widetilde{x}(s) \in \mathrm{E}_s$. Введем в рассмотрение местную криволинейную координату σ_s точки $\widetilde{x}(s')$: $\sigma_s \equiv s' - s$. Значения σ_s, соответствующие границам дуги E_s, обозначим через Σ_s', Σ_s'' ($\Sigma_s' < 0 < \Sigma_s''$), и тогда $\sigma_s \in \Xi_s \equiv [\Sigma_s', \Sigma_s'']$, $\xi_s \in \overline{I_D}$, если $\widetilde{x}(s') \in \mathrm{E}_s$. Введем также в рассмотрение функцию $\widetilde{\xi}_s(\sigma_s)$, определяющую зависимость местной декартовой координаты ξ_s точки $\widetilde{x}(s')$ от ее местной криволинейной координаты σ_s.

Лемма 1. *При условии $\partial\Omega \in C^2$значения Σ_s', Σ_s'' непрерывно зависят от $s \in \overline{I_S}$.*

Доказательство. В условиях теоремы производная $\partial_{\sigma_s}\widehat{\xi}$ функции $\widehat{\xi}(s,\sigma_s) \equiv \widetilde{\xi}_s(\sigma_s)$ непрерывна на множестве $\Theta_D \equiv \left\{(s,\sigma_s) : s \in \overline{I_S}, \sigma_s \in \Xi_s\right\}$. Так как дуга E_s находится внутри круга Ляпунова с центром в точке $\widetilde{x}(s)$ [23, п. 94], угол между нормалями $\vec{n}(s)$ и $\vec{n}(s')$ не превосходит $\pi/3$, если $\widetilde{x}(s') \in \mathrm{E}_s$ (см. оценку (7) [23, п. 94]). Поэтому производная $d\widetilde{\xi}_s(\sigma_s) \big/ d\sigma_s$ положительна и непрерывна на множестве Ξ_s при любом $s \in I_S$, и функция $\widetilde{\xi}_s(\sigma_s)$ диффеоморфно с гладкостью C^1 отображает множество Ξ_s на множество $\overline{I_D}$. В результате производная $\partial_{\sigma_s}\widehat{\xi}$ положительна и непрерывна на множестве Θ_D, следовательно, производная $\partial_{\xi_s}\widehat{\sigma} = \left(\partial_{\sigma_s}\widehat{\xi}\right)^{-1}$ функции $\widehat{\sigma}(s,\xi_s) \equiv \widetilde{\sigma}_s(\xi_s)$ ($\widetilde{\sigma}_s(\xi_s)$ — функция, обратная к функции $\widetilde{\xi}_s(\sigma_s)$) непрерывна на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_D}$, и значения $\Sigma_s' = \widehat{\sigma}(s,-D)$, $\Sigma_s'' = \widehat{\sigma}(s,D)$ непрерывно зависят от $s \in \overline{I_S}$. Лемма 1 доказана. □

Теорема 1 (см. теорему 5 [20]). *Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Тогда на множестве $\Upsilon' \equiv \equiv \left\{(d,s,s') \colon d \in \overline{I_D}, s \in \overline{I_S}, s' - s \in \Xi_s\right\}$ существуют положительная, ограниченная сверху функция $\delta_0(d,s,s') \equiv (\partial_{s'}\rho')^{-1} = \sqrt{\psi_0'} \big/ \psi_1'$ и непрерывные производные $\partial_{s'}^j \delta_0$ ($j = \overline{0,n}$).*

Следствие 1. *Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Тогда функции $\rho_{d,s}(\sigma) \equiv \rho'(d,s,s+\sigma)$ при любых фиксированных $s \in I_S$, $d \in \overline{I_D}$ диффеоморфно с гладкостью C^{n+1} отображают множества Ξ_s на соответствующие множества $\rho_{d,s}(\Xi_s)$. Функции $\sigma'(d,s,\rho) \equiv \equiv \sigma_{d,s}(\rho)$ ($\sigma_{d,s}(\rho)$ — функция, обратная к функции $\rho_{d,s}(\sigma)$), $\widetilde{\delta}_0(d,s,\rho) \equiv \delta_0\left(d,s,s+\sigma_{d,s}(\rho)\right)$, $\widetilde{\delta}_i(d,s,\rho) \equiv \delta_i\left(d,s,s+\sigma_{d,s}(\rho)\right)\widetilde{\delta}_0$ ($i = 1,2$)* имеют непрерывные на множестве $\widetilde{\Upsilon}' \equiv \equiv \left\{(d,s,\rho) \colon d \in \overline{I_D}, s \in \overline{I_S}, \rho \in \rho_{d,s}(\Xi_s)\right\}$ производные $\partial_\rho^j \sigma'$, $\partial_\rho^j \widetilde{\delta}_i$ ($j = \overline{0,n}$, $i = \overline{0,2}$).

В заключение параграфа рассмотрим функции, которые будут использованы для интерполяции. Обозначим через $\Lambda_m(z,\varsigma_1,\varsigma_2)$ ($z \in [\varsigma_1,\varsigma_2]$, $m = \overline{0,2}$) интерполяционные многочлены Лагранжа:

$$\Lambda_m(z,\varsigma_1,\varsigma_2) \equiv \prod_{j=0\ (j\neq m)}^{2} \frac{z - z_j}{z_m - z_j}, \quad z_j \equiv \overline{\varsigma} + q_j h_z \quad (j = \overline{0,2}).$$

Здесь $h_z \equiv 2^{-1}(\varsigma_2 - \varsigma_1)$, $\overline{\varsigma} \equiv 2^{-1}(\varsigma_1 + \varsigma_2)$; $q_0 \equiv -1$, $q_1 \equiv 0$, $q_2 \equiv 1$ [25, гл. 2, § 3, п. 2]. Пусть $C^j[\varsigma_1,\varsigma_2]$ ($j \in \mathbb{Z}_+$) — банаховы пространства, образованные j раз непрерывно дифференцируемыми на промежутке $[\varsigma_1,\varsigma_2]$ комплексными функциями $f(z)$. Тогда для функций

$\widetilde{f}(z) \equiv \sum\limits_{m=0}^{2} f(z_m)\Lambda_m(z, \varsigma_1, \varsigma_2)$, а также для их первых и вторых производных при $z \in [\varsigma_1, \varsigma_2]$ имеют место оценки:

$$\left|\widetilde{f}_1(z) - f(z)\right| \leqslant c_\omega \sup_{z\in[\varsigma_1,\varsigma_2]} \left|f^{(3)}(z)\right| h_z^3 \quad (f \in C^3[\varsigma_1, \varsigma_2]), \tag{1.3}$$

$$\left|\widetilde{f}(z)\right| \leqslant c_{\Lambda,0} \max_{m=\overline{0,2}} |f(z_m)| \quad (f \in C^0[\varsigma_1, \varsigma_2]), \tag{1.4}$$

$$\left|\widetilde{f}^{(j)}(z)\right| \leqslant c_{\Lambda,j} \sup_{z\in[\varsigma_1,\varsigma_2]} \left|f^{(j)}(z)\right| \quad (f \in C^j[\varsigma_1, \varsigma_2], \quad j = 1, 2). \tag{1.5}$$

Здесь $c_\omega \equiv 2\sqrt{3}/9$, $c_{\Lambda,0} = c_{\Lambda,1} \equiv 3$, $c_{\Lambda,2} = 2^{-1}$.

Лемма 2. *Пусть функции $\varsigma_1(\alpha)$, $\varsigma_2(\alpha)$ непрерывны и $\varsigma_1(\alpha) \leqslant \varsigma_2(\alpha)$ на n-мерном прямоугольнике* A, *функция $f(z, \alpha)$ определена и непрерывна на множестве*

$$\mathrm{Z} \equiv \{(z, \alpha)\colon z \in [\varsigma_1(\alpha), \varsigma_2(\alpha)], \alpha \in \mathrm{A}\}.$$

Пусть на подмножестве $\Delta\mathrm{Z}$, выделенном из множества Z с помощью условия $\varsigma_1(\alpha) < \varsigma_2(\alpha)$, существуют непрерывные функции $\partial_z^j f$ ($j = 1, 2$), которые могут быть доопределены при $\varsigma_1(\alpha) = \varsigma_2(\alpha)$ до непрерывных на множестве Z. Зададим функции $h_z(\alpha) \equiv 2^{-1}(\varsigma_2(\alpha) - \varsigma_1(\alpha))$, $\overline{\varsigma}(\alpha) \equiv 2^{-1}(\varsigma_1(\alpha) + \varsigma_2(\alpha))$, $z_j(\alpha) \equiv \overline{\varsigma}(\alpha) + q_j h_z(\alpha)$ ($j = \overline{0,2}$). Тогда функция $\widetilde{f}(z, \alpha)$, имеющая вид

$$\widetilde{f} \equiv \sum_{m=0}^{2} f(z_m(\alpha), \alpha)\Lambda_m(z, \varsigma_1(\alpha), \varsigma_2(\alpha)),$$

если $(z, \alpha) \in \Delta\mathrm{Z}$, и $\widetilde{f} \equiv f(\varsigma_1(\alpha), \alpha)$, если $(z, \alpha) \in \mathrm{Z} \setminus \Delta\mathrm{Z}$, непрерывна на множестве Z.

Доказательство. Очевидно, функция $\widetilde{f}(z, \alpha)$ непрерывна на множестве $\Delta\mathrm{Z}$. При условии $\varsigma_1 < \varsigma_2$ функция $\widetilde{f}(z, \alpha)$ ($z \in [\varsigma_1, \varsigma_2]$) может быть представлена в виде:

$$\widetilde{f}(z, \alpha) = f(\overline{\varsigma}, \alpha) + f_1(\varsigma_1, \varsigma_2, \alpha)(z - \overline{\varsigma}) + 2^{-1} f_2(\varsigma_1, \varsigma_2, \alpha)(z - \overline{\varsigma})^2, \tag{1.6}$$
$$f_1 \equiv 2^{-1} h_z^{-1} \left[f(\varsigma_2, \alpha) - f(\varsigma_1, \alpha)\right], \quad f_2 \equiv h_z^{-2} \left[f(\varsigma_1, \alpha) - 2f(\overline{\varsigma}, \alpha) + f(\varsigma_2, \alpha)\right].$$

При условии $f \in C^2[\varsigma_1, \varsigma_2]$ имеем, в силу формулы Тейлора с дополнительным членом в виде определенного интеграла [26, п. 318] и теоремы о среднем, следующие формулы:

$$f_j = 2^{j-2} h_z^{-j} \left[(-1)^j \int_{\overline{\varsigma}}^{\varsigma_1} \partial_z^j f(z, \alpha)(\varsigma_1 - z)^{j-1} dz + \int_{\overline{\varsigma}}^{\varsigma_2} \partial_z^j f(z, \alpha)(\varsigma_2 - z)^{j-1} dz\right] =$$
$$= 2^{-1} \left[\partial_z^j f(z_{1,j}, \alpha) + \partial_z^j f(z_{2,j}, \alpha)\right] \quad (z_{1,j} \in [\varsigma_1, \overline{\varsigma}], \quad z_{2,j} \in [\overline{\varsigma}, \varsigma_2], \quad j = 1, 2). \tag{1.7}$$

Согласно равенствам (1.6) и (1.7) функция $\widetilde{f}(z, \alpha)$ может быть продолжена по непрерывности на множество $\mathrm{Z} \setminus \Delta\mathrm{Z}$ с помощью равенства $\widetilde{f}(z, \alpha) \equiv f(\varsigma_1(\alpha), \alpha)$. Лемма 2 доказана. □

§ 2. Полуаналитические аппроксимации НП ППС и их равномерная сходимость вблизи границы области

Рассмотрим представления НП ППС, которые будут использованы для построения полуаналитических аппроксимаций НП ППС. В силу равенств (1.2) и следствия 1 функционалы $G(x)$ могут быть представлены в виде суммы функционалов $G_i(x)$ ($i = \overline{1,3}$):

$$G(x) = G_1(x) + G_2(x) + G_3(x) \quad (x \in \overline{\Omega_D}); \tag{2.1}$$

$$G_i(x)f \equiv \int_{\rho_{d,s}(\Xi_s)} a_i(d, \rho)B_i(d, s, \rho)f\, d\rho \quad (i = 1, 2), \quad G_3(x)f \equiv \int_{\overline{I_S}\setminus\Xi_s} B_3(d, s, s + \sigma)f\, d\sigma.$$

Здесь $f \in C(\partial\Omega)$, $x = \widetilde{x}_d(s)$, $d \in \overline{I_D}$, $s \in I_S$; $B_i(d,s,\rho)f \equiv \widetilde{\delta}_i f(s+\sigma_{d,s}(\rho))$ $(i=1,2)$, $B_3(d,s,s')f \equiv g\,f(s')$. Заметим, что функционал прямого значения НП ППС на границе $\partial\Omega$ имеет вид: $G(\widetilde{x}(s)) = G_1(\widetilde{x}(s)) + G_3(\widetilde{x}(s))$, так как $G_2(\widetilde{x}(s)) \equiv 0$.

Условимся оператор $\mathbf{A}$, отображающий банахово пространство X в банахово пространство Y, обозначать как $\mathbf{A}$ $[X \to Y]$, а если $X = Y$, то $\mathbf{A}$ $[X]$. Для норм функционалов $G_i(x)$ $[C(\partial\Omega) \to \mathbb{R}]$ $(x \in \overline{\Omega_D}$, $i = \overline{1,3})$ имеют место оценки:

$$\begin{gathered} \|G_i(x)\| \leqslant A_i \widehat{c}_{i,0}, \quad A_i \equiv \sup_{d\in\overline{I_D}} \int_{I_S} a_i(d,\rho)\,d\rho, \quad \widehat{c}_{i,0} \equiv \sup_{(d,s,\rho)\in\widetilde{\Upsilon}'} |\widetilde{\delta}_i| \quad (i=1,2); \\ \|G_3(x)\| \leqslant 2S\widehat{c}_{3,0}, \quad \widehat{c}_{3,0} \equiv \sup_{(d,s,s')\in\overline{\Upsilon\setminus\Upsilon'}} |g(\widetilde{x}_d(s),s')|. \end{gathered} \tag{2.2}$$

В силу равенств (2.1) и оценок (2.2) имеем оценки для норм функционалов $G(x)$ $[C(\partial\Omega) \to \mathbb{R}]$:

$$\|G(x)\| \leqslant c_G \equiv A_1\widehat{c}_{1,0} + A_2\widehat{c}_{2,0} + 2S\widehat{c}_{3,0} \quad (x \in \overline{\Omega_D}). \tag{2.3}$$

В силу оценок (2.3) функционалы $G(x)$ $[C(\partial\Omega) \to \mathbb{R}]$ ограничены равномерно по $x \in \overline{\Omega_D}$.

Для осуществления дискретизации в соответствии с МГЭ разобьем границу $\partial\Omega$ на граничные элементы и осуществим ККИ функции плотности. А именно, пусть $L/2 \in \mathbb{N}$, $h \equiv S/(L+1)$, $s_l \equiv lh$, $l \in \mathbb{Z}$. Тогда $\widetilde{x}(s_{l+2L+2}) = \widetilde{x}(s_l)$. Введем в рассмотрение пространства H_L вещественных сеточных функций f со значениями f_l, заданными в точках коллокации s_l $(f_{l+2L+2} = f_l)$, с нормой: $\|f\|_{H_L} = \max\limits_{-L-1\leqslant l\leqslant L} |f_l|$. Зададим проецирующие операторы $\mathbf{P}_L$ $[C(\partial\Omega) \to H_L]$: $(\mathbf{P}_L f)_l \equiv f(s_l)$ $(\|\mathbf{P}_L\| \leqslant 1)$, и интерполирующие операторы $\ddot{\mathbf{P}}_L$ $[H_L \to C(\partial\Omega)]$:

$$(\ddot{\mathbf{P}}_L f)(s) \equiv \sum_{m=0}^{2} f_{2l-1+m}\Lambda_m(s, s_{2l-1}, s_{2l+1}) \quad (s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}], \quad l = \overline{-L/2, L/2}).$$

В силу оценки (1.4) операторы $\ddot{\mathbf{P}}_L$ $[H_L \to C(\partial\Omega)]$ ограничены в совокупности: $\|\ddot{\mathbf{P}}_L\| \leqslant c_{\Lambda,0}$. На основании неравенства (1.3) имеем оценки:

$$\left\|\ddot{\mathbf{P}}_L\mathbf{P}_L f - f\right\|_{C(\partial\Omega)} \leqslant c_\omega \left\|f^{(3)}\right\|_{C(\partial\Omega)} h^3 \quad (f \in C^3(\partial\Omega)). \tag{2.4}$$

С помощью равенств $\ddot{G}(x)f \equiv G(x)\ddot{\mathbf{P}}_L f$ $(f \in H_L)$ зададим сеточные функционалы $\ddot{G}(x)$ $[H_L \to \mathbb{R}]$ $(x \in \overline{\Omega_D})$. Используя оценки (2.3), (2.4), получаем оценки аппроксимации функционалов $G(x)$ функционалами $\ddot{G}(x)\mathbf{P}_L$:

$$\left|\ddot{G}(x)\mathbf{P}_L f - G(x)f\right| \leqslant c_G c_\omega \left\|f^{(3)}\right\|_{C(\partial\Omega)} h^3 \quad (x \in \overline{\Omega_D}, \quad f \in C^3(\partial\Omega)). \tag{2.5}$$

Функционалы $\ddot{G}(x)$ имеют вид:

$$\ddot{G}(x)f = \sum_{l=-L-1}^{L} \ddot{G}_l(x)f, \quad \ddot{G}_l(x)f \equiv \int_{s_l}^{s_{l+1}} g(x,s')\left(\ddot{\mathbf{P}}_L f\right)(s')\,ds' \quad (f \in H_L).$$

Интегралы $\ddot{G}_l(x)f$ в общем случае не могут быть вычислены точно, поэтому требуется их аппроксимация. В соответствии с равенствами (2.1) функционалы $\ddot{G}(x)$ могут быть представлены в виде сумм $\ddot{G}(x) = \ddot{G}_1(x) + \ddot{G}_2(x) + \ddot{G}_3(x)$ при $x \in \overline{\Omega_D}$, где $\ddot{G}_i(x) \equiv G_i(x)\ddot{\mathbf{P}}_L$

$(i=\overline{1,3})$. Введем в рассмотрение функционалы $\widehat{G}_i(x)$, аппроксимирующие $\ddot{G}_i(x)$ $(i=1,2)$. Для этого заменим функции $B_i(d,s,\rho)\ddot{\mathbf{P}}_L f$ $(f\in H_L,\ (d,s,\rho)\in\widetilde{\Upsilon}')$ их ККИ $\widehat{B}_i(d,s,\rho)f$ по переменной ρ:

$$\widehat{G}_i(\widetilde{x}_d(s))f\equiv\int_{\rho_{d,s}(\Xi_s)} a_i(d,\rho)\,\widehat{B}_i(d,s,\rho)\,f\,d\rho\quad (i=1,2),\tag{2.6}$$
$$\widehat{B}_i(d,s,\rho)f\equiv\widehat{B}_{i,l}(d,s,\rho)f(\rho\in[\rho_{d,s,l},\rho_{d,s,l+1}]\,,l\in\mathbb{Z}),$$
$$\widehat{B}_{i,l}(d,s,\rho)f\equiv\begin{cases}\sum\limits_{m=0}^{2}B_i(d,s,\rho_{d,s,l,m})\ddot{\mathbf{P}}_L f\,\Lambda_m(\rho,\rho_{d,s,l},\rho_{d,s,l+1}) & (\rho_{d,s,l}<\rho_{d,s,l+1}),\\ B_i(d,s,\rho_{d,s,l})\ddot{\mathbf{P}}_L f & (\rho_{d,s,l}=\rho_{d,s,l+1}),\end{cases}$$
$$\rho_{d,s,l,m}\equiv 2^{-1}\left(\rho_{d,s,l}+\rho_{d,s,l+1}\right)+q_m h'_{d,s,l},\quad h'_{d,s,l}\equiv 2^{-1}\left(\rho_{d,s,l+1}-\rho_{d,s,l}\right).$$

Здесь $\rho_{d,s,l}\equiv\rho_{d,s}(\alpha_{s,l})$. Значения $\alpha_{s,l}$ $(s\in\overline{I_S},\ l\in\mathbb{Z})$ определим с таким расчетом, чтобы выполнялись условия: (a) $\bigcup\limits_{l\in\mathbb{Z}}[\alpha_{s,l},\alpha_{s,l+1}]=\Xi_s$; (b) $\left(\{s_k-s\}_{k\in\mathbb{Z}}\cap\Xi_s\right)\subseteq\{\alpha_{s,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}$; (c) $\alpha_{s,l}\leqslant\alpha_{s,l+1}$; (d) $\alpha_{s,l}$ непрерывно зависят от $s\in\overline{I_S}$, если Σ'_s, Σ''_s непрерывно зависят от $s\in\overline{I_S}$ $(l\in\mathbb{Z})$. Для этого при любых $s\in[s_k,s_{k+1})$, $k=\overline{-L-1,L+1}$ положим:

$$\alpha_{s,2l+k}\equiv\min\left\{s_{l+k}-s,\Sigma''_s\right\},\quad \alpha_{s,2l+1+k}\equiv\min\left\{lh,\Sigma''_s\right\}\quad (l\geqslant 0);$$
$$\alpha_{s,2l+k}\equiv\max\left\{s_{l+k}-s,\Sigma'_s\right\},\quad \alpha_{s,2l+1+k}\equiv\max\left\{lh,\Sigma'_s\right\}\quad (l<0).$$

Заметим, что в формуле (2.6) достаточно задать функции $\widehat{B}_i(d,s,\rho)f$ на промежутках $[\rho_{d,s,l},\rho_{d,s,l+1}]$ лишь при $l=\overline{-3L-2,3L+2}$, поскольку при остальных значениях $l\in\mathbb{Z}$ длины этих промежутков равны нулю $(\rho_{d,s,l}=\rho_{d,s,l+1})$ при любых $s\in\overline{I_S}$, даже если $\Sigma'_s=-S$, $\Sigma''_s=S$.

Аппроксимации $\widehat{G}_3\left(\widetilde{x}_d(s)\right)$ функционалов $\ddot{G}_3\left(\widetilde{x}_d(s)\right)$ при $(d,s)\in\overline{I_D}\times\overline{I_S}$ построим с помощью ПКФГ с γ узлами:

$$\widehat{G}_3\left(\widetilde{x}_d(s)\right)f\equiv\sum_{l=-3L-2}^{3L+2}h''_{s,l}\widehat{B}_{3,l}(d,s)f,\quad \widehat{B}_{3,l}(d,s)f\equiv\sum_{j=1}^{\gamma}\omega_j B_3(d,s,s+\beta_{s,l,j})\ddot{\mathbf{P}}_L f,\tag{2.7}$$
$$\beta_{s,l,j}\equiv 2^{-1}(\beta_{s,l}+\beta_{s,l+1})+h''_{s,l}z_j,\quad h''_{s,l}\equiv 2^{-1}(\beta_{s,l+1}-\beta_{s,l}).$$

Здесь $f\in H_L$, z_j — корни многочлена $p_\gamma(z)\equiv\left(d^\gamma/dz^\gamma\right)\left(z^2-1\right)^\gamma$ на интервале $(-1,1)$ [25, гл. 3, § 5, п. 2] $(z_1<z_2<\ldots<z_\gamma)$; для весовых коэффициентов ω_j выполняются условия: $\sum\limits_{j=1}^{\gamma}\omega_j=2$ и $\omega_j>0$ [25, гл. 3, § 5, п. 1]. Значения $\beta_{s,l}$ $(l\in\mathbb{Z},\ s\in\overline{I_S})$ определим так, чтобы выполнялись условия: (a) $\bigcup\limits_{l\in\mathbb{Z}}[\beta_{s,l},\beta_{s,l+1}]=\overline{I_S\setminus\Xi_s}$; (b) $\left(\{s_k-s\}_{k\in\mathbb{Z}}\cap\overline{I_S\setminus\Xi_s}\right)\subseteq\{\beta_{s,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}$; (c) $\beta_{s,l}\leqslant\beta_{s,l+1}$; (d) $\beta_{s,l}$ непрерывно зависят от $s\in\overline{I_S}$, если Σ'_s, Σ''_s непрерывно зависят от $s\in\overline{I_S}$ $(l\in\mathbb{Z})$. Для этого при любых $s\in[s_k,s_{k+1})$, $k=\overline{-L-1,L+1}$ положим:

$$\beta_{s,2l+k}\equiv\min\left\{\max\left\{s_{l+k}-s,\Sigma''_s\right\},S\right\},\quad \beta_{s,2l+1+k}\equiv\min\left\{\max\left\{lh,\Sigma''_s\right\},S\right\}\quad (l\geqslant 0);$$
$$\beta_{s,2l+k}\equiv\max\left\{\min\left\{s_{l+k}-s,\Sigma'_s\right\},-S\right\},\quad \beta_{s,2l+1+k}\equiv\max\left\{\min\left\{lh,\Sigma'_s\right\},-S\right\}\quad (l<0).$$

Заметим, что в формуле (2.7) сумму по $l=\overline{-3L-2,3L+2}$ можно заменить суммой по $l\in\mathbb{Z}$, поскольку все дополнительные слагаемые при любых $s\in\overline{I_S}$ равны нулю $(h''_{s,l}=0)$.

Пусть $\widehat{G}(x)\equiv\sum\limits_{i=1}^{3}\widehat{G}_i(x)$ $(x\in\overline{\Omega_D})$. В силу оценки (1.4) функционалы $\widehat{B}_i(d,s,\rho)$ $[H_L\to\mathbb{R}]$ $(i=1,2)$ равномерно ограничены по $(d,s,\rho)\in\widetilde{\Upsilon}'$: $\left\|\widehat{B}_i(d,s,\rho)\right\|\leqslant c^2_{\Lambda,0}\widehat{c}_{i,0}$, а функционалы

$\widehat{B}_{3,l}(d,s)$ $[H_L \to \mathbb{R}]$ равномерно ограничены по $(d,s) \in \overline{I_D} \times \overline{I_S}$, $l \in \mathbb{Z}$: $\left\|\widetilde{B}_{3,l}(d,s)\right\| \leqslant$ $\leqslant 2c_{\Lambda,0}\widehat{c}_{3,0}$. Поэтому при $x \in \overline{\Omega_D}$ имеем неравенства: $\left\|\widehat{G}_i(x)\right\| \leqslant A_i c_{\Lambda,0}^2 \widehat{c}_{i,0}$ $(i = 1,2)$, $\left\|\widehat{G}_3(x)\right\| \leqslant 2Sc_{\Lambda,0}\widehat{c}_{3,0}$, на основании которых получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\partial\Omega \in C^2$, $\gamma \in \mathbb{N}$. *Тогда функционалы* $\widehat{G}(x)$ $[H_L \to \mathbb{R}]$ $(L/2 \in \mathbb{N})$ *ограничены в совокупности равномерно по* $x \in \overline{\Omega_D}$.

В силу следствия 1 и неравенства $r \geqslant D$, имеющего место, если $(d,s,s') \in \overline{\Upsilon \setminus \Upsilon'}$, при указанных гладкостях кривой $\partial\Omega$ и $j = \overline{0,n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ могут быть определены константы:

$$\widehat{c}_{i,j} \equiv \sup_{(d,s,\rho)\in\widetilde{\Upsilon}'} \left|\partial_\rho^j \widetilde{\delta}_i\right| \quad (i = \overline{0,2}, \quad \partial\Omega \in C^{n+2}),$$

$$\widehat{c}_{3,j} \equiv \sup_{(d,s,s')\in\overline{\Upsilon\setminus\Upsilon'}} \left|\partial_{s'}^j g\left(\widetilde{x}_d(s), s'\right)\right| \quad (\partial\Omega \in C^{n+1}).$$

Используя неравенства (1.3)–(1.5) и $h'_{d,s,l} \leqslant 2^{-1} c_h h$ $(c_h \equiv \sup\limits_{(d,s,s')\in\Upsilon'} \partial_{s'}\rho')$, при $f \in C^2(\partial\Omega)$, $\ddot{f} \equiv \ddot{\mathbf{P}}_L \mathbf{P}_L f$, $x = \widetilde{x}_d(s)$, $(d,s) \in \overline{I_D} \times \overline{I_S}$ и указанных гладкостях кривой $\partial\Omega$ получаем оценки:

$$\begin{aligned}
&\left|\widehat{G}_i(x)\mathbf{P}_L f - \ddot{G}_i(x)\mathbf{P}_L f\right| \leqslant 8^{-1} A_i c_h^3 c_\omega \operatorname*{ess\,sup}_{(d,s,\rho)\in\widetilde{\Upsilon}'} \left|\partial_\rho^3 B_i(d,s,\rho)\ddot{f}\right| h^3 \leqslant \\
&\qquad \leqslant A_i c_h^3 c_\omega \widetilde{c}_i \|f\|_{C^2(\partial\Omega)} h^3 \quad (\partial\Omega \in C^5, \quad i = 1,2),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\widetilde{c}_i \equiv \widehat{c}_{i,3} c_{\Lambda,0} + \left(3\widehat{c}_{i,2}\widehat{c}_{0,0} + 3\widehat{c}_{i,1}\widehat{c}_{0,1} + \widehat{c}_{i,0}\widehat{c}_{0,2}\right) c_{\Lambda,1} + 3\left(\widehat{c}_{i,1}\widehat{c}_{0,0}^2 + \widehat{c}_{i,0}\widehat{c}_{0,1}\widehat{c}_{0,0}\right) c_{\Lambda,2};$$

$$\begin{aligned}
&\left|\widetilde{G}_3(x)\mathbf{P}_L f - \ddot{G}_3(x)\mathbf{P}_L f\right| \leqslant 2S \operatorname*{ess\,sup}_{(d,s,s')\in\overline{\Upsilon\setminus\Upsilon'}} \left|\partial_{s'}^{2\gamma} B(d,s,s')\ddot{f}\right| h^{2\gamma} \leqslant \\
&\qquad \leqslant 2S\widetilde{c}_3 \|f\|_{C^2(\partial\Omega)} h^{2\gamma} \quad (\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}),
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\widetilde{c}_3 \equiv (\gamma!)^4 \left[(2\gamma)!\right]^{-3} (2\gamma+1)^{-1} \left[\widehat{c}_{3,2\gamma} c_{\Lambda,0} + 2\gamma\widehat{c}_{3,2\gamma-1} c_{\Lambda,1} + \gamma(2\gamma-1)\widehat{c}_{3,2\gamma-2} c_{\Lambda,2}\right].$$

Здесь $\operatorname{ess\,sup}$ — существенный супремум [22, гл. III, п. 1, подп. 11]. При получении оценки (2.9) используется оценка остаточного члена ПКФГ [25, гл. 3, § 5, п. 2]. На основании оценок (2.8), (2.9) получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}, \gamma \geqslant 2, \gamma, L/2 \in \mathbb{N}$. *Тогда функционалы* $\widehat{G}(x)\mathbf{P}_L$ $[C^3(\partial\Omega) \to \mathbb{R}]$ *сходятся при* $L \to \infty$ *по операторной норме к соответствующим функционалам* $G(x)$ $[C^3(\partial\Omega) \to \mathbb{R}]$ *равномерно по* $x \in \overline{\Omega_D}$ *с порядком аппроксимации* $O(L^{-3})$.

Определения и основные сведения, касающиеся сходимости последовательностей операторов в различных топологиях, см. [22, гл. VI, п. 1, подп. 1–3]. Заметим, что интегралы по ρ в операторах $\widehat{G}_1(x)$ и $\widehat{G}_2(x)$ вычисляются аналитически.

Теорема 3 позволяет получить аппроксимации НП ППС и прямого значения НП ППС: $\widehat{u}(x) \equiv (2\pi)^{-1}\widehat{G}(x)\mathbf{P}_L v \approx u(x)$ при $x \in \Omega_D$ и $x \in \partial\Omega$ соответственно. В силу теоремы 2 и неравенства $\|\mathbf{P}_L\| \leqslant 1$ функционалы $\widehat{G}(x)\mathbf{P}_L$ $[C(\partial\Omega) \to \mathbb{R}]$ $(L/2 \in \mathbb{N})$ ограничены в совокупности, поэтому функции $\widehat{u}(x)$ устойчивы к возмущениям функции плотности v в норме $C(\partial\Omega)$. Сформулируем основной результат настоящей работы.

Следствие 2. *Пусть* $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}, \gamma \geqslant 2, \gamma, L/2 \in \mathbb{N}, R > 0$. *Тогда функции* $\widehat{u}(x)$ *сходятся при* $L \to \infty$ *с кубической скоростью к функции* $u(x)$ *равномерно относительно* $x \in \overline{\Omega_D}$ *и функций* $v \in C^3(\partial\Omega)$, *удовлетворяющих неравенству* $\|v\|_{C^3(\partial\Omega)} \leqslant R$. *Кроме того, функции* $\widehat{u}_\delta(x) \equiv (2\pi)^{-1}\widehat{G}(x)\mathbf{P}_L v_\delta$ *сходятся к функции* $u(x)$ *при* $L \to \infty$, $\delta \to +0$ *равномерно относительно* $x \in \overline{\Omega_D}$ *и функций* $v \in C^3(\partial\Omega)$, $v_\delta \in C(\partial\Omega)$, *удовлетворяющих неравенствам* $\|v\|_{C^3(\partial\Omega)} \leqslant R$, $\|v_\delta - v\|_{C(\partial\Omega)} \leqslant \delta$.

§ 3. Конечные разрывы полуаналитических аппроксимаций НП ППС на границе области

Эффект пограничного слоя связан с отсутствием равномерной сходимости аппроксимаций НП ППС вблизи границы области. Если для вычисления интегралов $\ddot{G}_l(x)f$ использовать исключительно ПКФГ, то аппроксимации НП ППС или неограниченно возрастают при приближении к границе $\partial\Omega$, если точка наблюдения x неограниченно приближается к одному из узлов ПКФГ, или изменяются непрерывно при пересечении границы $\partial\Omega$, если точка x при пересечении не совпадает ни с одним из узлов. Поскольку при достаточной гладкости кривой $\partial\Omega$ такие аппроксимации НП ППС сходятся к точным значениям $u(x)$ и при $x \in \partial\Omega$, и при $x \in \Omega_D$, а функция $u(x)$ при $v \neq 0$ имеет конечный разрыв на $\partial\Omega$, то сходимость не может быть равномерной в замкнутой области $\overline{\Omega_D}$ и вблизи $\partial\Omega$ становится неравномерной. В предыдущем параграфе доказано, что полуаналитические аппроксимации равномерно сходятся в замкнутой области $\overline{\Omega_D}$. Значит, такие аппроксимации также, как и НП ППС, должны иметь конечный разрыв на $\partial\Omega$ (кроме, быть может, некоторого конечного числа аппроксимаций). В настоящем параграфе подробно исследуются свойства полуаналитических аппроксимаций, связанные с вопросами непрерывности.

Приведем сначала оригинальное доказательство утверждения, описывающего конечный разрыв НП ППС на границе области $\partial\Omega$, а затем получим аналогичное утверждение для рассматриваемых в настоящей работе полуаналитических аппроксимаций.

Пусть $f \in C(\partial\Omega)$. Согласно лемме 1 и следствию 1 значения Σ'_s, Σ''_s непрерывно зависят от $s \in \overline{I_S}$, значения $\rho_{d,s}(\Sigma'_s)$, $\rho_{d,s}(\Sigma''_s)$ непрерывно зависят от $(d,s) \in \overline{I_D} \times \overline{I_S}$, функции $B_i(d,s,\rho)f$ $(i = 1,2)$ непрерывны на множестве $\widetilde{\Upsilon}'$. Интегралы $G_1(x)f$ сходятся равномерно по $x \in \overline{\Omega_D}$. Поэтому в силу теоремы о непрерывности несобственных интегралов, зависящих от параметра [27, гл. XVII, § 2, утверждение 5], функция $G_1(x)f$ непрерывна на замкнутом множестве $\overline{\Omega_D}$. Можно утверждать, что функция $G_2(x)f$ непрерывна на множестве Ω_D. Функция $B_3(d,s,s')f$ непрерывна на множестве $\overline{\Upsilon \setminus \Upsilon'}$, так как $r \geqslant D$, поэтому функция $G_3(x)f$, как и $G_1(x)f$, непрерывна на $\overline{\Omega_D}$.

В силу неравенства $\psi'_0 > 0$ при $(d,s) \in \overline{I_D} \times \overline{I_S}$ выполняются неравенства:

$$|\rho_{d,s}(\Sigma'_s)| \geqslant c_0\,|\Sigma'_s| \geqslant c_0 D, \quad |\rho_{d,s}(\Sigma''_s)| \geqslant c_0\Sigma''_s \geqslant c_0 D \quad \Big(c_0 \equiv \inf_{(d,s,s')\in\Upsilon} \sqrt{\psi'_0} > 0\Big).$$

При фиксированном $\varepsilon \in (0, c_0 D]$ имеем равномерно сходящиеся по $s \in \overline{I_S}$ пределы:

$$\lim_{d\to 0} \int_{\rho_{d,s}(\Sigma'_s)}^{-\varepsilon} a_2 B_2 f\,d\rho = \lim_{d\to 0} \int_{\varepsilon}^{\rho_{d,s}(\Sigma''_s)} a_2 B_2 f\,d\rho = 0.$$

Учитывая также равенства

$$B_2(0,s,0)f = -\psi_1^{-1}(s,s)\psi_0^{1/2}(s,s)f(s) = -f(s) \quad (s \in \overline{I_S}),$$

получаем равномерно сходящиеся по $s \in \overline{I_S}$ пределы:

$$\lim_{d\to\pm 0} G_2(\widetilde{x}_d(s))f = \lim_{\varepsilon\to +0}\left(\lim_{d\to\pm 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} a_2(d,\rho)B_2(d,s,\rho)f\,d\rho\right) =$$
$$= 2\lim_{\varepsilon\to +0}\left(\lim_{d\to\pm 0} B_2(d,s,\widetilde{\rho}_{d,s,\varepsilon})f\,\mathrm{arctg}\,(\varepsilon/d)\right) = \mp\pi f(s), \tag{3.1}$$

где $\widetilde{\rho}_{d,s,\varepsilon} \in [-\varepsilon,\varepsilon]$ (см. обобщенную теорему о среднем [26, п. 299]). На основании равенств (2.1), (3.1) получаем известное утверждение: предельные соотношения для НП ППС

$$\lim_{d\to\pm 0}(2\pi)^{-1}G(\widetilde{x}_d(s))f = \mp 2^{-1}f(s) + (2\pi)^{-1}G(\widetilde{x}(s))f \tag{3.2}$$

выполняются при $\partial\Omega \in C^2$, $f \in C(\partial\Omega)$ равномерно по $s \in \overline{I_S}$, причем функция $G(\widetilde{x}(s))f$ непрерывна на множестве $\overline{I_S}$. Поэтому с помощью предельных равенств (3.1) и (3.2) можно доопределить функции $G_2(x)f$ и $G(x)f$ на границе $\partial\Omega$ до функций, непрерывных или на замкнутом множестве $\overline{\Omega_D^+}$, или на замкнутом множестве $\overline{\Omega_D^-}$ ($\Omega_D^\pm \equiv \Omega_\pm \cap \Omega_D$).

Теорема 4. *Пусть $\partial\Omega \in C^4$, $L/2 \in \mathbb{N}$, $f \in H_L$, $\ddot{f} \equiv \ddot{\mathbf{P}}_L f$. Тогда функция $\widehat{G}(x)f$ непрерывна на множестве Ω_D и может быть доопределена на границе $\partial\Omega$ до функции, непрерывной или на замыкании $\overline{\Omega_D^+}$, или на замыкании $\overline{\Omega_D^-}$, с помощью соответствующих равномерно сходящихся по $s \in \overline{I_S}$ пределов:*

$$\lim_{d\to\pm 0} \widehat{G}(\widetilde{x}_d(s))f = \mp\pi\ddot{f}(s) + \widehat{G}(\widetilde{x}(s))f. \tag{3.3}$$

Доказательство. Так как Σ_s', Σ_s'' непрерывно зависят от $s \in \overline{I_S}$, то в силу определения все $\alpha_{s,l}$ ($l \in \mathbb{Z}$) непрерывно зависят от $s \in \overline{I_S}$, при этом $\alpha_{s,l} \leqslant \alpha_{s,l+1}$. Следовательно, в силу теоремы 1 и следствия 1 значения $\rho_{d,s,l}$ ($l \in \mathbb{Z}$) непрерывно зависят от $(d,s) \in \overline{I_D}\times\overline{I_S}$ и $\rho_{d,s,l} \leqslant \rho_{d,s,l+1}$.

В силу условий $q_0 \equiv -1$, $q_2 \equiv 1$ имеем: $\ddot{f} \in C(\partial\Omega)$. Так $s_k < s_{k+1}$, то на каждом множестве $I_m \equiv \big\{(s,\sigma) : s \in \overline{I_S}, \sigma \in [s_m - s, s_{m+1} - s]\big\}$ ($m \in \mathbb{Z}$) существуют непрерывные производные $\ddot{f}_{m,j}(s,\sigma) \equiv \partial_\sigma^j \ddot{f}(s+\sigma)$ ($j = 1,2$). Для любых $k,l \in \mathbb{Z}$ существует $m \in \mathbb{Z}$ такое, что $I_{k,l} \equiv \{(s,\sigma) \colon s \in [s_k, s_{k+1}], \sigma \in [\alpha_{s,l} - s, \alpha_{s,l+1} - s]\} \subseteq I_m$. Функции $\ddot{f}_{k,l,j}(s,\sigma)$, заданные на множествах $I_{k,l} \subseteq I_m$ с помощью равенств $\ddot{f}_{k,l,j} \equiv \ddot{f}_{m,j}$, непрерывны на $I_{k,l}$ и определяют производные $\partial_\sigma^j \ddot{f}(s+\sigma)$ на подмножестве $\Delta I_{k,l}$, выделенном из $I_{k,l}$ с помощью неравенства $\alpha_{s,l} < \alpha_{s,l+1}$. Поэтому в силу следствия 1 функции $B_i(d,s,\rho)\ddot{f}$ ($i = 1,2$) непрерывны на множестве $\widetilde{\Upsilon}'$, а на каждом подмножестве $\Delta\widetilde{\Upsilon}'_{k,l}$ ($k,l \in \mathbb{Z}$), выделенном из множества $\widetilde{\Upsilon}'_{k,l} \equiv \big\{(d,s,\rho) \colon d \in \overline{I_D}, s \in [s_k, s_{k+1}], \rho \in [\rho_{d,s,l}, \rho_{d,s,l+1}]\big\}$ с помощью неравенства $\rho_{d,s,l} < \rho_{d,s,l+1}$, существуют непрерывные производные $\partial_\rho^j B_i(d,s,\rho)\ddot{f}$ ($j = 1,2$), которые при $\rho_{d,s,l} = \rho_{d,s,l+1}$ могут быть доопределены по непрерывности на все множество $\widetilde{\Upsilon}'_{k,l}$. Тогда в силу леммы 2 функции $\widehat{B}_i(d,s,\rho)f$ непрерывны на каждом множестве $\widetilde{\Upsilon}'_{k,l}$ ($k,l \in \mathbb{Z}$). Следовательно, функции $\widehat{B}_i(d,s,\rho)f$ непрерывны на множестве $\widetilde{\Upsilon}' = \bigcup\limits_{k,l\in\mathbb{Z}} \widetilde{\Upsilon}'_{k,l}$.

Значение $\rho = 0$ является точкой коллокации ($\rho_{d,s,k+1} = 0$, если $s \in [s_k, s_{k+1})$), поэтому при любых $s \in \overline{I_S}$ имеем равенства: $\widehat{B}_2(0,s,0)f = B_2(0,s,0)\ddot{f} = -\ddot{f}(s)$. В результате по аналогии с функциями $G_1(x)f$, $G_2(x)f$ ($f \in C(\partial\Omega)$) приходим к выводу, что функции $\widehat{G}_1(x)f$, $\widehat{G}_2(x)f$ ($f \in H_L$) непрерывны на множествах $\overline{\Omega_D}$, Ω_D соответственно, и функция $\widehat{G}_2(x)f$ может быть доопределена до непрерывных на замыканиях $\overline{\Omega_D^\pm}$ функций с помощью равномерно по $s \in \overline{I_S}$ сходящихся пределов:

$$\lim_{d\to\pm 0} \widehat{G}_2(\widetilde{x}_d(s))f = \pm\pi\widehat{B}_2(0,s,0)f = \mp\pi\ddot{f}(s). \tag{3.4}$$

Так как Σ_s', Σ_s'' непрерывно зависят от $s \in \overline{I_S}$, то в силу определения все $\beta_{s,l}$ ($l \in \mathbb{Z}$) непрерывно зависят от $s \in \overline{I_S}$, при этом $\beta_{s,l} \leqslant \beta_{s,l+1}$. Поэтому узлы ПКФГ $\beta_{s,l,j}$ ($l \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1,\gamma}$) непрерывно зависят от $s \in \overline{I_S}$. К тому же точки $\widetilde{x}(s+\beta_{s,l,j})$ отстоят от точки наблюдения $\widetilde{x}_d(s)$ на расстоянии не меньшем, чем D. Следовательно, функции $\widehat{B}_{3,l}(d,s)f$ ($l \in \mathbb{Z}$) непрерывны на множестве $\overline{I_D} \times \overline{I_S}$, и функция $\widehat{G}_3(x)f$ непрерывна на $\overline{\Omega_D}$.

Согласно определениям (2.6), (2.7) имеет место равенство $\widehat{G}(\widetilde{x}(s))f = \widehat{G}_1(\widetilde{x}(s))f + \widehat{G}_3(\widetilde{x}(s))f$. Поэтому следствием пределов (3.4) являются пределы (3.3). Теорема 4 полностью доказана. □

§ 4. Вычислительные эксперименты

Рассмотрим вычисление НП ППС с плотностью $v(\varphi) = \cos\varphi$ во внешности единичного круга ($R = 1-d > 1$ и $\varphi = s$ — соответственно полярные радиус и угол с полюсом в центре круга). Точные значения НП ППС $\overline{u}(R,\varphi)$ вычисляются по формуле: $\overline{u}(R,\varphi) = \cos\varphi/\,(2R^2)$. Приближенные значения НП ППС $\widehat{u}(R,\varphi)$ вычисляются в соответствии со следствием 2 при $\gamma = 2$. Кроме того, вычисляются функции $\widetilde{u}_i(R,\varphi)$ $(i = \overline{1,3})$, отличающиеся от $\widehat{u}(R,\varphi)$ лишь тем, что интегралы $\displaystyle\int_{\alpha_{s,l}}^{\alpha_{s,l+1}} g(x,s')\left(\ddot{\mathbf{P}}_L f\right)(s')\,ds'$ при $\alpha_{s,l} < \alpha_{s,l+1}$ вычисляются с помощью ПКФГ с $\gamma_i = 12\cdot 2^{i-1}$ узлами. Заметим, что точка $\widetilde{x}(s)$ при этом не совпадает ни с одним из узлов ПКФГ, так как ПКФГ — открытые формулы. Поэтому функции $\widetilde{u}_i(R,\varphi)$ непрерывны при переходе через границу $\partial\Omega$.

Для данной геометрии $D = 2/(3\pi)$, $\Sigma''_s = -\Sigma'_s = \arcsin(2/(3\pi))$. Функции $\widehat{u}$, $\widetilde{u}_i$ $(i = \overline{1,3})$, $\overline{u}$ вычисляем с двойной точностью при фиксированных $d \in [-D, 0)$ в точках $\widetilde{x}_d(s_{l/4})$ $(l = \overline{-4L-4, 4L+3}$, $s_{l/4} \equiv lh/4)$, поэтому эти решения можно рассматривать как функции в пространстве H_{4L+3}. При фиксированных d находим максимумы модулей абсолютных погрешностей приближенных решений $\widehat{u}$, $\widetilde{u}_i$: $\Delta\widehat{u} \equiv \|\widehat{u} - \overline{u}\|_{H_{4L+3}}$, $\Delta\widetilde{u}_i \equiv \|\widetilde{u}_i - \overline{u}\|_{H_{4L+3}}$ $(i = \overline{1,3})$. В таблице 1 в каждой основной ячейке представлены значения $\Delta\widehat{u}$, $\Delta\widetilde{u}_1$, $\Delta\widetilde{u}_2$, $\Delta\widetilde{u}_3$ в соответствующем порядке сверху вниз.

Таблица 1. Максимумы модулей абсолютных погрешностей

d	$h_1 = \pi/3$	$h_2 = \pi/7$	$h_3 = \pi/15$	$h_4 = \pi/31$	$h_5 = \pi/63$
10^{-2}	$3.01\cdot10^{-2}$ $3.01\cdot10^{-2}$ $3.01\cdot10^{-2}$ $3.01\cdot10^{-2}$	$2.55\cdot10^{-3}$ $2.87\cdot10^{-3}$ $2.55\cdot10^{-3}$ $2.55\cdot10^{-3}$	$2.45\cdot10^{-4}$ $8.41\cdot10^{-4}$ $2.45\cdot10^{-4}$ $2.45\cdot10^{-4}$	$2.39\cdot10^{-5}$ $2.40\cdot10^{-5}$ $2.39\cdot10^{-5}$ $2.39\cdot10^{-5}$	$2.09\cdot10^{-6}$ $2.09\cdot10^{-6}$ $2.09\cdot10^{-6}$ $2.09\cdot10^{-6}$
10^{-3}	$3.11\cdot10^{-2}$ $1.32\cdot10^{-1}$ $3.22\cdot10^{-2}$ $3.11\cdot10^{-2}$	$2.73\cdot10^{-3}$ $1.19\cdot10^{-1}$ $1.67\cdot10^{-2}$ $2.73\cdot10^{-3}$	$2.81\cdot10^{-4}$ $1.14\cdot10^{-1}$ $1.59\cdot10^{-2}$ $2.81\cdot10^{-4}$	$3.12\cdot10^{-5}$ $1.46\cdot10^{-2}$ $1.03\cdot10^{-3}$ $3.15\cdot10^{-5}$	$3.65\cdot10^{-6}$ $1.23\cdot10^{-2}$ $3.33\cdot10^{-5}$ $3.65\cdot10^{-6}$
10^{-4}	$3.12\cdot10^{-2}$ $4.54\cdot10^{-1}$ $3.27\cdot10^{-1}$ $5.01\cdot10^{-2}$	$2.75\cdot10^{-3}$ $4.53\cdot10^{-1}$ $3.27\cdot10^{-1}$ $3.11\cdot10^{-2}$	$2.85\cdot10^{-4}$ $4.53\cdot10^{-1}$ $3.24\cdot10^{-1}$ $2.95\cdot10^{-2}$	$3.24\cdot10^{-5}$ $4.03\cdot10^{-1}$ $1.71\cdot10^{-1}$ $2.29\cdot10^{-2}$	$3.87\cdot10^{-6}$ $3.08\cdot10^{-1}$ $2.19\cdot10^{-2}$ $9.47\cdot10^{-4}$
10^{-5}	$3.12\cdot10^{-2}$ $4.95\cdot10^{-1}$ $4.82\cdot10^{-1}$ $4.30\cdot10^{-1}$	$2.75\cdot10^{-3}$ $4.95\cdot10^{-1}$ $4.82\cdot10^{-1}$ $4.30\cdot10^{-1}$	$2.85\cdot10^{-4}$ $4.95\cdot10^{-1}$ $4.82\cdot10^{-1}$ $4.29\cdot10^{-1}$	$3.25\cdot10^{-5}$ $4.90\cdot10^{-1}$ $4.62\cdot10^{-1}$ $3.56\cdot10^{-1}$	$3.87\cdot10^{-6}$ $4.80\cdot10^{-1}$ $4.24\cdot10^{-1}$ $2.25\cdot10^{-1}$
10^{-15}	$3.12\cdot10^{-2}$ $5.00\cdot10^{-1}$ $5.00\cdot10^{-1}$ $5.00\cdot10^{-1}$	$2.75\cdot10^{-3}$ $5.00\cdot10^{-1}$ $5.00\cdot10^{-1}$ $5.00\cdot10^{-1}$	$2.86\cdot10^{-4}$ $5.00\cdot10^{-1}$ $5.00\cdot10^{-1}$ $5.00\cdot10^{-1}$	$3.25\cdot10^{-5}$ $5.00\cdot10^{-1}$ $5.00\cdot10^{-1}$ $5.00\cdot10^{-1}$	$3.87\cdot10^{-6}$ $5.00\cdot10^{-1}$ $5.00\cdot10^{-1}$ $5.00\cdot10^{-1}$

Можно заметить, что полуаналитические аппроксимации $\widehat{u}$ обладают кубической скоростью сходимости, сохраняющейся даже при очень малых расстояниях $|d|$ до границы $\partial\Omega$, что хорошо согласуется с утверждением следствия 2 об их равномерной кубической сходимости вблизи $\partial\Omega$. Скорости сходимости традиционных аппроксимаций $\widetilde{u}_i$ по мере приближения к границе $\partial\Omega$ снижаются от кубической до нулевой при фиксированных шагах дискретизации h и восстанавливаются до кубической по мере уменьшения h при фиксированных d, что свидетельствует об отсутствии у таких аппроксимаций равномерной сходимости вблизи $\partial\Omega$.

Заключение

На основе кусочно-квадратичной интерполяции получены полуаналитические аппроксимации нормальной производной потенциала простого слоя, равномерно сходящиеся с кубической скоростью вблизи границы $\partial\Omega$ двумерной области Ω. Такие аппроксимации практически и теоретически осуществимы для любой аналитически заданной границы $\partial\Omega$ класса C^5. По аналогии с точной функцией аппроксимации терпят конечный разрыв на границе области, величина которого пропорциональна значениям интерполированной функции плотности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
2. Zhang Yaoming, Li Xiaochao, Sladek V., Sladek J., Gao Xiaowei. A new method for numerical evaluation of nearly singular integrals over high-order geometry elements in 3D BEM // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2015. Vol. 277. P. 57–72. https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.08.027
3. Крутицкий П. А., Федотова А. Д., Колыбасова В. В. Квадратурная формула для потенциала простого слоя // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 9. С. 1269–1284. https://doi.org/10.1134/S0374064119090103
4. Крутицкий П. А., Резниченко И. О. Квадратурная формула для гармонического потенциала двойного слоя // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 7. С. 932–950. https://doi.org/10.31857/S0374064121070074
5. Lv Jiahe, Miao Yu, Zhu Hongping. The distance sinh transformation for the numerical evaluation of nearly singular integrals over curved surface elements // Computational Mechanics. 2014. Vol. 53. Issue 2. P. 359–367. https://doi.org/10.1007/s00466-013-0913-0
6. Niu Zhongrong, Cheng Changzheng, Zhou Huanlin, Hu Zongjun. Analytic formulations for calculating nearly singular integrals in two-dimensional BEM // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2007. Vol. 31. Issue 12. P. 949–964. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.05.001
7. Gao X. W., Yang K., Wang J. An adaptive element subdivision technique for evaluation of various 2D singular boundary integrals // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2008. Vol. 32. Issue 8. P. 692–696. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.12.004
8. Zhang Yao-Ming, Gu Yan, Chen Jeng-Tzong. Stress analysis for multilayered coating systems using semi-analytical BEM with geometric non-linearities // Computational Mechanics. 2011. Vol. 47. Issue 5. P. 493–504. https://doi.org/10.1007/s00466-010-0559-0
9. Gu Yan, Chen Wen, Zhang Bo, Qu Wenzhen. Two general algorithms for nearly singular integrals in two dimensional anisotropic boundary element method // Computational Mechanics. 2014. Vol. 53. Issue 6. P. 1223–1234. https://doi.org/10.1007/s00466-013-0965-1
10. Niu Zhongrong, Hu Zongjun, Cheng Changzheng, Zhou Huanlin. A novel semi-analytical algorithm of nearly singular integrals on higher order elements in two dimensional BEM // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2015. Vol. 61. P. 42–51. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.06.007
11. Cheng Changzheng, Pan Dong, Han Zhilin, Wu Meng, Niu Zhongrong. A state space boundary element method with analytical formulas for nearly singular integrals // Acta Mechanica Solida Sinica. 2018. Vol. 31. Issue 4. P. 433–444. https://doi.org/10.1007/s10338-018-0040-8
12. Крутицкий П. А., Колыбасова В. В. Численный метод решения интегральных уравнений в задаче с наклонной производной для уравнения Лапласа вне разомкнутых кривых // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 9. С. 1262–1276. https://doi.org/10.1134/S0374064116090144

13. Крутицкий П. А., Резниченко И. О. Квадратурная формула для потенциала двойного слоя с дифференцируемой плотностью // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 8. С. 1121–1131. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49288409
14. Крутицкий П. А., Резниченко И. О. Квадратурная формула для потенциала двойного слоя в случае уравнения Гельмгольца // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62. № 3. С. 421–436. https://doi.org/10.31857/S0044466922030097
15. Gao Xiao-Wei, Zhang Jin-Bo, Zheng Bao-Jing, Zhang Chuanzeng. Element-subdivision method for evaluation of singular integrals over narrow strip boundary elements of super thin and slender structures // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2016. Vol. 66. P. 145–154. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.02.002
16. Gong Yanpeng, Dong Chunying, Qin Fei, Hattori G., Trevelyan J. Hybrid nearly singular integration for isogeometric boundary element analysis of coatings and other thin 2D structures // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2020. Vol. 367. 113099. https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113099
17. Gu Yan, Zhang Chuanzeng. Fracture analysis of ultra-thin coating/substrate structures with interface cracks // International Journal of Solids and Structures. 2021. Vol. 225. 111074. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111074
18. Gong Yanpeng, Dong Chunying, Bai Yang. Evaluation of nearly singular integrals in isogeometric boundary element method // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2017. Vol. 75. P. 21–35. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.11.005
19. Иванов Д. Ю. Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы области в случае двумерных задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями второго и третьего рода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 57. С. 5–25. https://doi.org/10.17223/19988621/57/1
20. Иванов Д. Ю. Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы двумерной области с помощью полуаналитической аппроксимации теплового потенциала двойного слоя // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 30–52. https://doi.org/10.17223/19988621/65/3
21. Иванов Д. Ю. О равномерной сходимости аппроксимаций потенциала двойного слоя вблизи границы двумерной области // Вестник Удмуртского университетата. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 1. С. 26–43. https://doi.org/10.35634/vm220103
22. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
23. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981.
24. Иванов Д. Ю. Устойчивая разрешимость в пространствах дифференцируемых функций некоторых двумерных интегральных уравнений теплопроводности с операторно-полугрупповым ядром // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 6 (38). С. 33–45. https://doi.org/10.17223/19988621/38/4
25. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962.
26. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматлит, 2003.
27. Зорич В. А. Математический анализ. Ч. 2. М.: МНЦМО, 2012.

Поступила в редакцию 26.02.2023

Принята к публикации 29.08.2023

Иванов Дмитрий Юрьевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра высшей математики, Российский университет транспорта (МИИТ), 127994, Россия, г. Москва, ГСП-4, ул. Образцова, 9.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4551-469X
E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

Цитирование: Д. Ю. Иванов. Об одной полуаналитической аппроксимации нормальной производной потенциала простого слоя вблизи границы двумерной области // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 3. С. 434–451.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2023. Vol. 33. Issue 3. Pp. 434–451.

D. Yu. Ivanov

On one semi-analytical approximation of the normal derivative of the simple layer potential near the boundary of a two-dimensional domain

Keywords: quadrature formula, normal derivative of simple layer potential, boundary element method, near singular integral, boundary layer effect, uniform convergence.

MSC2020: 31-08, 31A10

DOI: 10.35634/vm230304

On the basis of piecewise quadratic interpolation, semi-analytical approximations of the normal derivative of the simple layer potential near and on the boundary of a two-dimensional domain are obtained. To calculate the integrals formed after the interpolation of the density function, exact integration over the variable $\rho = (r^2 - d^2)^{1/2}$ is used, where d and r are the distances from the observed point to the boundary of the domain and to the boundary point of integration, respectively. The study proves the stable convergence of such approximations with cubic velocity uniformly near the boundary of the class C^5, as well as on the boundary itself. It is also proved that, by analogy with the exact function, the approximations suffer a discontinuity at the boundary, the magnitude of which is proportional to the values of the interpolated density function, but they can be extended on the boundary to functions that are continuous either on a closed internal border domain or on a closed external one. Theoretical conclusions about uniform convergence are confirmed by the results of calculating the normal derivative near the boundary of a unit circle.

REFERENCES

1. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. *Boundary element techniques*, Berlin: Springer, 1984. https://doi.org/10.1007/978-3-642-48860-3
   Translated under the title *Metody granichnykh elementov*, Moscow: Mir, 1987.
2. Zhang Yaoming, Li Xiaochao, Sladek V., Sladek J., Gao Xiaowei. A new method for numerical evaluation of nearly singular integrals over high-order geometry elements in 3D BEM, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015, vol. 277, pp. 57–72. https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.08.027
3. Krutitskii P. A., Fedotova A. D., Kolybasova V. V. Quadrature formula for the simple layer potential, *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 9, pp. 1226–1241. https://doi.org/10.1134/S0012266119090106
4. Krutitskii P. A., Reznichenko I. O. Quadrature formula for the harmonic double layer potential, *Differential Equations*, 2021, vol. 57, no. 7, pp. 901–920. https://doi.org/10.1134/S0012266121070077
5. Lv Jiahe, Miao Yu, Zhu Hongping. The distance sinh transformation for the numerical evaluation of nearly singular integrals over curved surface elements, *Computational Mechanics*, 2014, vol. 53, issue 2, pp. 359–367. https://doi.org/10.1007/s00466-013-0913-0
6. Niu Zhongrong, Cheng Changzheng, Zhou Huanlin, Hu Zongjun. Analytic formulations for calculating nearly singular integrals in two-dimensional BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2007, vol. 31, issue 12, pp. 949–964. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.05.001
7. Gao X. W., Yang K., Wang J. An adaptive element subdivision technique for evaluation of various 2D singular boundary integrals, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2008, vol. 32, issue 8, pp. 692–696. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.12.004
8. Zhang Yao-Ming, Gu Yan, Chen Jeng-Tzong. Stress analysis for multilayered coating systems using semi-analytical BEM with geometric non-linearities, *Computational Mechanics*, 2011, vol. 47, issue 5, pp. 493–504. https://doi.org/10.1007/s00466-010-0559-0
9. Gu Yan, Chen Wen, Zhang Bo, Qu Wenzhen. Two general algorithms for nearly singular integrals in two dimensional anisotropic boundary element method, *Computational Mechanics*, 2014, vol. 53, issue 6, pp. 1223–1234. https://doi.org/10.1007/s00466-013-0965-1

10. Niu Zhongrong, Hu Zongjun, Cheng Changzheng, Zhou Huanlin. A novel semi-analytical algorithm of nearly singular integrals on higher order elements in two dimensional BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2015, vol. 61, pp. 42–51. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.06.007
11. Cheng Changzheng, Pan Dong, Han Zhilin, Wu Meng, Niu Zhongrong. A state space boundary element method with analytical formulas for nearly singular integrals, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2018, vol. 31, issue 4, pp. 433–444. https://doi.org/10.1007/s10338-018-0040-8
12. Krutitskii P. A., Kolybasova V. V. Numerical method for the solution of integral equations in a problem with directional derivative for the Laplace equation outside open curves, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, issue 9, pp. 1219–1233. https://doi.org/10.1134/S0012266116090135
13. Krutitskii P. A., Reznichenko I. O. Quadrature formula for the double layer potential with differentiable density, *Differential Equations*, 2022, vol. 58, issue 8, pp. 1114–1125. https://doi.org/10.1134/S0012266122080122
14. Krutitskii P. A., Reznichenko I. O. Quadrature formula for a double layer potential in the case of the Helmholtz equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2022, vol. 62, issue 3, pp. 411–426. https://doi.org/10.1134/S0965542522030095
15. Gao Xiao-Wei, Zhang Jin-Bo, Zheng Bao-Jing, Zhang Chuanzeng. Element-subdivision method for evaluation of singular integrals over narrow strip boundary elements of super thin and slender structures, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2016, vol. 66, pp. 145–154. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.02.002
16. Gong Yanpeng, Dong Chunying, Qin Fei, Hattori G., Trevelyan J. Hybrid nearly singular integration for isogeometric boundary element analysis of coatings and other thin 2D structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, vol. 367, 113099. https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113099
17. Gu Yan, Zhang Chuanzeng. Fracture analysis of ultra-thin coating/substrate structures with interface cracks, *International Journal of Solids and Structures*, 2021, vol. 225, 111074. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111074
18. Gong Yanpeng, Dong Chunying, Bai Yang. Evaluation of nearly singular integrals in isogeometric boundary element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2017, vol. 75, pp. 21–35. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.11.005
19. Ivanov D. Yu. A refinement of the boundary element collocation method near the boundary of domain in the case of two-dimensional problems of non-stationary heat conduction with boundary conditions of the second and third kind, *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, 2019, no. 57, pp. 5–25 (in Russian). https://doi.org/10.17223/19988621/57/1
20. Ivanov D. Yu. A refinement of the boundary element collocation method near the boundary of a two-dimensional domain using semianalytic approximation of the double layer heat potential, *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, 2020, no. 65, pp. 30–52 (in Russian). https://doi.org/10.17223/19988621/65/3
21. Ivanov D. Yu. On uniform convergence of approximations of the double layer potential near the boundary of a two-dimensional domain, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 1, pp. 26–43 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm220103
22. Dunford N., Schwartz J. T. *Linear operators. Part 1: General theory*, Hoboken: John Wiley and Sons, 1988.
Translated under the title *Lineinye operatory. Obshchaya teoriya*, Moscow: Inostrannaya Literatura, 1962.
23. Smirnov V. I. *Kurs vysshei matematiki. Tom 4. Chast' 2* (A course of higher mathematics. Vol. 4. Part 2), Moscow: Nauka, 1981.
24. Ivanov D. Yu. Stable solvability in spaces of differentiable functions of some two-dimensional integral equations of heat conduction with an operator-semigroup kernel, *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, 2015, no. 6 (38), pp. 33–45 (in Russian). https://doi.org/10.17223/19988621/38/4
25. Berezin I. S., Zhidkov N. P. *Metody vychislenii. Tom 1* (Methods of computation. Vol. 1), Moscow:

Fizmatgiz, 1962.

26. Fikhtengol'ts G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. Tom 2* (Differential and integral calculus course. Vol. 2), Moscow: Fizmatlit, 2003.
27. Zorich V. A. *Mathematical analysis. II*, Berlin: Springer, 2016.
https://doi.org/10.1007/978-3-662-48993-2
Original Russian text published in Zorich V. A. *Matematicheskii analiz, Chast' 1*, Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2012.

Received 26.02.2023

Accepted 29.08.2023

Dmitry Yurievich Ivanov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Russian University of Transport (MIIT), ul. Obraztsova, 9, GSP-4, Moscow, 127994, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4551-469X
E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

Citation: D. Yu. Ivanov. On one semi-analytical approximation of the normal derivative of the simple layer potential near the boundary of a two-dimensional domain, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 3, pp. 434–451.