

УДК 517.91

© А. Н. Кириллов, А. М. Сазонов

ГИБРИДНАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ С РЕЖИМОМ УБЕЖИЩА: РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И САМООРГАНИЗАЦИЯ

Предложена математическая модель динамики популяций хищника и жертвы в виде гибридной динамической системы, состоящей из двух двумерных систем, переключающихся между собой. Переключения систем позволяют моделировать особый режим убежища (refuge), при котором число жертв слишком мало, и хищникам трудно их обнаружить. Исследованы режимы скольжения по методу Филиппова. Проведена регуляризация представленной модели посредством использования двух линий переключения с целью избежать очень частых переключения (chattering) между системами. Для регуляризованной модели найдены предельные множества. Предложен сценарий самоорганизации системы, при котором невозможен неограниченный рост популяций. Проводится исследование чувствительности по отношению к параметру, задающему линии переключения. Важным результатом исследования является то, что при достаточно малом изменении линий переключения качественное поведение системы сохраняется.

Ключевые слова: гибридные системы, регуляризация, предельные множества.

DOI: [10.35634/vm230306](https://doi.org/10.35634/vm230306)

Введение

Данная работа посвящена математическому моделированию динамики популяций хищника и жертвы посредством гибридной динамической системы, под которой будем понимать систему с переключениями, которая будет подробно описана далее. Переключения позволяют моделировать режим убежища, при котором число доступных жертв слишком мало, и хищники практически не могут их обнаружить. Режим убежища оказывает стабилизирующий эффект на экологическую систему, предотвращая исчезновение жертв.

Для моделирования различных режимов взаимодействия популяций используются гибридные системы с переключениями, исследуемые методом Филиппова. Так, в статье [1] предложена модель динамики популяций сельскохозяйственных вредителей и подсеяемых к ним естественных хищников-врагов с целью снижения числа вредителей. Для контроля за численностью популяций используются отлов и уничтожение посредством ядов при достижении популяции некоторого порогового значения, что моделируется посредством изменения правых частей. На основе метода Филиппова проводится анализ режимов скольжения. Работа [2] посвящена моделированию влияния неполной вакцинации на распространение инфекции посредством гибридной системы типа Филиппова. Переключение правых частей происходит при достижении числом инфицированных порогового значения, методом Филиппова исследуется динамика в скользящем режиме. В работе [3] приводится обзор приложений гибридных систем в биологии и медицине, таких как изучение экспрессии генов [4], анализ генных сетей [5], исследование динамики раковых заболеваний [6–8], изучение нейронных систем [9–11].

Опишем общий вид гибридных систем с переключениями [12]. Ограничимся двумерным случаем и одной линией переключения. Пусть кривая S делит фазовое пространство

системы $E \subset \mathbb{R}^2$ на два множества E_1, E_2 . Тогда система с переключениями имеет вид

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x), & x \in E_1, \\ f_2(x), & x \in E_2, \end{cases} \quad (0.1)$$

где $x = (x_1, x_2) \in E$ — вектор фазовых переменных, f_1, f_2 — векторные поля, задающие динамику в E_1, E_2 , соответственно. Если на линии переключения S векторы правых частей f_1, f_2 направлены в одну из областей E_1, E_2 , то такой режим переключения называется прошиванием в соответствующую область. В противном случае говорят, что происходит скольжение вдоль S , которое называется устойчивым, если f_1, f_2 направлены в сторону S , и неустойчивым в противном случае.

В настоящей работе S — прямая $x = \lambda y$, где x, y — количественные характеристики популяций жертв и хищников, соответственно, $\lambda > 0$ — заданная константа. Смысл такой линии переключения состоит в следующем. Если количество жертв, приходящихся на одного хищника, достаточно велико, то есть $\frac{x}{y} > \lambda$, имеется взаимодействие популяций типа «хищник–жертва». В противном случае, при $\frac{x}{y} < \lambda$, система переходит в так называемый режим «убежища» (refuge-regime), при котором взаимодействие популяций хищника и жертвы отсутствует. В работе [13] для конкретных векторных полей f_1, f_2 построен режим скольжения на прямой $x = \lambda y$, исследована соответствующая динамика с переключениями.

Однако режим скольжения описывает идеальную динамику, тем более не реализующуюся в экологических системах, для которых не характерны быстрые переключения. Для преодоления этого недостатка в настоящей работе предлагается метод регуляризации гибридной системы, позволяющий снизить число переключений между подсистемами, и, тем самым, избежать учащающихся переключений (chattering) [12, 14, 15]. Суть данной техники состоит в изменении модели таким образом, чтобы переключения происходили с задержкой. В данной работе регуляризация системы происходит за счет введения двух линий переключения $l_1: x = (\lambda - \delta)y$ и $l_2: x = (\lambda + \delta)y$, $0 < \delta < \lambda$. При этом, на l_1 переключение происходит только от системы со взаимодействием популяций к режиму убежища, а на l_2 — наоборот. Данный метод иллюстрируется на примере гибридной модели, состоящей из систем Лотки–Вольтерры и режима убежища. При использовании регуляризации такого типа возникает проблема исследования чувствительности результата к колебаниям параметров, задающих линию переключения. Как будет показано, в предлагаемой модели при достаточно малых изменениях, задаваемых параметром δ , качественное поведение системы сохраняется.

§ 1. Описание модели

Модель переключения со скользящим режимом

Рассмотрим модель Лотки–Вольтерры с refuge-режимом без регуляризации, то есть при $\delta = 0$, и покажем, что для такой модели существует режим устойчивого скольжения. В качестве фазового пространства системы естественно рассматривать множество

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x > 0, y > 0\}.$$

Для описания динамики взаимодействия популяций в режиме взаимодействия при условии, что количество жертв, приходящихся на одного хищника, то есть $\frac{x}{y}$, достаточно велико, рассмотрим модель Лотки–Вольтерры

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) = f_1(x, y), \\ \dot{y} = y(kbx - m) = f_2(x, y), \end{cases} \quad (1.1)$$

где $x(t)$, $y(t)$ — численности популяций жертв и хищников, соответственно, $a > 0$ — коэффициент прироста жертв в отсутствии хищников, $b > 0$ — коэффициент истребления хищником жертв, $m > 0$ — коэффициент естественной смертности хищников, $0 < k < 1$ — доля полученной с потребляемой хищником биомассой энергии, которая расходуется им на воспроизводство.

Однако, когда число жертв становится достаточно малым, хищникам сложно их найти, и система переключается в так называемый режим убежища (refuge-regime), который в данном исследовании задается системой вида

$$\begin{cases} \dot{x} = ax = g_1(x, y), \\ \dot{y} = -my = g_2(x, y). \end{cases} \quad (1.2)$$

Отметим, что в системе (1.2) отсутствует взаимодействие между хищниками и жертвами.

Рассмотрим гибридную динамическую систему, в которой системы (1.1) и (1.2) переключаются между собой. В качестве линии переключения используется луч

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x = \lambda y\},$$

который делит \mathbb{R}_+^2 на два множества

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x > \lambda y\}, \quad E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x < \lambda y\}.$$

В E_1 действует система (1.1), в E_2 — (1.2). Пусть $\lambda \neq \frac{m}{ak}$, то есть положение равновесия системы (1.1) не лежит на луче l . Рассмотрим случай $\lambda < \frac{m}{ak}$, когда положение равновесия системы (1.1) расположено в E_1 . Обозначим через $r_{LV}(t, z_0)$, $r_{LV}(0, z_0) = z_0$, — решение системы (1.1), через $r_R(t, z_0)$, $r_R(0, z_0) = z_0$, — решение системы (1.2), где $z_0 = (x_0, y_0)$. Пусть $\sigma(z_0) = \{r_{LV}(t, z_0), t \geq 0\}$ — положительная полутраектория системы (1.1), которая, как известно, замкнута и выпукла [16], и которую в дальнейшем будем называть овалом, $\rho(z_0) = \{r_R(t, z_0), t \geq 0\}$ — положительная полутраектория системы (1.2). Обозначим через $D(z_0)$ выпуклую область, ограниченную кривой $\sigma(z_0)$. Обозначим через σ_T положительную полутраекторию системы (1.1), для которой l является касательным в точке $Q = \sigma_T \cap l = (\frac{\lambda(a+m)}{b(1+k\lambda)}, \frac{a+m}{b(1+k\lambda)})$. Обозначим $(0Q) = \{(x, y) \in l : x < \frac{\lambda(a+m)}{b(1+k\lambda)}\}$, $(Q\infty) = \{(x, y) \in l : x > \frac{\lambda(a+m)}{b(1+k\lambda)}\}$. Используя метод Филиппова [12], исследуем режимы переключения на линии l . Обозначим через $\tau = (-1, \lambda)$ нормаль к l , направленную в E_1 . Тогда

$$f_N^- = f \cdot \tau = \lambda y(-a + by + kb\lambda y - m), \quad f_N^+ = g \cdot \tau = -\lambda y(a + m), \quad (1.3)$$

где $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2)$, $f \cdot \tau$, $g \cdot \tau$ — скалярные произведения правых частей систем (1.1), (1.2) на нормаль τ , соответственно. Следуя [12], имеем: $f_N^- > 0$, $f_N^+ < 0$, если $y > \frac{a+m}{b(1+k\lambda)}$, то есть на $(Q\infty)$ получаем устойчивое скольжение; $f_N^- < 0$, $f_N^+ < 0$, если $y < \frac{a+m}{b(1+k\lambda)}$, то есть на $(0Q)$ — прошивание из E_1 в E_2 . Филипповское векторное поле $v(z)$ для точки $z = (x, y) \in l$ имеет вид

$$v(z) = (v_1, v_2) = \alpha f + (1 - \alpha)g = \frac{(ak\lambda - m)y}{1 + \lambda k}(\lambda, 1), \quad (1.4)$$

где $\alpha = \frac{f_N^-}{f_N^- - f_N^+} = \frac{by(1+k\lambda) - a - m}{by(1+k\lambda)}$. Из (1.4) получаем, что $v_1 < 0$, $v_2 < 0$ при $\lambda < \frac{m}{ak}$, $v_1 > 0$, $v_2 > 0$ при $\lambda > \frac{m}{ak}$. Следовательно, для любой начальной точки $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}(\sigma_T)$,

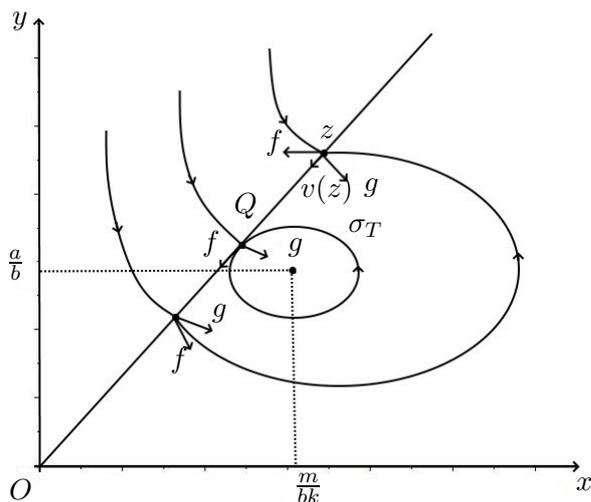


Рис. 1. Скользящий режим на луче (Q_∞) , $\lambda < \frac{m}{ak}$

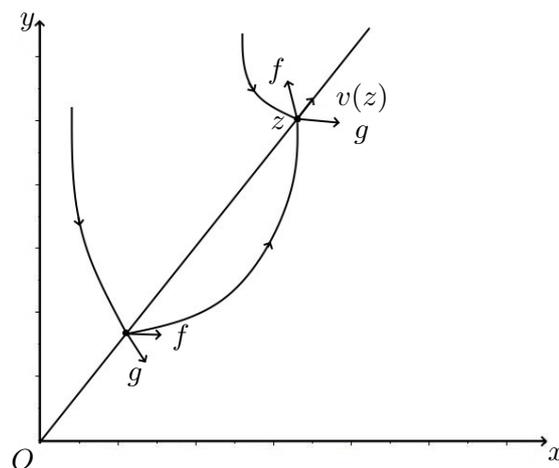


Рис. 2. Скользящий режим на луче (Q_∞) , $\lambda > \frac{m}{ak}$

где $\bar{D}(\sigma_T)$ — замыкание $D(\sigma_T)$, имеем, $v_1 < 0$, $v_2 < 0$, и на луче (Q_∞) происходит скольжение к точке Q при $\lambda < \frac{m}{ak}$; $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, и на луче (Q_∞) происходит скольжение к бесконечности при $\lambda > \frac{m}{ak}$. Таким образом, для начальных точек вне σ_T имеем в качестве предельного множества σ_T при $\lambda < \frac{m}{ak}$ (см. рис. 1), а при $\lambda > \frac{m}{ak}$ положительные полутраектории гибридной системы уходят на бесконечность (см. рис. 2). Очевидно, для начальных точек $z_0 \in D(\sigma_T)$ движение происходит по положительным полутраекториям системы (1.1), поскольку луч l из данных точек не достигается, и, следовательно, переключения к системе (1.2) не происходит.

Однако, как отмечено выше, данная модель имеет существенный недостаток, поскольку очень частые переключения (chattering) между системами невозможны на практике для экологических систем. Далее работа будет посвящена регуляризации описанной выше модели.

Регуляризация модели

Для регуляризации модели введем два луча переключения. Рассмотрим гибридную динамическую систему, в которой системы (1.1) и (1.2) последовательно переключаются между собой. Переключение от системы (1.1) к (1.2) происходит на луче

$$l_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x = (\lambda - \delta)y\},$$

обратное переключение происходит на луче

$$l_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x = (\lambda + \delta)y\}.$$

Переключения предполагаются мгновенными и происходят строго по очереди. Тем самым, за счет введения константы δ , реализуется задержка при переключении и происходит регуляризация гибридной системы, позволяющая избежать пилообразных режимов скольжения, то есть очень частого переключения между системами, что невозможно на практике для экологических систем.

Пусть $\lambda \pm \delta \neq \frac{m}{ak}$, то есть положение равновесия системы (1.1) не лежит на лучах l_1, l_2 . Тогда существует единственный касательный овал системы (1.1), σ_T , к лучу l_1 с точкой касания $Q_1 = \sigma_T \cap l_1$. Очевидно, при малых значениях $0 < \delta < \lambda$, в случае $\lambda < \frac{m}{ak}$, существуют две точки M_1, M_2 : $M_i = \sigma_T \cap l_2$, $i = 1, 2$, а в случае $\lambda > \frac{m}{ak}$: $\sigma_T \cap l_2 = \emptyset$.

А. Рассмотрим случай $\lambda < \frac{m}{ak}$ (см. рис. 3). Обозначим через $(M_1 M_2)$ интервал луча l_2 , $(M_1 M_2) \subset l_2$. Отметим, что если начальная точка $z_0 \in \mathbb{R}_+^2$ расположена в обла-

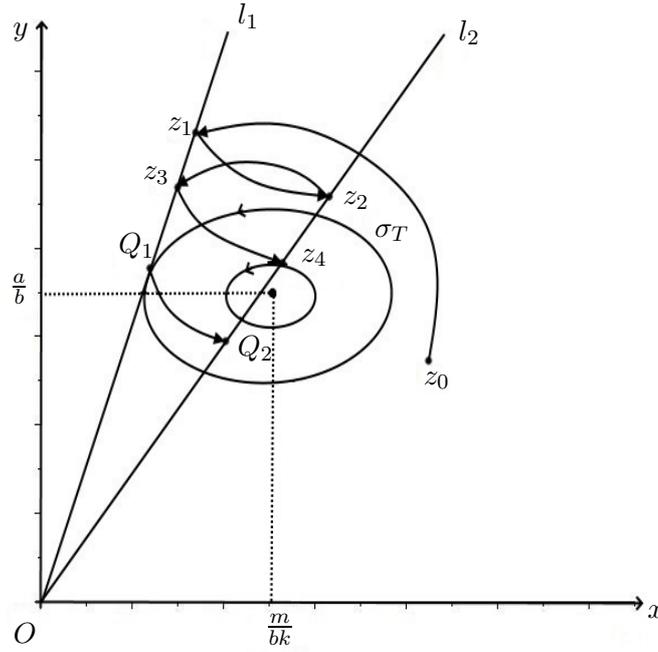


Рис. 3. Регуляризованная модель, $\lambda < \frac{m}{ak}$, $D(\sigma_T)$ — предельное множество

сти $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : (\lambda - \delta)y < x < (\lambda + \delta)y\}$, то через нее проходят две положительные полутраектории систем (1.1) и (1.2), соответственно. Таким образом, для определения решения с начальной точкой z_0 требуются дополнительные условия для начальных точек в Ω_2 . Ясно, что если z_0 расположена в области $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x > (\lambda + \delta)y\}$, то движение из нее будет происходить по траектории $\sigma(z_0)$; если z_0 расположена в области $\Omega_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x < (\lambda - \delta)y\}$, то движение из нее будет происходить по траектории $\rho(z_0)$. Отметим также, что на интервале $(0M_1)$ при переключении от системы (1.2) к системе (1.1) происходит прошивание из области Ω_2 в область Ω_1 , то есть векторы скоростей обеих систем (1.1), (1.2) на интервале $(0M_1)$ направлены в область Ω_1 . Следовательно, положительная полутраектория $\sigma(z)$, начинающаяся в точке $z \in \Omega_2 \cup \Omega_3$, до пересечения с лучом l_1 , и переключения от (1.1) к (1.2), еще раз пересечет луч l_2 в точке, принадлежащей $l_2 \setminus (0M_2]$, поскольку $z \notin D(\sigma_T)$. Таким образом, $(0M_1)$ взаимно-однозначно отображается на $l_2 \setminus (0M_2]$ вдоль траекторий (1.1), и в последовательности точек переключения мы не будем рассматривать точки интервала $(0M_1)$, а только точки интервала $l_2 \setminus (0M_2]$. Кроме того, ясно, что положительные полутраектории, начинающиеся в точках, принадлежащих (M_1M_2) , не достигнут луча l_1 , поскольку лежат внутри касательного овала σ_T к l_1 .

Б. Пусть теперь $\lambda > \frac{m}{ak}$ (см. рис. 4). Тогда $\sigma_T \cap l_2 = \emptyset$, и достижение луча l_1 , и, соответственно, переключение к refuge-режиму, возможно из любой точки, принадлежащей l_2 .

§ 2. Промежуточные результаты

Далее будем исследовать поведение гибридной системы (1.1), (1.2). Траектории системы (1.1) описываются уравнением

$$H(x, y, x_0, y_0) = a \ln y - by + m \ln x - kbx - h = 0,$$

где $z_0 = (x_0, y_0)$ — некоторая точка траектории системы (1.1), $h = h(z_0) = a \ln y_0 - by_0 + m \ln x_0 - kbx_0$. Здесь, $H(x, y, x_0, y_0) = 0$ — замкнутая выпуклая кривая для любой точ-

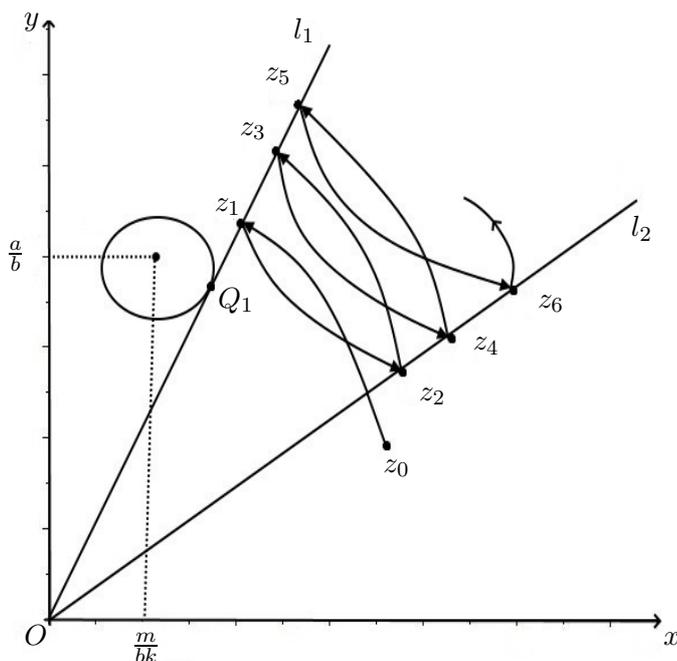


Рис. 4. Регуляризованная модель, $\lambda > \frac{m}{ak}$, $D(\sigma_T)$ — предельное множество

ки $z_0 \in \mathbb{R}_+^2$, кроме равновесия. Обозначим через $D(z_0)$ выпуклую область, ограниченную кривой $H(x, y, x_0, y_0) = 0$.

Лемма 2.1. Точка (\bar{x}, \bar{y}) принадлежит $D(z_0)$ тогда и только тогда, когда $H(x, y, x_0, y_0) > 0$. $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}(z_0)$ тогда и только тогда, когда $H(x, y, x_0, y_0) < 0$.

Доказательство. Равновесие системы (1.1) $(x^*, y^*) = (\frac{m}{bk}, \frac{a}{b}) \in D(z_0)$. Таким образом, для доказательства леммы 2.1 достаточно доказать, что $H(x^*, y^*, x_0, y_0) > 0$, поскольку H непрерывна. Рассмотрим

$$H(x^*, y^*, x_0, y_0) = a \ln \frac{a}{b} - a + m \ln \frac{m}{bk} - m - c(x_0, y_0).$$

Пусть $x_0 = x^*$. Тогда получим

$$H(x^*, y^*, x^*, y_0) = b(y^*(\ln y^* - \ln y_0) - (y^* - y_0)).$$

По теореме Лагранжа о среднем значении, имеем: $\ln y^* - \ln y_0 = \frac{y^* - y_0}{z}$, где $z \in (Y^*, y_0)$ при $y^* < y_0$, и $z \in (y_0, Y^*)$ при $y^* > y_0$. Следовательно, несложно показать, что

$$\frac{1}{b} H(x^*, y^*, x^*, y_0) = (y^* - y_0) \left(\frac{y^*}{z} - 1 \right) > 0.$$

В силу непрерывности H лемма доказана. \square

Лемма 2.2. Пусть начальная точка z_0 такая, что $\sigma(z_0) \cap l_1 \neq \emptyset$, $z = (x, y) \in \sigma(z_0) \cap l_1$.

Тогда существует достаточно малый параметр регуляризации δ такой, что:

$G(z) \in D(z_0)$ тогда и только тогда, когда $\lambda < \frac{m}{ak}$;

$G(z) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}(z_0)$, где $\bar{D}(z_0)$ — замыкание $D(z_0)$, тогда и только тогда, когда $\lambda > \frac{m}{ak}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем время \bar{t} перемещения от луча l_1 до луча l_2 вдоль положительной полутраектории системы (1.2). Поскольку начальная и конечная точки лежат на l_1, l_2 , соответственно, имеем

$$(\lambda - \delta)y_0 e^{a\bar{t}} = (\lambda + \delta)y_0 e^{-m\bar{t}}.$$

Отсюда

$$\bar{t} = \frac{1}{a + m} \ln \frac{\lambda + \delta}{\lambda - \delta}. \quad (2.1)$$

Подставим полученное в (2.1) значение для \bar{t} в левую часть уравнения вольтерровского овала $H(\bar{x}, \bar{y}, x_0, y_0)$ и выясним ее знак. Имеем,

$$\begin{aligned} H(\bar{x}, \bar{y}, x_0, y_0) &= a \ln \bar{y} - b\bar{y} + m \ln \bar{x} - k b \bar{x} - (a \ln y_0 - b y_0 + m \ln x_0 - k b x_0) = \\ &= -b(y_0(e^{-m\bar{t}} - 1) + k x_0(e^{a\bar{t}} - 1)). \end{aligned} \quad (2.2)$$

После преобразований, получим, что знак $H(\bar{x}, \bar{y}, x_0, y_0)$ совпадает со знаком выражения

$$\frac{1 + k(\lambda - \delta)}{1 + k(\lambda + \delta)} - \left(\frac{\lambda - \delta}{\lambda + \delta} \right)^{\frac{m}{a+m}}. \quad (2.3)$$

Введем функции

$$p(\delta) = \frac{1 + k(\lambda - \delta)}{1 + k(\lambda + \delta)}, \quad (2.4)$$

$$q(\delta) = \left(\frac{\lambda - \delta}{\lambda + \delta} \right)^{\frac{m}{a+m}}. \quad (2.5)$$

Таким образом, знак $H(\bar{x}, \bar{y}, x_0, y_0)$ определяется разницей между $p(\delta)$ и $q(\delta)$. Ясно, что $p(0) = q(0) = 1$. Используя формулу Тейлора для $p(\delta) - q(\delta)$ в окрестности $\delta = 0$, получаем

$$p(\delta) - q(\delta) = (p'(0) - q'(0))\delta + o(\delta). \quad (2.6)$$

Будем рассматривать настолько малые δ , чтобы знак $p(\delta) - q(\delta)$ определялся разностью производных $p'(0) - q'(0)$. Найдем производные

$$p'(\delta) = -\frac{2k(1 + k\lambda)}{(1 + k(\lambda + \delta))^2} < 0, \quad (2.7)$$

$$q'(\delta) = -\frac{2\lambda m}{(a + m)(\lambda + \delta)^2} \left(\frac{\lambda + \delta}{\lambda - \delta} \right)^{\frac{a}{a+m}} < 0. \quad (2.8)$$

Тогда $p'(0) - q'(0) = -\frac{2k}{1+k\lambda} + \frac{2m}{\lambda(a+m)}$. Отсюда $H(\bar{x}, \bar{y}, x_0, y_0) > 0$, и $G(z) \in D(z_0)$, при $\lambda < \frac{m}{ak}$, $H(\bar{x}, \bar{y}, x_0, y_0) < 0$, и $G(z) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}(z_0)$, при $\lambda > \frac{m}{ak}$. \square

Лемма 2.3. Пусть $\lambda < \frac{m}{ak}$. Тогда для любого δ , такого что $\lambda + \delta < \frac{m}{ak}$, положительные полутраектории $\rho(z)$ системы (1.2) с начальными точками $z = (x, y) \in l_1(\delta)$ или $z = (x, y) \in l_2(\delta)$ входят в области $D(z)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем доказательство методом от противного. Предположим, что существует точка z^* на одном из лучей $l_1(\delta), l_2(\delta)$ такая, что $\rho(z^*)$ не входит в $D(z^*)$. Касательная l_T^* к $\sigma(z^*)$ в точке z^* разбивает \mathbb{R}_+^2 на два множества W_1, W_2 , так что $D(z^*) \subset W_1$.

Чтобы $\rho(z^*)$ не входила в $D(z^*)$ необходимо, чтобы вектор скорости $g(z^*)$ системы (1.2) был направлен в область W_2 . Тогда, если $v(z^*) = (v_1^*, v_2^*)$ — филипповское векторное поле в точке z^* , то $v_1^* > 0$, $v_2^* > 0$. Последнее невозможно, так как филипповское векторное поле для любой точки z на лучах $l_1(\delta)$, $l_2(\delta)$ имеет вид

$$v(z) = (v_1, v_2) = \frac{(ak(\lambda \pm \delta) - m)y}{1 + \lambda k}(\lambda, 1), \quad (2.9)$$

и, при $\lambda + \delta < \frac{m}{ak}$, очевидно, что $v_1 < 0$, $v_2 < 0$. Получили противоречие, следовательно, $\rho(z)$ входит в $D(z)$ для любой начальной точки z . \square

§3. Предельные множества

Диффеоморфизмы, порожденные траекториями систем (1.1), (1.2)

Введем диффеоморфизм F , порожденный траекториями векторного поля $f = (f_1, f_2)$ системы (1.1)

$$F: l_2 \setminus (0, M_2] \rightarrow l_1, \quad F: z \rightarrow F(z) = \{r_{LV}(t(z), z)\} \cap l_1,$$

где $t(z)$ — время первого попадания положительной полутраектории $\{r_{LV}(t, z)\}$ из точки z на луч l_1 . Ясно, что для открытого интервала (M_1, M_2) не существует образа при отображении F , поскольку положительная полутраектория системы (1.1) $\sigma(z)$, $z \in (M_1, M_2)$, лежит внутри касательного овала σ_T , и, следовательно, $\sigma(z) \cap l_1 = \emptyset$. Кроме того, как указано ранее, точки промежутка $(0, M_1]$ отождествляются с точками промежутка $l_1 \setminus (0, M_2]$ вследствие прошивания $(0, M_1]$, поэтому данный промежуток также не будем включать в область определения F .

Введем диффеоморфизм G , порожденный траекториями векторного поля $g = (g_1, g_2)$ системы (1.2)

$$G: l_1 \rightarrow l_2, \quad G: z \rightarrow G(z) = \{r_R(t, z)\} \cap l_2,$$

где $t(z)$ — время первого попадания положительной полутраектории $\{r_R(t, z)\}$ из точки z на луч l_2 .

Случай $\lambda < \frac{m}{ak}$.

Теорема 3.1 (о предельных множествах при $\lambda < \frac{m}{ak}$). Пусть $\lambda < \frac{m}{ak}$. Тогда существует достаточно малое $\delta^* > 0$, такое что для любого $\delta \in (0, \delta^*)$, для любой начальной точки положительная полутраектория гибридной системы (1.1), (1.2) за конечное время попадает в $D(\sigma_T)$, где σ_T — касательный овал к l_1 , и далее движение происходит по замкнутой траектории системы Лотки–Вольтерры (1.1), принадлежащей $D(\sigma_T)$.

Доказательство. Будем обозначать $x(z)$, $y(z)$ — первую и вторую координату точки $z \in \mathbb{R}_+^2$, соответственно ($z = (x(z), y(z))$). Пусть начальная точка гибридной системы $z_0 = (x_0, y_0)$ такова, что $x_0 < (\lambda + \delta)y_0$. Обозначим через $z_1 = \sigma(z_0) \cap l_1$. Тогда $z_2 = G(z_1) \in l_2$, $z_3 = F(z_2) \in l_1$, и так далее. Повторяя эту процедуру, получаем точки $z_{2i+1} \in l_1$, в которых происходит переключение от системы (1.1) к системе (1.2), и точки $z_{2i} \in l_2$, в которых происходит переключение от системы (1.2) к системе (1.1) (см. рис. 3). Предположим, что положительная полутраектория гибридной системы (1.1), (1.2) не попадает внутрь овала σ_T , то есть $z_{2i+1} = F(z_{2i})$ существуют для всех $i \geq 1$. Отметим, что для точек, лежащих внутри овала σ_T , не определено отображение F , поскольку положительные полутраектории системы (1.1), начинающиеся в таких точках, очевидно, не достигнут луча l_1 . Согласно лемме 2.2, $z_{2i} = G(z_{2i-1}) \in D(z_{2i-1})$ для любой $z_{2i-1} = (x_{2i-1}, y_{2i-1}) \in l_1$,

то есть положительная полутраектория системы (1.2) попадает внутрь предшествующего ей овала. Очевидно, что после переключения положительная полутраектория системы (1.1) Лотки–Вольтерры $\sigma(z_{2i})$, начинающаяся в точке $z_{2i} = G(z_{2i-1})$, будет находиться внутри области $D(z_{2i-1})$, следовательно, $x(FG(z_{2i-1})) < x(z_{2i-1}), y(FG(z_{2i-1})) < y(z_{2i-1})$ для всех i . При этом, согласно лемме 2.2, $G(z_T) \in D(z_T)$, где $z_T = (x_T, y_T) = \sigma_T \cap l_1$. Поскольку $x_T < x_{2i-1}, y_T < y_{2i-1}$ для всех i , и пересечение траекторий невозможно, получаем две убывающие числовые последовательности x_{2i-1}, y_{2i-1} , ограниченные снизу. Следовательно, у каждой из них существует предел $x^* = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{2i-1}, y^* = \lim_{i \rightarrow \infty} y_{2i-1}$. Обозначим $z^* = (x^*, y^*)$. По предположению, $G(z^*) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus D(z_T)$. Тогда существует $FG(z^*)$, и $x(FG(z^*)) < x^*$, так как последовательность x_{2i-1} убывающая, что противоречит тому, что $x_{2i-1} \rightarrow x^*$. Следовательно, предельной точкой последовательности z_{2i-1} может быть только $Q_1 = \sigma_T \cap l_1$. Тогда, в силу непрерывности $g_i, i = 1, 2$, предельной точкой для $z_{2i} \in l_2$ будет $Q_2 = G(Q_1)$. По лемме 2.2, $Q_2 \in D(z_T)$, следовательно, предположение неверно, и существует i^* , такое что $G(z_{i^*}) \in D(z_T)$, и дальнейшее переключение невозможно, $FG(z_{i^*}) = \emptyset$, так как положительная полутраектория системы (1.1) Лотки–Вольтерры $\sigma(z_{i^*})$ из точки $G(z_{i^*})$ не достигнет луча переключения l_1 . Таким образом, дальнейшее движение, при $t > t^*$, будет происходить по положительной полутраектории системы (1.1) $\sigma(z_{i^*})$, где t^* — момент попадания положительной полутраектории системы (1.2) из точки $G(z_{i^*})$ на луч l_2 . Для случая $x_0 > (\lambda - \delta)y_0$ доказательство аналогично, начальный режим меняется с Лотки–Вольтерры на refuge, а также точки с четными номерами z_{2i} будут лежать на луче l_1 , а с нечетными z_{2i-1} — на l_2 . Для начальных точек, лежащих в множестве Ω_2 , необходимо, как было указано ранее, определить начальный режим, и далее доказательство будет аналогично одному из описанных выше случаев. \square

Итак, для регуляризованной модели имеем для каждой начальной точки M_0 вне σ_T свою предельную положительную полутраекторию $\sigma(M_0) \subset \sigma_T$ системы (1.1), в отличие от исходной модели, где для всех начальных точек предельная траектория единственная — σ_T .

Далее будет проведено исследование чувствительности системы по отношению к параметру, задающему линии переключения, и будет показано, что при достаточно малом изменении данного параметра качественное поведение системы сохраняется. Рассмотрим случай, когда значение δ точно не известно, а известно лишь, что $0 < \delta_1 < \delta < \delta_2$. Введем конусы

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : (\lambda - \delta_2)y < x < (\lambda - \delta_1)y\},$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : (\lambda + \delta_1)y < x < (\lambda + \delta_2)y\}.$$

Пусть переключения от системы (1.2) к системе (1.1) происходят в произвольных точках R_1 , а переключения от (1.1) к (1.2) — в произвольных точках R_2 .

Теорема 3.2 (о предельных множествах при $\lambda < \frac{m}{ak}, \delta_1 < \delta < \delta_2$). Пусть $\lambda < \frac{m}{ak}$. Тогда существует достаточно малое $\delta^* > 0$ такое, что для любого $\delta_2 \in (0, \delta^*)$, для любой начальной точки положительная полутраектория гибридной системы (1.1), (1.2) за конечное время попадает в $D(\sigma_T^1)$, где σ_T^1 — касательный овал к $l_1(\delta_1)$, и далее движение происходит по замкнутой траектории системы Лотки–Вольтерры (1.1), принадлежащей $D(\sigma_T^1)$.

Доказательство. Пусть начальная точка гибридной системы $z_0 = (x_0, y_0)$ такова, что $x_0 > (\lambda + \delta_2)y_0$. Согласно предложенному режиму переключений, точка z_0 переходит в точку $z_1 = (x_1, y_1) \in R_1$, в которой происходит переключение к системе (1.2). Обозначим, $\tilde{z}_1 = \sigma(z_0) \cap l_1(\delta_1), \hat{z}_1 = \sigma(z_0) \cap l_1(\delta_2)$ (см. рис. 5). Далее точка z_1 переходит в $z_2 = (x_2, y_2) \in R_2$. Обозначим, $\tilde{z}_2 = \rho(\tilde{z}_1) \cap l_2(\delta_1), \hat{z}_2 = \rho(\tilde{z}_1) \cap l_2(\delta_2)$. Повторяя далее данную процедуру, получаем последовательности точек переключения $\{z_i\}$ и соответствующих им точек $\{\tilde{z}_i\}, \{\hat{z}_i\}, i = 1, 2, \dots$

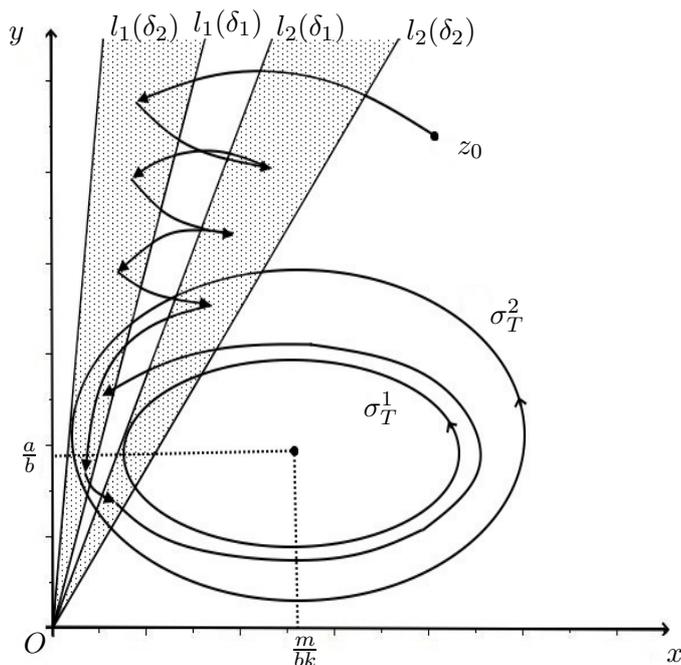


Рис. 5. Регуляризованная модель, $\lambda < \frac{m}{ak}$, $\delta_1 < \delta < \delta_2$, $D(\sigma_T^1)$ — предельное множество

Обозначим через η_i дуги траекторий систем (1.1), (1.2) с начальными и конечными точками \tilde{z}_i, \hat{z}_i , соответственно. Обозначим через K_i такие множества, что их граница $\partial K_i = \eta_i \cup (0\tilde{z}_i) \cup (0\hat{z}_i)$. По леммам 2.2, 2.3, точки $z_i \in K_i$. По теореме 3.1, существует $i^* > 0$ такое, что $\hat{z}_{i^*} \in D(\sigma_T^2)$, то есть $\eta_{i^*} \subset D(\sigma_T^2)$. Следовательно, точка $z_{i^*} \in K_{i^*} \cap D(\sigma_T^2)$. Обозначим $V = D(\sigma_T^1) \cap R_2$, $V_0 = (D(\sigma_T^2) \setminus \bar{D}(\sigma_T^1)) \cap R_2$. Ясно, что $V_0 = V_1 \cup V_2$, где $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. При этом, для любых $z^{(1)} = (x^{(1)}, y^{(1)}) \in \partial V_1 \cap l_2(\delta_2)$, $z^{(2)} = (x^{(2)}, y^{(2)}) \in \partial V_2 \cap l_2(\delta_2)$ имеем $x^{(1)} < x^{(2)}$.

Если $z_{i^*} \in V$, то получаем утверждение теоремы. Если $z_{i^*} \in V_2$, то существует точка $z_{i^*+1} \in R_1 \cap D(\sigma_T^2)$. Возможны два случая. Если $z_{i^*+2} \in V$, то теорема доказана. Если точка $z_{i^*+2} \in V_1$, то, как было показано выше, происходит прошивание положительной полутраекторией $\rho(z_{k^*+1})$ луча, проходящего через точку z_{i^*+2} , и далее точка z_{i^*+2} переходит в точку z_{i^*+3} вдоль положительной полутраектории $\sigma(z_{i^*+2})$. Отметим, что, согласно леммам 2.2, 2.3, точка $z_{i^*+2} \in D(\sigma(z_{i^*+1})) \subset D(\sigma_T^2)$, то есть движение из точки z_{i^*+2} происходит по овалу меньшего диаметра, чем у $D(\sigma_T^2)$: $d_{i^*+1} = \text{diam}(D(\sigma(z_{i^*+1}))) < \text{diam}(D(\sigma_T^2))$. Повторяя описанную процедуру, получаем последовательность овалов $D(\sigma(z_{i^*+2m+1}))$ (вложенных) с диаметрами $d_{i^*+2m+1} < d_{i^*+2m-1}$ (см. рис. 6). Предположим, что $m \rightarrow \infty$, и покажем, что это невозможно. Поскольку $d_{i^*+2m+1} > d = \text{diam}(D(\sigma_T^1))$ для любого $m = 0, 1, \dots$, получаем монотонно убывающую последовательность, ограниченную снизу величиной d . Несложно установить, что $d_{i^*+2m+1} \rightarrow d$. Поскольку последовательность диаметров $d_{i^*+2m+1} \rightarrow d = \text{diam}(\sigma_T^1)$, то в области $W = D(\sigma_T^2) \cap R_1$ имеем точки $z_{i^*+2m+1} \rightarrow Q_1$. По лемме 2.3, образ точки Q_1 вдоль траекторий системы (1.2) — $\tilde{Q}_1 \in V$. Следовательно, в силу непрерывности g_1, g_2 по начальным данным, существует $m^* > 0$ такое, что образ $z_{k^*+2m^*+1}$ под действием отображения вдоль траекторий системы (1.2) $z_{i^*+2m^*+2} \in V$, и теорема доказана.

Для случая $x_0 > (\lambda - \delta_2)y_0$ доказательство аналогично, начальный режим меняется с Лотки–Вольтерры на refuge, а также точки с четными номерами z_{2i} будут лежать в конусе R_1 , а с нечетными z_{2i-1} — в R_2 . Для начальных точек, таких что $(\lambda - \delta_2)y_0 < x_0 < (\lambda + \delta_2)y_0$, необходимо, как было указано ранее, определить начальный режим, и далее

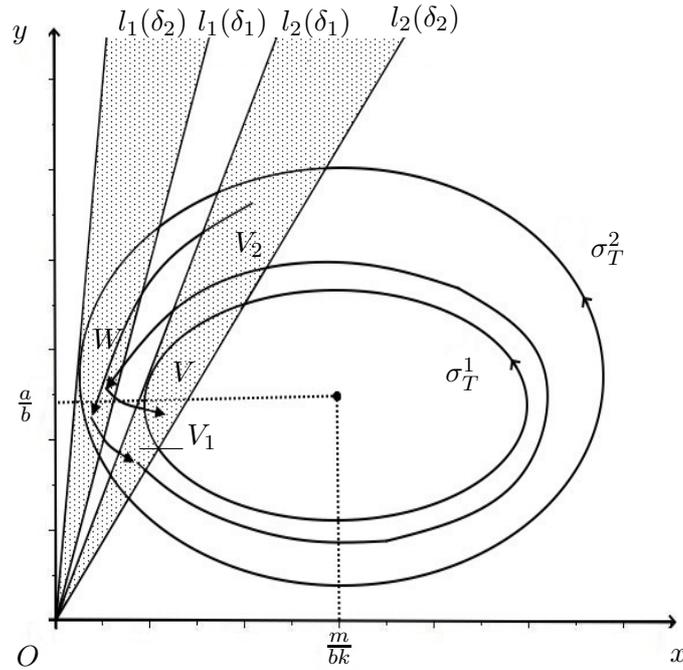


Рис. 6. Поведение в $D(\sigma_T^2) \setminus \bar{D}(\sigma_T^1)$

доказательство будет аналогично одному из описанных выше случаев. □

Полученный результат позволяет избежать рассмотрения модели с жестким условием переключения при попадании точки строго на лучи $x = (\lambda \pm \delta)y$. Это обстоятельство дает возможность сделать модель более адекватной реальности, поскольку точные измерения параметров в экологических системах невозможны.

Случай $\lambda > \frac{m}{ak}$.

Ясно, что в случае $\lambda > \frac{m}{ak}$ в качестве области определения диффеоморфизма F выступает l_2 , поскольку касательный овал σ_T находится выше лучей l_1 и l_2 , и, следовательно, $\sigma_T \cap l_2 = \emptyset$.

Теорема 3.3 (о предельных множествах при $\lambda > \frac{m}{ak}$). Пусть $\lambda > \frac{m}{ak}$. Тогда существует достаточно малое $\delta^* > 0$ такое, что для любого $\delta \in (0, \delta^*)$ положительные полутраектории гибридной системы (1.1), (1.2) неограничены для любой начальной точки (см. рис. 4).

Доказательство. Пусть начальная точка гибридной системы $z_0 = (x_0, y_0)$ такова, что $x_0 < (\lambda + \delta)y_0$, $z_1 = \sigma(z_0) \cap l_1$. Тогда $z_2 = G(z_1) \in l_2$, $z_3 = F(z_2) \in l_1$, и так далее. Повторяя эту процедуру, получаем точки $z_{2i+1} \in l_1$, в которых происходит переключение от системы (1.1) к системе (1.2), и точки $z_{2i} \in l_2$, в которых происходит переключение от системы (1.2) к системе (1.1) (см. рис. 4). Проведем доказательство методом от противного. Предположим, что существует x_{\max} , такое что $x_{2i+1} \leq x_{\max}$, $i = 0, 1, \dots$. Согласно лемме 2.2, $z_{2i} = G(z_{2i-1}) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}(x_i, y_i)$ для любой $z_{2i-1} = (x_{2i-1}, y_{2i-1}) \in l_1$, то есть положительная полутраектория refuge-режима выходит из овала $\sigma(z_{2i-1})$. Следовательно, $x_{2i+1} = x(FG(z_{2i-1})) > x_{2i-1}$ для всех i . Тогда имеем, что $x_{2i+1} \rightarrow x^* = \sup(x_{2i+1}) \leq x_{\max}$. Согласно лемме 2.2, для $z^* = (x^*, \frac{x^*}{\lambda - \delta})$ имеем, $x(FG(z^*)) > x^* = \sup(x_{2i+1})$. Получили противоречие, следовательно, предположение неверно, и $x_{2i+1} \rightarrow \infty, y_{2i+1} \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Таким образом, получаем уход положительных полутраекторий гибридной системы (1.1), (1.2) на бесконечность. □

Замечание 3.1. Отметим, что существует сходство в поведении траекторий для модели со скольжением, при $\delta = 0$, и в регуляризованной модели. В случае $\lambda < \frac{m}{ak}$ в каждой из моделей существует предельный овал, однако есть существенные различия. В случае $\delta = 0$ для любых начальных точек $z_0 \in W = \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}(\sigma_T)$ существует единственный предельный овал σ_T , касательный к линии переключения l , а для каждой начальной точки $z_0 \in D(\sigma_T)$ движение осуществляется по $\sigma(z_0)$. Таким образом, предельным множеством является $\bar{D}(\sigma_T)$. В регуляризованной модели для каждой начальной точки $z_0 \in \mathbb{R}_+^2$ существует свой предельный овал $\sigma_L(z_0) \subset D(\sigma_T)$, где σ_T — касательный овал к l_1 . При этом, для начальных точек $z_0 \in W$ предельное множество расширяется до кольца $D(\sigma_T) \setminus \bar{D}(\tilde{\sigma}_T)$, где $\tilde{\sigma}_T$ — касательный овал к l_2 . В случае $\lambda > \frac{m}{ak}$ траектории обеих моделей уходят на бесконечность. Таким образом, имеем связь между моделями, при этом, если $\lambda < \frac{m}{ak}$, поведение траекторий регуляризованной модели более естественно с точки зрения предметной области, поскольку в данном случае отражается зависимость модели от начальных данных для всех начальных точек.

Замечание 3.2. Отметим, кроме того, что представленная модель носит прикладной характер, поэтому в данном исследовании не рассматривается случай $\lambda = \frac{m}{ak}$, поскольку измерения параметров возможны только приближенно, что исключает возможность точного равенства.

Итак, согласно теореме 3.3, в случае $\lambda > \frac{m}{ak}$ положительная полутраектория гибридной системы (1.1), (1.2) уходит на бесконечность. Это противоречит предметной области, поскольку рост численности биологических видов не может быть неограниченным. Ниже, в данной работе, предлагается новый подход для разрешения описанного недостатка, основанный на введении в модель возможности самоорганизации сообщества для случая $\lambda > \frac{m}{ak}$ посредством изменения параметра λ при превышении переменными x, y некоторых пороговых значений.

Согласно наблюдениям экологов, для каждой реальной экологической системы можно оценить период, которому соответствует конкретный вольтерровский овал. С ростом диаметра овала увеличивается период [16–18]. Таким образом, на основании ограниченности ресурсов экологической системы, можно определить предельные параметры, задающие «ограничивающий овал» σ_{lim} . Предложим сценарий изменения поведения популяции, на основе изменения параметра модели λ , с учетом ограниченности ресурсов экологической системы. Пусть для наименьшего $i > 0$: $z_{2i} \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{D}(\sigma_{lim})$ (см. рис. 7). Тогда, будем считать, что включается механизм адаптации, который вырабатывает само биосообщество, ограничивающий численность популяций. Параметр $\lambda > \frac{m}{ak}$ меняется на $\tilde{\lambda} < \frac{m}{ak}$, и, таким образом, согласно теореме 3.1, положительная полутраектория гибридной системы (1.1), (1.2) за конечное время попадет в $D(\sigma_T(\tilde{\lambda}))$, где $\sigma_T(\tilde{\lambda})$ — касательный овал к лучу переключения $l(\tilde{\lambda})$, и далее движение происходит по замкнутой траектории системы Лотки–Вольтерры (1.1). Мотивацией для такого изменения служит то, что при достаточно большом количестве особей хищников и жертв на ограниченном участке, хищникам легче найти жертв, следовательно, переход в режим убежища должен происходить при достижении меньшего порогового числа жертв на одного хищника.

Итак, согласно теореме 3.1, при предложенном сценарии, имеем, что для любой начальной точки z_0 положительная полутраектория гибридной системы (1.1), (1.2) за конечное время попадает в $D(\sigma_T)$, где σ_T — касательный овал к l_1 , и далее движение происходит по замкнутой траектории системы Лотки–Вольтерры (1.1), принадлежащей $D(\sigma_T)$. Таким образом, модель показывает свойство самоорганизации, или живучести, гибридной системы.

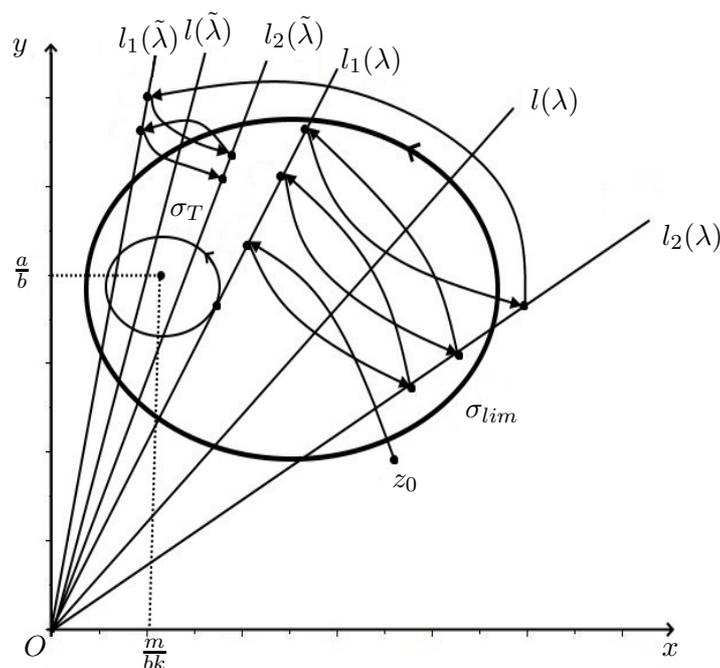


Рис. 7. Самоорганизация при $\lambda > \frac{m}{ak}$

Финансирование. Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФ в рамках научного проекта 23–21–00092.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Deng Jiawei, Tang Sanyi, Lai Choi-Hong. Non-smooth ecological systems with a switching threshold depending on the pest density and its rate of change // *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*. 2021. Vol. 42. 101094. <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2021.101094>
2. Zhang Yunhu, Xiao Yanni. Global dynamics for a Filippov epidemic system with imperfect vaccination // *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*. 2020. Vol. 38. 100932. <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2020.100932>
3. Aihara Kazuyuki, Suzuki Hideyuki. Theory of hybrid dynamical systems and its applications to biological and medical systems // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2010. Vol. 368. Issue 1930. P. 4893–4914. <https://doi.org/10.1098/rsta.2010.0237>
4. Perkins T. J., Wilds R., Glass L. Robust dynamics in minimal hybrid models of genetic networks // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2010. Vol. 368. Issue 1930. P. 4961–4975. <https://doi.org/10.1098/rsta.2010.0139>
5. Imura Jun-Ichi, Kashima Kenji, Kusano Masami, Ikeda Tsukasa, Morohoshi Tomohiro. Piecewise affine systems approach to control of biological networks // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2010. Vol. 368. Issue 1930. P. 4977–4993. <https://doi.org/10.1098/rsta.2010.0176>
6. Osborne J. M., Walter A., Kershaw S. K., Mirams G. R., Fletcher A. G., Pathmanathan P., Gavaghan D., Jensen O. E., Maini P. K., Byrne H. M. A hybrid approach to multi-scale modelling of cancer // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2010. Vol. 368. Issue 1930. P. 5013–5028. <https://doi.org/10.1098/rsta.2010.0173>
7. Tanaka Gouhei, Hirata Yoshito, Goldenberg S. L., Bruchovsky N., Aihara Kazuyuki. Mathematical modelling of prostate cancer growth and its application to hormone therapy // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2010. Vol. 368. Issue 1930. P. 5029–5044. <https://doi.org/10.1098/rsta.2010.0221>

8. Suzuki Taiji, Bruchovsky N., Aihara Kazuyuki. Piecewise affine systems modelling for optimizing hormone therapy of prostate cancer // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2010. Vol. 368. Issue 1930. P. 5045–5059. <https://doi.org/10.1098/rsta.2010.0220>
9. Izhikevich E. M. Hybrid spiking models // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2010. Vol. 368. Issue 1930. P. 5061–5070. <https://doi.org/10.1098/rsta.2010.0130>
10. Cao Hongjun, Ibarz Borja. Hybrid discrete-time neural networks // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2010. Vol. 368. Issue 1930. P. 5071–5086. <https://doi.org/10.1098/rsta.2010.0171>
11. Proctor J., Kukillaya R. P., Holmes P. A phase-reduced neuro-mechanical model for insect locomotion: feed-forward stability and proprioceptive feedback // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2010. Vol. 368. Issue 1930. P. 5087–5104. <https://doi.org/10.1098/rsta.2010.0134>
12. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
13. Chen Xiaoyan, Huang Lihong. A Filippov system describing the effect of prey refuge use on a ratio-dependent predator–prey model // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2015. Vol. 428. Issue 2. P. 817–837. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.03.045>
14. Уткин В. И. Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.
15. Acary V., Brogliato B., Orlov Yu. V. Chattering-free digital sliding-mode control with state observer and disturbance rejection // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2012. Vol. 57. Issue 5. P. 1087–1101. <https://doi.org/10.1109/tac.2011.2174676>
16. Rothe F. The periods of the Volterra–Lotka system // *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*. 1985. Vol. 1985. Issue 355. P. 129–138. <https://doi.org/10.1515/crll.1985.355.129>
17. Waldvogel J. The period in the Lotka–Volterra system is monotonic // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1986. Vol. 114. Issue 1. P. 178–184. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(86\)90076-4](https://doi.org/10.1016/0022-247X(86)90076-4)
18. Hausrath A. R., Manasevich R. F. Periodic solutions of a periodically perturbed Lotka–Volterra equation using the Poincaré–Birkhoff theorem // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1991. Vol. 157. Issue 1. P. 1–9. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(91\)90132-J](https://doi.org/10.1016/0022-247X(91)90132-J)

Поступила в редакцию 07.04.2023

Принята к публикации 20.07.2023

Кириллов Александр Николаевич, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Институт прикладных математических исследований, ФИЦ «Карельский научный центр РАН», 185910, Россия, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3356-1846>

E-mail: krllv1812@yandex.ru

Сазонов Александр Михайлович, к. ф.-м. н., младший научный сотрудник, Институт прикладных математических исследований, ФИЦ «Карельский научный центр РАН», 185910, Россия, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11.

E-mail: sazon-tb@mail.ru

Цитирование: А. Н. Кириллов, А. М. Сазонов. Гибридная модель динамики популяций с режимом убежища: регуляризация и самоорганизация // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2023. Т. 33. Вып. 3. С. 467–482.

A. N. Kirillov, A. M. Sazonov

A hybrid model of population dynamics with refuge-regime: regularization and self-organization

Keywords: hybrid systems, regularization, limit sets.

MSC2020: 34A38, 37N25

DOI: [10.35634/vm230306](https://doi.org/10.35634/vm230306)

A mathematical model of the dynamics of the predator and prey populations in the form of a hybrid dynamical system consisting of two two-dimensional systems switching between each other is proposed. Switching of the systems allows us to reproduce a special refuge-regime when the prey number is very small and predators have complications to find preys. The sliding modes are studied using Filippov approach. Regularization of the system by using two switching lines to avoid chattering is provided. For the regularized model the limit sets are established. A scenario of the system self-organization preventing the unbounded populations' growth is proposed. A sensitivity study is carried out with respect to a parameter defining the switching lines. An important result of the research is that sufficiently small changing of the switching lines does not change the qualitative behavior of the system.

Funding. The study was funded by RSF, project number 23–21–00092.

REFERENCES

1. Deng Jiawei, Tang Sanyi, Lai Choi-Hong. Non-smooth ecological systems with a switching threshold depending on the pest density and its rate of change, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2021, vol. 42, 101094. <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2021.101094>
2. Zhang Yunhu, Xiao Yanni. Global dynamics for a Filippov epidemic system with imperfect vaccination, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2020, vol. 38, 100932. <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2020.100932>
3. Aihara Kazuyuki, Suzuki Hideyuki. Theory of hybrid dynamical systems and its applications to biological and medical systems, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2010, vol. 368, issue 1930, pp. 4893–4914. <https://doi.org/10.1098/rsta.2010.0237>
4. Perkins T.J., Wilds R., Glass L. Robust dynamics in minimal hybrid models of genetic networks, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2010, vol. 368, issue 1930, pp. 4961–4975. <https://doi.org/10.1098/rsta.2010.0139>
5. Imura Jun-Ichi, Kashima Kenji, Kusano Masami, Ikeda Tsukasa, Morohoshi Tomohiro. Piecewise affine systems approach to control of biological networks, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2010, vol. 368, issue 1930, pp. 4977–4993. <https://doi.org/10.1098/rsta.2010.0176>
6. Osborne J.M., Walter A., Kershaw S.K., Mirams G.R., Fletcher A.G., Pathmanathan P., Gavaghan D., Jensen O.E., Maini P.K., Byrne H.M. A hybrid approach to multi-scale modelling of cancer, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2010, vol. 368, issue 1930, pp. 5013–5028. <https://doi.org/10.1098/rsta.2010.0173>
7. Tanaka Gouhei, Hirata Yoshito, Goldenberg S.L., Bruchofsky N., Aihara Kazuyuki. Mathematical modelling of prostate cancer growth and its application to hormone therapy, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2010, vol. 368, issue 1930, pp. 5029–5044. <https://doi.org/10.1098/rsta.2010.0221>
8. Suzuki Taiji, Bruchofsky N., Aihara Kazuyuki. Piecewise affine systems modelling for optimizing hormone therapy of prostate cancer, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2010, vol. 368, issue 1930, pp. 5045–5059. <https://doi.org/10.1098/rsta.2010.0220>

9. Izhikevich E. M. Hybrid spiking models, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2010, vol. 368, issue 1930, pp. 5061–5070. <https://doi.org/10.1098/rsta.2010.0130>
10. Cao Hongjun, Ibarz Borja. Hybrid discrete-time neural networks, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2010, vol. 368, issue 1930, pp. 5071–5086. <https://doi.org/10.1098/rsta.2010.0171>
11. Proctor J., Kukillaya R. P., Holmes P. A phase-reduced neuro-mechanical model for insect locomotion: feed-forward stability and proprioceptive feedback, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2010, vol. 368, issue 1930, pp. 5087–5104. <https://doi.org/10.1098/rsta.2010.0134>
12. Filippov A. F. *Differential equations with discontinuous righthand sides*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-7793-9>
13. Chen Xiaoyan, Huang Lihong. A Filippov system describing the effect of prey refuge use on a ratio-dependent predator–prey model, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2015, vol. 428, issue 2, pp. 817–837. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.03.045>
14. Utkin V. I. *Skol'zyashchie rezhimy i ikh primeneniya v sistemakh s peremennoi strukturoi* (Sliding modes and their applications to the systems with variable structure), Moscow: Nauka, 1974.
15. Acary V., Brogliato B., Orlov Yu. V. Chattering-free digital sliding-mode control with state observer and disturbance rejection, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, vol. 57, issue 5, pp. 1087–1101. <https://doi.org/10.1109/tac.2011.2174676>
16. Rothe F. The periods of the Volterra–Lotka system, *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1985, vol. 1985, issue 355, pp. 129–138. <https://doi.org/10.1515/crll.1985.355.129>
17. Waldvogel J. The period in the Lotka–Volterra system is monotonic, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1986, vol. 114, issue 1, pp. 178–184. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(86\)90076-4](https://doi.org/10.1016/0022-247X(86)90076-4)
18. Hausrath A. R., Manasevich R. F. Periodic solutions of a periodically perturbed Lotka–Volterra equation using the Poincaré–Birkhoff theorem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1991, vol. 157, issue 1, pp. 1–9. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(91\)90132-J](https://doi.org/10.1016/0022-247X(91)90132-J)

Received 07.04.2023

Accepted 20.07.2023

Aleksandr Nikolaevich Kirillov, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences, ul. Pushkinskaya, 11, Petrozavodsk, 185910, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3356-1846>

E-mail: krliv1812@yandex.ru

Aleksandr Mikhailovich Sazonov, Candidate of Physics and Mathematics, Junior Researcher, Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences, ul. Pushkinskaya, 11, Petrozavodsk, 185910, Russia.

E-mail: sazon-tb@mail.ru

Citation: A. N. Kirillov, A. M. Sazonov. A hybrid model of population dynamics with refuge-regime: regularization and self-organization, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 3, pp. 467–482.