МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 3

УДК 517.9

© *М. В. Нещадим, А. П. Чупахин*

ЧАСТИЧНО-ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ КУБИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА[1]

В работе рассматривается проблема интегрирования переопределенной системы дифференциальных уравнений, соответствующей частично-инвариантному решению (фактор-модель $L_{3,1}$) кубического уравнения Шредингера.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, частично-инвариантное решение, переопределенные системы.

Нелинейное уравнение Шредингера [1] имеет многочисленные приложения в математической физике (нелинейная оптика, теория волн и другие). Особый интерес представляют многомерные решения уравнения Шредингера, поскольку оно в этом случае не интегрируется методом обратной задачи теории рассеяния [2].

Теоретико-групповые свойства уравнения

$$i\psi_t + \Delta\psi + |\psi|^2\psi = 0, \tag{1}$$

где $\Delta = {\partial_x}^2 + {\partial_y}^2 + {\partial_z}^2$ — оператор Лапласа, $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $|\psi| = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}$, изучались в работах [3–6]. Работа [7] посвящена описанию средствами группового анализа [8] всех подмоделей (фактор-уравнений) уравнения (1), отвечающих его трехмерным алгебрам симметрии. В частности, найдены универсальные инварианты и определен тип возможного теоретико-группового решения: инвариантное (9 существенно различных типов) или частично-инвариантное (18 существенно различных типов). Тем самым показано, что существует большое число точных решений уравнения (1), описывающих существенно многомерные физические структуры, перспективные для изучения.

Если ввести амплитуду u и фазу v равенством $\psi = ue^{iv}$, то (1) можно переписать в виде системы

$$\left\{\begin{array}{l} -u\dfrac{\partial v}{\partial t} + \Delta u - u|v|^2 + u^3 = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\Delta v + 2 < \nabla u, \nabla v >= 0, \end{array}\right. \tag{2}$$

где $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ — градиент.

Алгебра симметрии системы (2) порождается следующими операторами [3]:

$$\begin{array}{l} X_1 = \partial_t, \\ X_2 = \partial_x, \quad X_3 = \partial_y, \quad X_4 = \partial_z, \\ X_5 = z\partial_y - y\partial_z, \quad X_6 = x\partial_z - z\partial_z, \quad X_7 = y\partial_x - x\partial_y, \\ X_8 = 2t\partial_x + x\partial_v, \quad X_9 = 2t\partial_y + y\partial_v, \quad X_{10} = 2t\partial_z + z\partial_v, \\ X_{11} = \partial_v, \quad X_{12} = 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z - u\partial_u. \end{array}$$

Фактор-уравнения, соответствующие частично-инвариантным решениям, представляют собой активные (в смысле теории совместности [9, 10]) системы дифференциальных уравнений. Поэтому для этих систем в первую очередь стоит задача приведения в инволюцию, определения широты решения и, если возможно, построения общего решения.

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (проекты №06–01–00439, №08-01-00047), Интеграционным грантом СО РАН (проекты №48, 2.15 – 2006), Программой поддержки ведущих научных школ №НШ-2826.2008.1.

В настоящей работе рассматривается вопрос об интегрировании переопределенной системы

$$\frac{u_{zz}+u^3}{u}=v_t+v_x^2+v_y^2+v_z^2, \quad u_t+u\Delta v+2u_zv_z=0, \tag{3}$$

в которой $u=u(t,z)$, $v=v(t,x,y,z)$, соответствующей подалгебре

$$L_{3,1}=\text{алг}\left\langle X_8, X_9+aX_3, X_{11}\right\rangle,$$

где a — положительная константа. Система (3) отвечает частично-инвариантному решению ранга два и дефекта один [8]. Дополненная уравнениями $u_x=u_y=0$, она является переопределенной: четыре уравнения для двух функций. Если рассматривать только стационарные решения $u_t=v_t=0$, то (3) примет вид

$$v_x^2+v_y^2+v_z^2=h^2, \;\; v_{xx}+v_{yy}+v_{zz}=gv_z, \tag{4}$$

где введены обозначения $h^2(z)=\dfrac{u_{zz}+u^3}{u}$, $g(z)=-2\dfrac{u_z}{u}$.

Справедлива

Теорема 1. *Если функция v не зависит от переменной x, то общее решение системы* (4) *дается следующими формулами:*

$$v=\pm 2\sqrt{C_1}\left(y+\sqrt{C}\int\frac{dz}{u^2}\right)+v_0,$$
$$\int\frac{du^2}{\sqrt{-2u^6+C_1u^4+C_2u^2-CC_1}}=\pm z+C_3,$$

где C, C_1, C_2, C_3, v_0 — некоторые константы, $C, C_1>0$.

Замечание 1. Решение определяется эллиптическими функциями переменной z. Можно ожидать, что при определенных значениях параметров решение будет периодическим по этой координате.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$v_y=h\cos\varphi, \;\; v_z=h\sin\varphi, \tag{5}$$

где $\varphi=\varphi(y,z)$ — вспомогательная функция. Тогда первое из уравнений (4) выполняется тождественно. Условие совместности $v_{yz}=v_{zy}$ уравнения (5) приводит к соотношению

$$h'\cos\varphi-h\varphi_z\sin\varphi=h\varphi_y\cos\varphi.$$

Здесь и далее штрихом обозначается производная по переменной z. Если положить $H=h'/h$, то это равенство перепишется в виде

$$\varphi_y\cos\varphi+\varphi_z\sin\varphi=H\cos\varphi. \tag{6}$$

Подставляя представление (5) во второе уравнение системы (4), получим

$$\varphi_y\sin\varphi-\varphi_z\cos\varphi=(H-g)\sin\varphi. \tag{7}$$

Из (6), (7) найдем производные

$$\varphi_y=H-g\sin^2\varphi, \;\; \varphi_z=g\cos\varphi\sin\varphi. \tag{8}$$

Условие совместности $\varphi_{yz}=\varphi_{zy}$ уравнений (8) приводит к соотношению

$$\varphi_y\cos(2\varphi)+\varphi_z\sin(2\varphi)=\frac{H'-g'\sin^2\varphi}{g}.$$

В силу (8) оно преобразуется к виду

$$\sin^2(\varphi)(g^2+g^{'}-2gH)=H^{'}-gH. \tag{9}$$

Уравнение (9) является ключевым для решения системы (4). Правая часть (9) является функцией только от переменной z, в то время как левая часть может зависеть также от переменной y.

Пусть $g^2+g^{'}-2gH\neq 0$. Тогда из (9) получаем, что функция φ не зависит от переменной y. Из (8) следует

$$H=g\sin^2(\varphi),\quad \varphi^{'}=g\cos\varphi\sin\varphi.$$

Подставив сюда $H=h^{'}/h$, $h^2=\dfrac{u^{''}+u^3}{u}$, $g(z)=-2\dfrac{u^{'}}{u}$, получим

$$\frac{1}{2}\left(\frac{u^{''}+u^3}{u}\right)^{'}=-2\frac{u^{''}+u^3}{u}\cdot\frac{u^{'}}{u}\sin^2(\varphi),\quad \varphi^{'}=-2\frac{u^{'}}{u}\cos\varphi\sin\varphi. \tag{10}$$

Второе уравнение системы (10) интегрируется

$$\sin^2(\varphi)=\frac{C}{u^4+C}, \tag{10}$$

где C — неотрицательная константа. Тогда первое уравнение (10) принимает вид

$$\left(\ln\frac{u^{''}+u^3}{u}\right)^{'}=-4\frac{u^{'}}{u}\cdot\frac{C}{u^4+C} \tag{11}$$

и также может быть проинтегрировано:

$$\ln\frac{u^{''}+u^3}{u}+\ln\frac{C}{u^4+C}=C_1,$$

$$u^{''}=C_1u+\frac{CC_1}{u^3}-u^3,$$

$$u^{'2}=C_1u^2-\frac{CC_1}{u^2}-\frac{1}{2}u^4+C_2,$$

$$((u^2)^{'})^2=4C_1(u^4-C)-2u^6+4C_2u^2,$$

$$\int\frac{du^2}{\sqrt{-2u^6+C_1u^4+C_2u^2-CC_1}}=\pm z+C_3,$$

где C, C_1, C_2, C_3 — некоторые константы, $C,C_1>0$. Отсюда

$$h^2=\frac{u^{''}+u^3}{u}=\frac{4C_1(u^4+C)}{u^4}.$$

Функция v находится из системы (5)

$$v_y=h\cos\varphi=\pm2\sqrt{C_1},\quad v_z=h\sin\varphi=\pm2\frac{\sqrt{CC_1}}{u^2}$$

по формуле

$$v=\pm2\sqrt{C_1}\left(y+\sqrt{C}\int\frac{dz}{u^2}\right)+v_0$$

для некоторой константы v_0.

Пусть $g^2+g^{'}-2gH=0$. Тогда из (9)

$$H^{'}-gH=0.$$

Если $H \neq 0$, то $g = H^{'}/H$ и

$$\left(\frac{H^{'}}{H}\right)^2 + \left(\frac{H^{'}}{H}\right)^{'} - 2H^{'} = 0,$$

$$H^{''} = 2HH^{'},$$

$$H = g = \frac{1}{A-z},$$

где A — некоторая константа. Из соотношений $H = h^{'}/h$, $g = -2\dfrac{u^{'}}{u}$, получаем

$$h = \frac{B}{A-z}, \quad u = C\sqrt{z-A},$$

где B, C — константы. Подставив u, h в соотношение $h^2 = \dfrac{u^{''}+u^3}{u}$, получим равенство

$$\frac{B^2}{(A-z)^2} = C^2(z-A)^2 - \frac{1}{4(A-z)^2},$$

которое невозможно ни при каких A, B, C.

Пусть $H = 0$, то есть h — константа. Тогда $g^{'} = g^2$ и $g = \dfrac{1}{A-z}$ для некоторой константы A. Для функции u имеем систему

$$\frac{u^{'}}{u} = -\frac{1}{2}g = \frac{1}{2(A-z)}, \quad \frac{u^{''}+u^3}{u} = h^2.$$

Из первого соотношения получаем $u = \dfrac{B}{\sqrt{z-A}}$, B — константа. Тогда из второго соотношения получаем равенство

$$\frac{B^2}{z-A} + \frac{3}{4(z-A)^2} = h^2,$$

которое невозможно ни при каких A, B, h.

Теорема доказана. □

Замечание 2. Система (4) допускает преобразования — повороты в плоскости OXY, поэтому от решения $v(y,z)$ можно перейти к решению $v(ax+by,z)$, где a, b — константы такие, что $a^2+b^2=1$.

Лемма 1. *Общее решение системы*

$$h^2 = \frac{u^3+u^{''}}{u}, \quad g = -2\frac{u^{'}}{u},$$

где u, g, h — функции от переменной z, дается следующими формулами:

$$u = Ae^{\varphi/2}, \quad h^2 = A^2e^{\varphi} + \frac{1}{4}{\varphi^{'}}^2 + \frac{\varphi^{''}}{2}, \quad g = -\varphi^{'},$$

где φ — некоторая функции от переменной z.

Доказательство. Подставим $u^{'} = -\dfrac{1}{2}ug$ в первое соотношение

$$h^2 = u^2 - \frac{1}{2}g^{'} - \frac{gu^{'}}{2u}$$

или

$$h^2 = u^2 - \frac{g^2}{4} - \frac{g^{'}}{2}.$$

Далее соотношение $ug = -2u^{'}$ перепишем в виде $u^2 g + (u^2)^{'} = 0$. Отсюда

$$g = -\varphi^{'}, \ \ u = Ae^{\varphi/2},$$

для некоторой функции $\varphi = \varphi(z)$. Значит:

$$h^2 = A^2 e^{\varphi} + \frac{1}{4}\varphi^{'2} + \frac{\varphi^{''}}{2}.$$

Лемма доказана. □

Теорема 2. *Решение $v = v(x, y, z)$ системы (4) линейно по переменным x, y, z тогда и только тогда, когда функция h не зависит от переменной z, то есть постоянна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если функция $v = v(x, y, z)$ линейна по переменным x, y, z, то из первого соотношения (4) следует, что h — константа.

Пусть h — константа. Выразим производную v_z из первого уравнения (4)

$$v_z = \sqrt{h^2 - v_x^2 - v_y^2} \tag{12}$$

и подставим во второе уравнение, которое разрешим относительно производной v_{yy} :

$$v_{yy} = \frac{1}{h^2 - v_x^2}\left(g(h^2 - v_x^2 - v_y^2)^{3/2} - v_{xx}(h^2 - v_y^2) - 2v_x v_y v_{xy}\right). \tag{13}$$

Составим условие совместности $v_{zyy} - v_{yyz} = 0$ для системы (12)–(13) и упростим его в силу самой системы. Получим соотношение

$$\begin{gathered} 2h^2(v_x^2 - h^2)v_{xy}^2 - 4h^2 v_x v_y v_{xy} v_{xx} + 2h^2(v_y^2 - h^2)v_{xx}^2 + \\ +2gh^2(h^2 - v_x^2 - v_y^2)^{3/2} v_{xx} + (g^{'} + g^2)(v_x^2 - h^2)(h^2 - v_x^2 - v_y^2)^2 = 0, \end{gathered} \tag{14}$$

которое представляет собой квадратичную форму относительно производных второго порядка v_{xx}, v_{xy}.

Инварианты квадратичной формы (14) имеют вид

$$\begin{aligned} &I_1 = -2h^2(2h^2 - v_x^2 - v_y^2), \\ &I_2 = 4h^6(h^2 - v_x^2 - v_y^2), \\ &I_3 = -2h^6(h^2 - v_x^2)(h^2 - v_x^2 - v_y^2)^3(2g^{'} + g^2). \end{aligned}$$

Так как $I_2 > 0$, то (14) имеет эллиптический тип. Для того чтобы множество решений (14) было непустым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$I_1 I_3 \leqslant 0, \quad \text{то есть} \quad 2g^{'} + g^2 \leqslant 0.$$

Приведем (14) к каноническому виду ортогональным преобразованием и параметризуем соответствующий эллипс введением полярной системы координат. Получим представление для производных

$$\begin{aligned} v_{xx} \ \ = \ \ &\frac{hv_y \cos Q - v_x \sin Q}{2h^2(v_x^2 + v_y^2)^{1/2}}(h^2 - v_x^2)^{1/2}(h^2 - v_x^2 - v_y^2)^{1/2}(-2g^{'} - g^2)^{1/2} + \\ &+\frac{1}{2h^2}(h^2 - v_x^2)(h^2 - v_x^2 - v_y^2)^{1/2}, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} v_{xy} &= -\frac{hv_x\cos Q + v_y\sin Q}{2h^2(v_x^2+v_y^2)^{1/2}}(h^2-v_x^2)^{1/2}(h^2-v_x^2-v_y^2)^{1/2}(-2g^{'}-g^2)^{1/2}- \\ &-\frac{1}{2h^2}gv_xv_y(h^2-v_x^2-v_y^2)^{1/2}. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $Q = Q(x, y, z)$ — вспомогательная функция-угол в полярной системе координат.

Подставляя (15), (16) в (13), получим

$$\begin{aligned} v_{yy} &= \frac{-hv_y\cos Q + (h^2+v_y^2)v_x\sin Q}{2h^2(v_x^2+v_y^2)^{1/2}(h^2-v_x^2)^{1/2}}(h^2-v_x^2-v_y^2)^{3/2}(-2g^{'}-g^2)^{1/2}+ \\ &+\frac{g}{2h^2}(h^2-v_y^2)(h^2-v_x^2-v_y^2)^{1/2}. \end{aligned} \tag{17}$$

Составим условия совместности $v_{xyx} - v_{xxy} = 0$ и $v_{xyy} - v_{yyx} = 0$. В силу системы (15)–(17) эти соотношения приводятся к виду

$$B_{11}Q_x + B_{12}Q_y + B_1 = 0,\ \ B_{21}Q_x + B_{22}Q_y + B_2 = 0,$$

где коэффициенты B_i, B_{ij} — функции от v_x, v_y, Q. Их явный вид мы здесь не приводим ввиду их громоздкости. Отсюда находим производные

$$\begin{aligned} Q_x &= -\frac{(-2g^{'}-g^2)^{1/2}(h^2-v_x^2+v_y^2)}{2(h^2-v_x^2)^{1/2}(v_x^2+v_y^2)^{1/2}}\cos Q+ \\ &+\frac{v_xv_y(h^2-v_x^2-v_y^2)^{1/2}}{2h(h^2-v_x^2)^{1/2}(v_x^2+v_y^2)^{1/2}}\sin Q- \\ &-\frac{gv_y(h^4+h^2v_y^2-v_x^2v_y^2-v_x^4)}{2h(h^2-v_x^2)(v_x^2+v_y^2)}, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} Q_y &= \frac{v_xv_y(h^2-v_x^2-v_y^2)^{1/2}}{(h^2-v_x^2)^{1/2}(v_x^2+v_y^2)^{1/2}}\cos Q+ \\ &+\frac{(h^2+v_y^2)(-2g^{'}-g^2)^{1/2}(h^2-v_x^2-v_y^2)^{1/2}}{2h(h^2-v_x^2)^{1/2}(v_x^2+v_y^2)^{1/2}}\sin Q+ \\ &+\frac{gv_x(h^4-h^2v_x^2+v_x^2v_y^2+v_y^4)}{2h(h^2-v_x^2)(v_x^2+v_y^2)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Условие совместности $Q_{xy} - Q_{yx} = 0$ системы (18)–(19) в силу (15)–(19) приводится к виду

$$\frac{1}{h}(h^2-v_x^2-v_y^2)(g^{'}+g^2) = 0.$$

Поскольку $h^2 - v_x^2 - v_y^2 > 0$, то из этого равенства следует, что

$$g^{'} + g^2 = 0. \tag{20}$$

Отсюда либо $g = 0$, либо $g = \dfrac{1}{z+C_1}$, $C_1 = const$. Если $g = \dfrac{1}{z+C_1}$, то в силу леммы $\varphi^{'} = -\dfrac{1}{z+C_1}$, то есть $\varphi = C_2 - \ln|z + C_1|$, $C_2 = const$. Но тогда

$$h^2 = A^2e^{\varphi} + \frac{1}{4}\varphi^{'2} + \frac{\varphi^{''}}{2} = \frac{A^2e^{C_2}}{z+C_1} + \frac{1}{4(z+C_1)^2} + \frac{1}{2(z+C_1)^2}$$

не может быть константой. Следовательно, $g = 0$, $\varphi = const$ и $u = const$. В силу (15)–(17) $v_{xx} = v_{xy} = v_{yy} = 0$. Из второго соотношения (4) $v_{zz} = 0$. Значит:

$$v = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_{13} xz + a_{23} yz$$

для некоторых постоянных $a_0, \dots, a_{23}$. Из первого соотношения (4) получаем $a_{13} = a_{23} = 0$. Итак, функция

$$v = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z$$

линейна по переменным x, y, z.

Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1992. — 661 с.
2. Теория солитонов: метод обратной задачи / Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. Н. — М.: Наука, 1980. — 319 с.
3. Gagnon L., Winternitz P., Lie symmetries of f generalised non-linear Shrodinger equation: I. The symmetry group and its subgroups // J. Phys. A. — 1988. — Vol. 21. — P. 1493–1511.
4. Gagnon L., Winternitz P., Lie symmetries of f generalised non-linear Shrodinger equation: I. Exact solutions // J. Phys. A. — 1988. — Vol. 22. — P. 469–497.
5. Gagnon L., Winternitz P., Exact solutions of the cubic and quintic non-linear Shrodinger equation for a cylindrical geometry // Phys. Rev A. — 1989. — Vol. 39. — P. 296–306.
6. Фущич А. П., Штелень В. М., Серов Н. В. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Наук. думка, 1989. — 335 с.
7. Измайлова К. К., Чупахин А. П., Теоретико-групповые решения кубического уравнения Шредингера, порожденные алгебрами симметрии размерности 3 в двух постоянных полях // Нелинейная динамика. — 2007. — Т. 3, № 3. — Р. 296–306.
8. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.
9. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. — М.: Гостехиздат, 1948. — 432 с.
10. Поммаре Ж. Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. — М.: Мир, 1983. — 400 с.

Поступила в редакцию 20.10.08

M. V. Neshchadim, A. P. Chupakhin

Partial invariant solutions of the cubic Schrödinger equation

In this paper we consider a question of integration of the over determined system of partial differential equations which correspond to the partial invariant solution (factor system $L_{3,1}$) of the cubic Schrödinger equation.

Keywords: Schrödinger equation, partial invariant solution, over determined systems.

Mathematical Subject Classifications: 35Q55, 35C05, 58J70

Нещадим Михаил Владимирович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Институт математики СО РАН им. С.Л. Соболева, 630090, Новосибирск, пр. Коптюга 4, E-mail: neshch@math.nsc.ru

Чупахин Александр Павлович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Институт гидродинамики СО РАН им. М.А. Лаврентьева, 630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева 15, E-mail: chupakhin@hydro.nsc.ru