МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 3

УДК 517.929

© *Е. И. Бравый*

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ[1]

Получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости периодической краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения с монотонными операторами.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, краевые задачи, периодическая задача, функция Грина.

Введение

Условиям разрешимости периодической краевой задачи для различных видов функционально-дифференциальных уравнений за последние годы было посвящено значительное число работ [1–12]. В частности, для функционально-дифференциальных уравнений первого [1, 3], второго [5], третьего [11] порядков получены неулучшаемые условия однозначной разрешимости. Для уравнения n-го порядка на основе результата работы [7] были получены условия разрешимости в терминах максимумов некоторых многочленов. Для этих максимумов при дополнительных предположениях, доказанных только при $n \leqslant 7$, справедливы рекуррентные соотношения. Оптимальность полученных условий была доказана также только для $n \leqslant 7$.

В данной работе для уравнений произвольного порядка n получены оптимальные условия разрешимости периодической задачи в терминах функции Грина вспомогательной краевой задачи и доказано рекуррентное соотношение для констант, определяющих условия разрешимости. Отметим, что для широкого класса резонансных краевых задач, который включает в себя периодические задачи, задачу Неймана для уравнения второго порядка и многие другие задачи, справедливы аналогичные необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости [13].

Используются следующие обозначения:

$\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$; $\mathbf{C}$ — пространство непрерывных функций $x : [0,\omega] \to \mathbf{R}$, $\omega > 0$, с нормой $\| x\|_{\mathbf{C}} = \max\limits_{t\in[0,\omega]} |x(t)|$; $\mathbf{L}$ — пространство суммируемых функций $z : [0,\omega] \to \mathbf{R}$ с нормой $\| z\|_{\mathbf{L}} = \int_0^\omega |z(t)|\, dt$; $\mathbf{W}^n$, $n \geqslant 1$ — пространство функций $x : [0,\omega] \to \mathbf{R}$ с абсолютно непрерывной $(n-1)$-й производной, $\| x\|_{\mathbf{W}^n} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} |x^{(i)}(0)| + \int_0^\omega |x^{(n)}(t)|\, dt$. Все равенства и неравенства с функциями из $\mathbf{L}$ понимаются как равенства и неравенства почти всюду на $[0,\omega]$.

Линейный оператор $T : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ называют *положительным*, если T отображает каждую неотрицательную функцию из $\mathbf{C}$ в почти всюду неотрицательную. Норма положительного оператора T определяется равенством $\| T\| = \| T\|_{\mathbf{C}\to\mathbf{L}} = \int_0^\omega (T1)(s)\, ds$.

Рассмотрим уравнение с отклоняющимся аргументом

$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{k} p_i(t)x(g_i(t)) + f(t), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{0.1}$$

где p_i, $i = 1,\ldots,k$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — ω-периодические локально суммируемые функции, $g_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $i = 1,\ldots,k$ — ω-периодические измеримые функции. Задача о нахождении

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 06–01–00744 и 07–01–96060).

ω-периодических решений уравнения (0.1) эквивалентна периодической краевой задаче на отрезке $[0,\omega]$:

$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{k} p_i(t)x(h_i(t)) + f(t), \quad t \in [0,\omega], \tag{0.2}$$

$$x^{(i-1)}(0) = x^{(i-1)}(\omega), \quad i = 1,\dots,n, \tag{0.3}$$

где $h_i(t) = g_i(t) - m_i(t)\omega$ при некоторых таких целых числах $m_i(t)$, $i = 1,\dots,k$, что $h_i(t) \in [0,\omega]$ при всех $t \in [0,\omega]$.

Действительно, если x является ω-периодическим решением (0.1), то сужение x на $[0,\omega]$ будет решением задачи (0.2), (0.3). Обратно, решение задачи (0.2), (0.3), периодически продолженное на $\mathbf{R}$, является периодическим решением уравнения (0.1).

Уравнение (0.2) можно представить в операторном виде

$$x^{(n)}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t) + f(t), \quad t \in [0,\omega],$$

где $(T^+x)(t) = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i^+(t)x(h_i(t))$, $(T^-x)(t) = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i^-(t)x(h_i(t))$, $t \in [0,\omega]$,

$$p^+(t) = (p(t) + |p(t)|)/2, \quad p^-(t) = (-p(t) + |p(t)|)/2, \tag{0.4}$$

$T^{+/-}$ [1] — линейные положительные операторы, действующие из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{L}$.

§ 1. Основной результат

Рассматривается периодическая краевая задача

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = (T^+x) - (T^-x)(t) + f(t), \quad t \in [0,\omega], \\ x^{(i-1)}(0) - x^{(i-1)}(\omega) = \alpha_i, \quad i = 1,\dots,n, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $n \geqslant 2$, линейные операторы $T^+, T^- : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$ положительны, $f \in \mathbf{L}$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $i = 1,\dots,n$.

Краевая задача (1.1) называется *однозначно разрешимой*, если при любой функции $f \in \mathbf{L}$ и любых числах $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $i = 1,\dots,n$ задача имеет единственное решение $x \in \mathbf{W}^n$. В этом случае решение полуоднородной задачи ($\alpha_i = 0$, $i = 1,\dots,n$) имеет интегральное представление, ядро которого называется *функцией Грина* [14].

Известно, что задача (1.1) является *фредгольмовой* [14], поэтому задача однозначно разрешима тогда и только тогда, когда однородная задача

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = (T^+x) - (T^-x)(t), \quad t \in [0,\omega], \\ x^{(i-1)}(0) - x^{(i-1)}(\omega) = 0, \quad i = 1,\dots,n \end{cases} \tag{1.2}$$

имеет только тривиальное решение $x = 0$. Цель статьи — получить необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости периодической задачи для семейства уравнений (1.1) с заданными нормами операторов T^+ и T^-.

Следующая лемма дает представление решений периодических задач.

Лемма 1. *Задача*

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = f(t), \quad t \in [0,\omega], \\ x^{(i-1)}(0) - x^{(i-1)}(\omega) = 0, \quad i = 1,\dots,n \end{cases} \tag{1.3}$$

[1] Здесь и далее « $+/-$ » означает, что имеется два утверждения: первое для знака « $+$ », второе для знака « $-$ ».

имеет решение тогда и только тогда, когда $\int_0^\omega f(s)\,ds = 0$. *В этом случае любое решение имеет представление* $x(t) = x(0) + y(t)$, $t \in [0,\omega]$, *где* $y(t) = \int_0^\omega G_n(t,s) f(s)\,ds$, $G_n(t,s)$ — *функция Грина задачи*

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = f(t), \quad t \in [0,\omega], \\ x(0) = 0, \quad x(\omega) = 0, \quad x^{(i)}(0) - x^{(i)}(\omega) = 0, \quad i = 1,\ldots,n-2. \end{cases} \tag{1.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что задача (1.4) однозначно разрешима, так как однородная задача имеет только тривиальное решение.

Если x — решение задачи (1.3), то

$$\int_0^\omega f(s)\,ds = \int_0^\omega x^{(n)}\,ds = x^{(n-1)}(\omega) - x^{(n-1)}(0) = 0. \tag{1.5}$$

Пусть теперь $\int_0^\omega f(s)\,ds = 0$. Тогда, если x — решение задачи (1.3), то $y = x - x(0)$ является единственным решением (1.4). Если y — решение задачи (1.4), то $x = y + \alpha$ является решением (1.3) при любой постоянной $\alpha \in \mathbf{R}$. При этом $x(0) = \alpha$. Таким образом, решения задачи (1.3) существуют и удовлетворяют равенству $x(t) = x(0) + y(t)$, $t \in [0,\omega]$. $\square$

Функция Грина $G_n(t,s)$ при $s \in (0,\omega)$ имеет представление (см. [14])

$$G_n(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum\limits_{j=1}^{n-1} P_j(t)(\omega - s)^j, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \omega, \\ \sum\limits_{j=1}^{n-1} P_j(t)(\omega - s)^j, \quad 0 \leqslant t < s \leqslant \omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

при некоторых таких многочленах P_j, $j = 1,\ldots,n-1$ степени не более чем $n-1$, что при каждом $s \in [0,\omega]$ функция $g(\cdot) = G_n(\cdot,s)$ удовлетворяет краевым условиям задачи (1.4).

Определим величины

$$M_{n,t_1,t_2} = \max_{s\in[0,\omega]} (G_n(t_1,s) - G_n(t_2,s)), \quad m_{n,t_1,t_2} = \min_{s\in[0,\omega]} (G_n(t_1,s) - G_n(t_2,s)),$$
$$\mathcal{M}_n = \max_{t_1,t_2\in[0,\omega]} (M_{n,t_1,t_2} - m_{n,t_1,t_2}). \tag{1.7}$$

Теперь мы можем сформулировать основной результат.

Теорема 1. *Пусть заданы неотрицательные числа* $\mathcal{T}^+ \neq \mathcal{T}^-$. *Тогда краевая задача* (1.1) *однозначно разрешима при всех таких положительных операторах* $T^{+/-} : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, *что* $\| T^{+/-} \| = \mathcal{T}^{+/-}$, *тогда и только тогда, когда выполнены неравенства*

$$\frac{Y}{1-Y} \leqslant X \leqslant 2(1 + \sqrt{1-Y}), \tag{1.8}$$

где $X = \mathcal{M}_n \max(\mathcal{T}^+, \mathcal{T}^-)$, $Y = \mathcal{M}_n \min(\mathcal{T}^+, \mathcal{T}^-)$, *константа* $\mathcal{M}_n$ *определена равенством* (1.7).

Замечание 1. Для $n = 2$ условие (1.8) и соответствующая константа $\mathcal{M}_n$ получены в работе [5], для $n = 3$ — в работах [9, 11]. При $n = 1$ неравенства в оптимальных условиях разрешимости (1.8) меняются на строгие, $\mathcal{M}_1 = 1$ [1, 2, 3].

Замечание 2. Если неравенство (1.8) выполнено при некоторых X, Y, то $Y \leqslant \dfrac{3}{4}$.

Замечание 3. Если $\mathcal{T}^+ = \mathcal{T}^-$, то найдутся такие положительные операторы $T^{+/-} : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, $\| T^{+/-} \| = \mathcal{T}^{+/-}$, что задача (1.1) не является однозначно разрешимой.

Замечание 4. В условиях теоремы 1 при $T^- = 0$ ($T^+ = 0$) задача (1.1) однозначно разрешима при всех положительных операторах T^+ (T^-) с нормой $\mathcal{T}^+$ ($\mathcal{T}^-$) тогда и только тогда, когда

$$0 < \mathcal{T}^+ \leqslant \frac{4}{\mathcal{M}_n} \quad \Big(0 < \mathcal{T}^- \leqslant \frac{4}{\mathcal{M}_n}\Big).$$

Теорема 2. *Для задачи* (1.1) *константы* $\mathcal{M}_n$ *определены равенствами*

$$\mathcal{M}_{2m} = (-1)^m G_{2m}\big(\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}\big), \quad \mathcal{M}_{2m+1} = (-1)^m 2\, G_{2m+1}\big(\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{4}\big), \tag{1.9}$$

$m \geqslant 1$, *где* $G_n(t,s)$ — *функция Грина задачи* (1.4). *Для величин* $\mathcal{N}_n \equiv \mathcal{M}_n/\omega^{n-1}$, $n \geqslant 2$, *справедливы рекуррентные соотношения* ($m \geqslant 1$, $\mathcal{N}_1 = 1$)

$$\mathcal{N}_{2m+1} = -\sum_{j=1}^{m} \frac{(-1)^j \mathcal{N}_{2(m-j)+1}}{16^j (2j)!}, \quad \mathcal{N}_{2m} = -8\sum_{j=1}^{m} \frac{(-1)^j j \mathcal{N}_{2(m-j)+1}}{16^j (2j)!}. \tag{1.10}$$

Замечание 5. В работе [7] соотношения (1.10) для констант, входящих в условия разрешимости периодической задачи (1.1), были доказаны для $n \leqslant 7$ и высказывалась гипотеза о справедливости соотношений для произвольного n.

Имеем $\mathcal{N}_2 = 1/4$, $\mathcal{N}_3 = 1/32$, $\mathcal{N}_3 = 1/192$, $\mathcal{N}_3 = 5/6144$ и так далее. Без доказательства упомянем здесь, что элементы $\mathcal{N}_n$ могут быть представлены с помощью чисел Бернулли и Эйлера:

$$\mathcal{N}_n = \begin{cases} (-1)^m \dfrac{E_{n-1}}{4^{n-1}\,(n-1)!}, & n = 2m+1, \\ (-1)^{m+1} 4(1 - \dfrac{1}{2^n}) B_n, & n = 2m, \end{cases}$$

где B_n — числа Бернулли, E_n — числа Эйлера; последовательность $\{(2\pi)^{2m}\mathcal{N}_{2m}\}$, $m \geqslant 1$ монотонно убывает; $\{(2\pi)^{2m+1}\mathcal{N}_{2m+1}\}$, $m \geqslant 1$ монотонно возрастает, $\lim\limits_{n\to\infty} (2\pi)^n \mathcal{N}_n = 8$;

$$8\, n\, \mathcal{N}_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{N}_k \mathcal{N}_{n+1-k}, \quad n \geqslant 2, \quad \mathcal{N}_1 = 1.$$

Замечание 6. Работа А. В. Комленко и Е. Л. Тонкова [15] является одной из первых, где неулучшаемые условия разрешимости задачи о мультипликаторе для линейного периодического функционально-дифференциального уравнения n-го порядка выражены с помощью чисел Бернулли-Эйлера. Отметим, что для задачи (1.1) утверждения статьи [15] не могут быть применены.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений различные неулучшаемые условия однозначной разрешимости периодической задачи были получены, например, в работах [16, 17, 18], причем результаты работы А. Лясоты и З. Опяля [16] послужили основой для многих дальнейших обобщений, в частности, [1–12, 17].

§ 2. Вспомогательные утверждения

Лемма 2. *Пусть заданы неотрицательные функции* $p^+, p^- \in \mathbf{L}$. *Тогда задача* (1.1) *однозначно разрешима при всех таких положительных операторах* $T^{+/-} : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, *что* $T^{+/-}1 = p^{+/-}$, *тогда и только тогда, когда все задачи*

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = p_1(t)x(\tau_1) + p_2(t)x(\tau_2), & t \in [0,\omega], \\ x^{(i-1)}(0) = x^{(i-1)}(\omega), & i = 1,\dots,n \end{cases} \tag{2.1}$$

имеют только тривиальное решение при любых $\tau_1, \tau_2 \in [0,\omega]$, *и любых таких функциях* $p_1, p_2 \in \mathbf{L}$, *что*

$$-p^- \leqslant p_1, p_2 \leqslant p^+, \quad p_1 + p_2 = p^+ - p^-. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что задача (1.1) не является однозначно разрешимой, следовательно, так как задача фредгольмова, то задача (1.2) имеет нетривиальное решение y. Обозначим

$$M = y(\tau_1) = \max_{t\in[0,\omega]} y(t), \quad m = y(\tau_2) = \min_{t\in[0,\omega]} y(t).$$

Тогда

$$(T^+y)(t) - (T^-y)(t) \leqslant M(T^+1)(t) - m(T^-1)(t), \quad t \in [0,\omega],$$

$$(T^+y)(t) - (T^-y)(t) \geqslant m(T^+1)(t) - M(T^-1)(t), \quad t \in [0,\omega],$$

поэтому

$$T^+y - T^-y = m(T^+1 - \xi(T^+1 + T^-1)) + M(-T^-1 + \xi(T^+1 + T^-1)),$$

где функция ξ измерима и $\xi(t) \in [0,1]$ при всех $t \in [0,\omega]$. Таким образом,

$$(T^+y)(t) - (T^-y)(t) = y(\tau_2)p_2(t) + y(\tau_1)p_1(t), \quad t \in [0,\omega],$$

где

$$p_1 = T^+1 - \xi(T^-1 + T^+1), \quad p_2 = \xi(T^-1 + T^+1) - T^-1, \quad t \in [0,\omega],$$

и функции $p_1, p_2 \in \mathbf{L}$ удовлетворяют условиям

$$-T^-1 \leqslant p_1, p_2 \leqslant T^+1, \quad p_1 + p_2 = T^+1 - T^-1.$$

Следовательно, соответствующая задача (2.1) имеет некоторое нетривиальное решение. Поэтому, если каждая из задач (2.1) не имеет нетривиальных решений, то и ни одна из задач (1.2) не имеет нетривиальных решений при $T^{+/-}1 = p^{+/-}$. Следовательно, в этом случае все задачи (1.1) однозначно разрешимы.

Пусть теперь задача (1.1) однозначно разрешима при любых таких положительных операторах $T^{+/-}$ что $T^{+/-}1 = p^{+/-}$. Пусть $p_1 \in \mathbf{L}$, $-p^- \leqslant p_1 \leqslant p^+$, $\tau_1, \tau_2 \in [0,\omega]$. Покажем, что задача

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = p_1(t)x(\tau_1) + p_2(t)x(\tau_2) + f(t), \quad t \in [0,\omega], \\ x^{(i-1)}(0) - x^{(i-1)}(\omega) = \alpha_i, \quad i = 1,\dots,n, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $p_2 = p^+ - p^- - p_1$, также является однозначно разрешимой. Тогда и однородная задача (2.1) будет иметь только тривиальное решение.

Задача (2.3) относится к классу задач (1.1) при

$$T^+x = p_1^+x(\tau_1) + (p^+ - p_1^+)x(\tau_2), \quad T^-x = p_1^-x(\tau_1) + (p^- - p_1^-)x(\tau_2),$$

где p_1^+, p_1^- — положительная и отрицательная части функции p_1 ($p_1^+ = (|p_1| + p_1)/2$, $p_1^- = (|p_1| - p_1)/2$). Действительно, так как $0 \leqslant p_1^+ \leqslant p^+$ и $0 \leqslant p_1^- \leqslant p^-$, то операторы T^+, T^- положительны. Кроме того, $T^{+/-}1 = p^{+/-}$ и

$$T^+x - T^-x = p_1^+x(\tau_1) + (p^+ - p_1^+)x(\tau_2) \text{ при всех } x \in \mathbf{C}.$$

Таким образом, задача (2.3) однозначно разрешима. □

Лемма 3. *Пусть заданы неотрицательные числа* $\mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}^-$. *Тогда задача* (1.1) *однозначно разрешима при всех таких положительных операторах* $T^{+/-} : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, *что* $\| T^{+/-} \| = \mathcal{T}^{+/-}$, *тогда и только тогда, когда все задачи* (2.1) *имеют только тривиальное решение при любых* $\tau_1, \tau_2 \in [0, \omega]$, *и любых таких функциях* $p_1, p_2 \in \mathbf{L}$, *что выполнены условия* (2.2) *при любых таких функциях* $p^{+/-} \in \mathbf{L}$, *что*

$$\| p^{+/-} \| = \mathcal{T}^{+/-}, \quad p^{+/-} \geqslant 0. \tag{2.4}$$

Доказательство. Утверждение следует из леммы 2. □

Используя лемму 3, получим условия разрешимости задачи (1.1), справедливые для всех положительных операторов $T^{+/-}$ с заданными нормами. Для этого получим условия отсутствия нетривиальных решений задачи (2.1).

Пусть $G_n(t,s)$ — по-прежнему функция Грина однозначно разрешимой задачи (1.4).

Лемма 4. *Задача* (2.1) *имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда нетривиальное решение имеет система уравнений*

$$\begin{cases} \int_0^\omega p_1(s)\,ds\,x(\tau_1) + \int_0^\omega p_2(s)\,ds\,x(\tau_2) = 0, \\ x(t) = x(0) + \int_0^\omega G_n(t,s)(p_1(s)x(\tau_1) + p_2(s)x(\tau_2))\,ds, \quad t \in [0,\omega]. \end{cases} \tag{2.5}$$

Доказательство. По лемме 1 функция x удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} x^{(n)} = f, \\ x^{(i-1)}(0) - x^{(i-1)}(\omega) = 0, \quad i = 1, \dots n \end{cases}$$

только тогда, когда

$$\int_0^\omega f(s)\,ds = 0, \quad x(t) = x(0) + \int_0^\omega G_n(t,s)f(s)\,ds, \quad t \in [0,\omega].$$

Отсюда непосредственно следует утверждение леммы. □

Лемма 5. *При любых* $t_1, t_2 \in [0,\omega]$, $t_1 \neq t_2$, *не существует двух таких различных значений, каждое из которых функция* $G_n(t_1,s) - G_n(t_2,s)$, $s \in [0,\omega]$, *принимает на множестве ненулевой меры.*

Доказательство. Из представления функции Грина (1.6) следует, что в условиях утверждения при каждых фиксированных $0 < t_1 < t_2 < \omega$ (случай $t_1 > t_2$ рассматривается аналогично) имеем

$$G_n(t_1,s) - G_n(t_2,s) = \begin{cases} P(s) + \frac{(t_1-s)^{n-1} - (t_2-s)^{n-1}}{(n-1)!}, & s \in [0,t_1], \\ P(s) - \frac{(t_2-s)^{n-1}}{(n-1)!}, & s \in [t_1,t_2], \\ P(s), & s \in [t_2,\omega], \end{cases}$$

где $P(s)$ — некоторый многочлен. Следовательно, на каждом из отрезков $[0,t_1]$, $[t_1,t_2]$, $[t_2,\omega]$ функция является многочленом. Если на одном из этих отрезков функция принимает некоторое значение на множестве ненулевой меры, то на этом отрезке функция постоянна. Тогда на остальных двух отрезках каждое из значений принимает на множестве нулевой меры. Аналогично рассматривается случай, когда только одна из точек t_1, t_2 лежит в $(0,\omega)$. Если же $t_1 = 0$, $t_2 = \omega$, то $G_n(t_1,s) - G_n(t_2,s) \equiv 0$. □

§ 3. Доказательство теоремы 1

Воспользуемся леммами 3 и 4. Пусть $\mathcal{T}^+ > \mathcal{T}^-$ (случай $\mathcal{T}^+ < \mathcal{T}^-$ рассматривается аналогично). Тогда задача (2.5) имеет только тривиальное решение при всех p_1, p_2, удовлетворяющих условиям (2.2), (2.4), тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- + \int_0^\omega G_{\tau_1,\tau_2}(s)\left((p^+(s) - p^-(s))\int_0^\omega p_1(\tau)\,d\tau - \right.$$
$$\left. - p_1(s)\int_0^\omega (p^+(\tau) - p^-(\tau))\,d\tau\right) ds > 0 \quad (3.1)$$

при всех

$$p^{+/-} \in \mathbf{L}, \quad \| p^{+/-} \| = \mathcal{T}^{+/-}, \quad p_1 \in \mathbf{L}, \quad -p^- \leqslant p_1 \leqslant p^+, \quad \tau_1, \tau_2 \in [0, \omega], \qquad (3.2)$$

где $G_{\tau_1,\tau_2}(s) = G_n(\tau_1, s) - G_n(\tau_2, s)$.

Достаточно проверить неравенство (3.1) для функций p_1 вида

$$p_1(s) = \begin{cases} p^+(s), & s \in E^+, \\ -p^-(s), & s \in E^- \equiv [0,\omega]\backslash E^+ \end{cases} \qquad (3.3)$$

при всех измеримых множествах $E^+ \subset [0, \omega]$.

Обозначим $\mathcal{T}^+_{+/-} = \int_{E^{+/-}} p^+(s)\,ds$, $\mathcal{T}^-_{+/-} = \int_{E^{+/-}} p^-(s)\,ds$. Тогда (3.1) эквивалентно неравенству

$$\mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- - (\mathcal{T}^+_+ - \mathcal{T}^-_-)\left(\int_{E^-} G_{\tau_1,\tau_2}(s)p^+(s)\,ds - \int_{E^+} G_{\tau_1,\tau_2}(s)p^-(s)\,ds\right) +$$
$$+ (\mathcal{T}^+_- - \mathcal{T}^-_+)\left(\int_{E^-} G_{\tau_1,\tau_2}(s)p^-(s)\,ds - \int_{E^+} G_{\tau_1,\tau_2}(s)p^+(s)\,ds\right) \equiv \mathcal{F} > 0.$$

Рассмотрим три случая: а) $\mathcal{T}^+_+ - \mathcal{T}^-_- \geqslant 0$, $\mathcal{T}^+_- - \mathcal{T}^-_+ \geqslant 0$; б) $\mathcal{T}^+_+ - \mathcal{T}^-_- \geqslant 0$, $\mathcal{T}^+_- - \mathcal{T}^-_+ \leqslant 0$; в) $\mathcal{T}^+_+ - \mathcal{T}^-_- \leqslant 0$, $\mathcal{T}^+_- - \mathcal{T}^-_+ \geqslant 0$. Случай $\mathcal{T}^+_+ - \mathcal{T}^-_- \leqslant 0$, $\mathcal{T}^+_- - \mathcal{T}^-_+ \leqslant 0$ невозможен так как $\mathcal{T}^+_+ - \mathcal{T}^-_- + \mathcal{T}^+_- - \mathcal{T}^-_+ = \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- > 0$.

Для краткости обозначим $M = M_{n,\tau_1,\tau_2}$, $m = m_{n,\tau_1,\tau_2}$.

В случае а) имеем

$$\mathcal{F} \geqslant \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- + (\mathcal{T}^+_+ - \mathcal{T}^-_-)(m\mathcal{T}^+_- - M\mathcal{T}^-_+) + (\mathcal{T}^+_- - \mathcal{T}^-_+)(m\mathcal{T}^-_- - M\mathcal{T}^+_+) = \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- +$$
$$+ (M - m)(\mathcal{T}^-_-\mathcal{T}^-_+ - \mathcal{T}^+_+\mathcal{T}^+_-) \equiv \mathcal{F}_1 \geqslant \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- - (M - m)\frac{(\mathcal{T}^+)^2}{4} \equiv \mathcal{F}^*_1 \geqslant \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- - \mathcal{M}_n\frac{(\mathcal{T}^+)^2}{4}.$$

Равенство $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}^*_1$ достигается только при $\mathcal{T}^+_- = \mathcal{T}^+_+ = \dfrac{\mathcal{T}^+}{2}$, $\mathcal{T}^-_-\mathcal{T}^-_+ = 0$. Поэтому равенство $\mathcal{F} = \mathcal{F}^*_1$ достигается, только если

$$\int_{E^-} G_{\tau_1,\tau_2}(s)p^+(s)\,ds = m\int_{E^-} p^+(s)\,ds = m\mathcal{T}^+_- = m\frac{\mathcal{T}^+}{2},$$

$$\int_{E^+} G_{\tau_1,\tau_2}(s)p^+(s)\,ds = M\int_{E^+} p^+(s)\,ds = M\frac{\mathcal{T}^+}{2}$$

и либо

$$\int_{E^-} G_{\tau_1,\tau_2}(s)p^-(s)\,ds = m\mathcal{T}^-_- = 0, \quad \int_{E^+} G_{\tau_1,\tau_2}(s)p^-(s)\,ds = M\mathcal{T}^-_+ = M\mathcal{T}^-,$$

либо

$$\int_{E^-} G_{\tau_1,\tau_2}(s)p^-(s)\,ds = m\mathcal{T}_-^- = m\mathcal{T}^-, \quad \int_{E^+} G_{\tau_1,\tau_2}(s)p^-(s)\,ds = M\mathcal{T}_+^- = 0.$$

Таким образом, равенство $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1^*$ может достигаться только тогда, когда функция $G_{\tau_1,\tau_2}(s)$ принимает свои различные максимальное и минимальное значения на множествах ненулевой меры, что невозможно по лемме 5.

В случае б) имеем

$$\mathcal{F} \geqslant \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- + (\mathcal{T}_+^+ - \mathcal{T}_-^-)(m\mathcal{T}_-^+ - M\mathcal{T}_+^-) + (\mathcal{T}_-^+ - \mathcal{T}_+^-)(M\mathcal{T}_-^- - m\mathcal{T}_+^+) = \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- +$$
$$+ (M-m)(\mathcal{T}_-^-\mathcal{T}_+^- - \mathcal{T}_+^+\mathcal{T}_-^+) \equiv \mathcal{F}_2 \geqslant \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- - (M-m)\mathcal{T}^+\mathcal{T}^- \equiv \mathcal{F}_2^* \geqslant \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- - \mathcal{M}_n\mathcal{T}^+\mathcal{T}^-.$$

Причем равенство $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2^*$ достигается при $\mathcal{T}_+^- = 0$, $\mathcal{T}_+^+ = \mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}_+^- = \mathcal{T}^-$, $\mathcal{T}_-^- = 0$. Поэтому равенство $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2^*$ достигается только в том случае, когда

$$\int_{E^+} G_{\tau_1,\tau_2}(s)p^+(s)\,ds = m\mathcal{T}_-^+ = m\mathcal{T}^+ = m\int_{E^+} p^+(s)\,ds = m\int_0^\omega p^+(s)\,ds$$

(в этом случае либо $G_{\tau_1,\tau_2}(s)$ принимает минимальное значение на множестве ненулевой меры, либо $\mathcal{T}^+ = 0$, что невозможно, так как $\mathcal{T}^+ > \mathcal{T}^- \geqslant 0$);

$$\int_{E^-} G_{\tau_1,\tau_2}(s)p^-(s)\,ds = M\mathcal{T}_-^- = M\int_{E^-} p^-(s)\,ds = 0,$$

$$\int_{E^-} G_{\tau_1,\tau_2}(s)p^+(s)\,ds = m\mathcal{T}_-^+ = m\int_{E^-} p^+(s)\,ds = 0,$$

$$\int_{E^+} G_{\tau_1,\tau_2}(s)p^-(s)\,ds = M\mathcal{T}_+^- = M\int_{E^+} p^-(s)\,ds = M\mathcal{T}^-.$$

Следовательно, либо $E^+ = [0,\omega]$, $E^- = \varnothing$ и $G_{\tau_1,\tau_2}(s)$ принимает максимальное значение на множестве ненулевой меры, либо $\mathcal{T}^- = 0$. По лемме 5 различные минимальное и максимальное значения функция $G_{\tau_1,\tau_2}(s)$ принимать на множествах ненулевой меры не может.

В случае в) имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \geqslant \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- + (\mathcal{T}_+^+ - \mathcal{T}_-^-)(M\mathcal{T}_-^+ - m\mathcal{T}_+^-) + (\mathcal{T}_-^+ - \mathcal{T}_+^-)(m\mathcal{T}_-^- - M\mathcal{T}_+^+) = \\ = \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- + (M-m)(\mathcal{T}_+^+\mathcal{T}_+^- - \mathcal{T}_-^-\mathcal{T}_-^+) \equiv \mathcal{F}_3 \geqslant \\ \geqslant \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- - (M-m)\mathcal{T}^+\mathcal{T}^- \equiv \mathcal{F}_3^* \geqslant \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- - \mathcal{M}_n\mathcal{T}^+\mathcal{T}^-.\end{aligned}$$

Причем равенство $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_3^*$ достигается только при $\mathcal{T}_+^+ = 0$, $\mathcal{T}_-^+ = \mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}_-^- = 0$, $\mathcal{T}_+^- = \mathcal{T}^-$. Поэтому равенство $\mathcal{F} = \mathcal{F}_3^*$ достигается только в том случае, когда

$$\int_{E^+} G_{\tau_1,\tau_2}(s)p^+(s)\,ds = M\mathcal{T}_+^+ = 0, \quad \int_{E^-} G_{\tau_1,\tau_2}(s)p^-(s)\,ds = m\mathcal{T}_-^- = m\mathcal{T}^-$$

(следовательно, минимальное значение $G_{\tau_1,\tau_2}(s)$ принимает на множестве ненулевой меры или $\mathcal{T}^- = 0$);

$$\int_{E^+} G_{\tau_1,\tau_2}(s)p^-(s)\,ds = m\mathcal{T}_+^- = 0, \quad \int_{E^-} G_{\tau_1,\tau_2}(s)p^+(s)\,ds = M\mathcal{T}_-^+ = M\mathcal{T}^+$$

(тогда $G_{\tau_1,\tau_2}(s)$ принимает максимальное значение на множестве ненулевой меры). По лемме 5 различные минимальное и максимальное значения функция $G_{\tau_1,\tau_2}(s)$ принимать на множествах ненулевой меры не может.

Итак, равенство $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1^*$ не достигается; равенство $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2^*$ или $\mathcal{F} = \mathcal{F}_3^*$ достигается только при $\mathcal{T}^- = 0$, при этом $\mathcal{F} > 0$.

Таким образом, при всех $\mathcal{T}_{+/-}^{+/-}$ неравенство $\mathcal{F} > 0$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- \geqslant \mathcal{M}\left(\frac{\mathcal{T}^+}{2}\right)^2, \quad \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- \geqslant \mathcal{M}\mathcal{T}^+\mathcal{T}^-. \tag{3.4}$$

Неравенства (3.4) вместе с аналогичными неравенствами в случае $\mathcal{T}^+ < \mathcal{T}^-$ эквивалентны условиям (1.8).

§ 4. Доказательство теоремы 2

Функция Грина $G_n(t,s)$ задачи (1.4) и функция Грина $G_n^0(\nu,\mu)$ этой задачи при $\omega = 1$ связаны равенством $\omega^{n-1}G_n^0(\mu,\nu) = G_n(\mu\omega,\nu\omega)$, $\mu,\nu \in [0,1]$. Поэтому далее полагаем $\omega = 1$ и для простоты используем обозначение $G_n(t,s)$.

Для доказательства потребуются некоторые свойства функций $G_n(t,s)$ задачи (1.4) при $\omega = 1$. Будем говорить, что функция $y(t)$ симметрична относительно точки $t = t_*$ (симметрична относительно точки $t = t_*$ на отрезке $[t_*-d, t_*+d]$, $d > 0$), если $y(t_*+t) = y(t_*-t)$ при любом t (при $t \in [0,d]$). Будем говорить, что функция $y(t)$ антисимметрична относительно точки $t = t_*$ (антисимметрична относительно точки $t = t_*$ на отрезке $[t_* - d, t_* + d]$, $d > 0$), если $y(t_* + t) - y(t_*) = y(t_*) - y(t_* - t)$ при любом t (при $t \in [0,d]$).

Функция Грина $G_n(t,s)$ задачи (1.4) при $\omega = 1$ обладает следующими свойствами:

1) $G_n(t,s) = \displaystyle\int_0^t G_{n-1}(\theta,s)\,d\theta - t\int_0^1 G_{n-1}(\theta,s)\,d\theta$, $t,s \in [0,1]$, $n > 2$;

2) при $n > 2$ производная $\frac{\partial G_n(t,s)}{\partial t}$ непрерывна при $(t,s) \in [0,1]\times[0,1]$;

3) $G_n(t,s) = (-1)^n G_n(s,t)$, $t,s \in [0,1]$;

4) $(-1)^m(t-s)G_{2m+1}(t,s) > 0$ при $t \neq s$, $t,s \neq 0$, $t,s \neq 1$; функция $(-1)^m G_{2m+1}(t,s)$ при фиксированном $s \in (0,1)$ симметрична относительно точки $t_1 = s/2$ на отрезке $t \in [0,s]$ и симметрична относительно точки $t_2 = \frac{s+1}{2}$ на отрезке $t \in [s,1]$, достигает минимума в точке t_1 и максимума в точке t_2, монотонна на каждом из отрезков $[0,t_1]$ (убывает), $[t_1,t_2]$ (возрастает), $[t_2,1]$ (убывает), меняет знак в точке $t_3 = s$ (от положительного к отрицательному);

5) функция $G_{2m}(t,s)$ при фиксированном $s \in (0,1)$ антисимметрична относительно точки $t_1 = s/2$ на отрезке $t \in [0,s]$ и антисимметрична относительно точки $t_2 = \frac{s+1}{2}$ на отрезке $t \in [s,1]$;

6) $G_n(1,s) = G_n(0,s) = 0$ при $s \in [0,1]$;

7) функция $y(t) = G_n(t,s_1) - G_n(t,s_2)$ при фиксированных s_1, s_2 продолженная периодически по переменной t на множество $(-\infty,+\infty)$, антисимметрична при четных n и симметрична при нечетных n относительно точек $t_1 = \frac{s_1+s_2}{2} + z$, $t_2 = \frac{s_1+s_2+1}{2} + z$ при целых z и на $(0,1)$ принимает каждое свое значение не более двух раз;

8) при нечетном n и фиксированных s_1, s_2 функция $y(t) = G_n(t,s_1) - G_n(t,s_2)$, продолженная периодически по переменной t на $(-\infty,+\infty)$, принимает максимальное и минимальное значение в точках $t_1 = \frac{s_1+s_2}{2} + z$, $t_2 = \frac{s_1+s_2+1}{2} + z$ при целых z ;

9) $G_n(t,s) = (-1)^n G_n(1-t,1-s)$, $t,s \in [0,1]$;

10) $\displaystyle\int_0^1 G_{2m+1}(\theta,s)\,d\theta\,(1/2 - s)\,(-1)^m > 0$ при $s \in (0,1)$, $s \neq \frac{1}{2}$;

11) $G_{2m}(1/2,1/2)(-1)^m > 0$, $m \geqslant 1$;

12) если

$$\int_0^1 G_{2m+1}(\theta,s_1)\,d\theta = \int_0^1 G_{2m+1}(\theta,s_2)\,d\theta, \quad s_1 \neq s_2, \quad m \geqslant 1,$$

и $s_1, s_2 \in (0,1/2)$, то $s_1 + s_2 < 1/2$, если $s_1, s_2 \in (1/2,1)$, то $s_1 + s_2 > 3/2$.

Все свойства, кроме последнего, легко следуют из определения функции Грина краевой задачи (1.4). Докажем свойство 12). Для упрощения вычислений удобно провести доказательство на отрезке $[-1,1]$, а не $[0,1]$. Пусть $H_n(t,s)$, $n \geqslant 2$ — функция Грина задачи

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = f(t), \quad t \in [-1,1], \\ x(-1)=0, \quad x(1)=0, \quad x^{(i)}(-1) = x^{(i)}(1), \quad i=1,\dots,n-2. \end{cases}$$

Докажем, что если

$$\int_{-1}^{1} H_{2m+1}(\theta, s_1)\,d\theta = \int_{-1}^{1} H_{2m+1}(\theta, s_2)\,d\theta, \quad s_1 \neq s_2, \quad m \geqslant 1$$

и $s_1, s_2 \in (-1,0)$, то $s_1+s_2 < -1$, а если при этом $s_1,s_2 \in (0,1)$, то $s_1+s_2>1$.

Пусть x_n удовлетворяет краевым условиям и уравнению $x^{(n)}(t) = 1$, $n = 2m+1$, $m \geqslant 1$. Тогда

$$x_n(t) = \int_{-1}^{1} H_n(t,\theta)\,d\theta = -\int_{-1}^{1} H_n(\theta,t)\,d\theta, \quad t \in [-1,1],$$

$\ddot{x}_{n+2}(t) = x_n(t)$, $x_n(-1) = x_n(0) = x_n(1)$. Легко показать, что

$$x_{n+2}(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 K_1(t,s)x_n(s)\,ds, \quad t \in [0,1], \\ \displaystyle\int_{-1}^0 K_2(t,s)x_n(s)\,ds, \quad t \in [-1,0], \end{cases}$$

где

$$K_1(t,s) = \begin{cases} (t-1)\,s, \ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ (s-1)\,t, \ 0 \leqslant t < s \leqslant 1, \end{cases} \quad K_2(t,s) = \begin{cases} (s+1)\,t, \ -1 \leqslant s \leqslant t \leqslant 0, \\ (t+1)\,s, \ -1 \leqslant t < s \leqslant 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $x_3(t) = \frac{t^3-t}{6}$, индукцией по m показывается, что при $n=2m+1$, $m \geqslant 1$ функции x_n нечетны и $(-1)^{m+1}x_{2m+1}(t) > 0$ при $t \in (-1,0)$; $(-1)^m x_{2m+1}(t) > 0$ при $t \in (0,1)$.

Из этих свойств следует, что при всех $m \geqslant 1$ выполнены условия

$$(-1)^m x_{2m+1}(t) > (-1)^m x_{2m+1}(1-t), \quad t \in (1/2, 1),$$

$$(-1)^{m+1} x_{2m+1}(t) > (-1)^{m+1} x_{2m+1}(-1-t), \quad t \in (-1, -1/2).$$

Если теперь $x_{2m+1}(t_1) = x_{2m+1}(t_2) \neq 0$, то либо $0 < t_1, t_2 < 1$, либо $-1 < t_1, t_2 < 0$. Покажем индукцией по m, что в первом случае $t_1+t_2 > 1$, а во втором случае $t_1+t_2 < -1$. Для $m=1$ утверждение верно.

Пусть $0 < t_2 < t_1 < 1$, $y = x_{n+2}$, $n = 2m+1$, $y(t_1) = y(t_2)$. Тогда $y(t_1) - y(t_2) = \int_0^1 (K_1(t_1,s) - K_1(t_2,s))x_n(s)\,ds = 0$, где имеем

$$K_1(t_1,s) - K_1(t_2,s) \equiv K(s) = \begin{cases} (t_1-t_2)s, \quad s \in [0,t_2], \\ (t_1-1)s - t_2(s-1), \quad s \in [t_2,t_1], \\ (t_1-t_2)(s-1), \quad s \in [t_1,1]. \end{cases}$$

Тогда $K(s) > 0$ при $0 < s < t_3 \equiv \frac{t_2}{t_2-t_1+1}$; $K(s) < 0$ при $t_3 < s < 1$.

Предположим, что $t_1 + t_2 \leqslant 1$. Тогда $t_3 \leqslant 1/2$ и $-K(s) > K(1-s)$ при $t \in (1/2,1)$. Имеем $(-1)^m x_n(t) > 0$ при $t \in (0,1)$. По предположению индукции $(-1)^m x_n(t) > (-1)^m x_n(1-t) > 0$, $t \in (1/2,1)$. Теперь получаем

$$0 = \int_0^{1/2} K(s)x_n(s)\,ds + \int_{1/2}^1 K(s)x_n(s)\,ds \neq \int_0^{1/2} K(s)x_n(s)\,ds - \int_{1/2}^1 K(1-s)x_n(1-s)\,ds = 0.$$

Противоречие показывает, что $t_1+t_2 > 1$. Аналогично показывается, что если $-1 < t_1 < t_2 < 0$, $y = x_{n+2}$ и $y(t_1) = y(t_2)$, то $t_1 + t_2 < -1$.

Лемма 6. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{M}_n = \max_{t,s_1,s_2\in[0,1]} g_n(t,s_1,s_2), \tag{4.1}$$

где $g_n(t,s_1,s_2) = G_n(t,s_1) - G_n(t,s_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения

$$\mathop{\mathrm{R}}_{s\in[0,\omega]} v(s) = \max_{s\in[0,\omega]} v(s) - \min_{s\in[0,\omega]} v(s), \quad G_{t_1,t_2}(s) = G_n(t_1,s) - G_n(t_2,s).$$

Продолжим функцию $G_{t_1,t_2}(s)$ на отрезок $[1,2]$ по правилу $G_{t_1,t_2}(s) = G_{t_1,t_2}(s-1)$ при $s \in [1,2]$. Функцией Грина задачи

$$\begin{cases} (-1)^n x^{(n)}(t) = f(t), \quad t\in[t_2,t_2+1], \\ x(t_2) = x(t_2+1) = 0, \quad x^{(i)}(t_2) = x^{(i)}(t_2+1), \quad i = 1,\dots,n-2 \end{cases}$$

является функция $(-1)^n G_n(t-t_2, s-t_2)$. Теперь получаем

$$\mathcal{M}_n = \max_{0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant 1} \mathop{\mathrm{R}}_{s\in[0,1]} G_{t_1,t_2}(s) = \max_{0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant 1} \mathop{\mathrm{R}}_{s\in[t_2,1+t_2]} (G_{t_1,t_2}(s) - G_{t_1,t_2}(t_2)) =$$
$$= \max_{0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant 1} \mathop{\mathrm{R}}_{s\in[t_2,1+t_2]} (-1)^n G_n(s-t_2, 1+t_1-t_2) = \max_{0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant 1} \mathop{\mathrm{R}}_{s\in[0,1]} (-1)^n G_n(s, 1+t_1-t_2) =$$
$$= \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \mathop{\mathrm{R}}_{s\in[0,1]} (-1)^n G_n(s,t) = \max_{t,s_1,s_2\in[0,1]} g_n(t,s_1,s_2). \qquad \square$$

Вычислим $\mathcal{M}_2$. Имеем $G_2(t,s) = (t-1)\,s$ при $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$, и $G_2(t,s) = (s-1)\,t$ при $0\leqslant t < s\leqslant 1$. Поэтому функция $G_2(t,s_1) - G_2(t,s_2)$ по переменной t кусочно линейна и принимает максимальное значение либо при $t = s_2$, $s_1 = 0$ или $s_1 = 1$, либо при $t = s_1$, $s_2 = 0$ или $s_2 = 1$. Легко видеть, что максимум достигается в первом случае. Тогда $\mathcal{M}_2 = \max\limits_{s_2\in[0,1]} (1-s_2)s_2 = -G_2(1/2,1/2)$.

Определим $\mathcal{M}_n$ **при нечетных** $n\geqslant 3$. Пусть $n = 2m+1$ и $\mathcal{M}_n = G_n(t,s_1) - G_n(t,s_2)$. Из свойства 4) для $G_n(t,\cdot)$ следует, что $s_1 = \frac{t}{2}$, $s_2 = \frac{1+t}{2}$ при четном m и $s_2 = \frac{t}{2}$, $s_1 = \frac{1+t}{2}$ при нечетном m. В обоих случаях $s_1 + s_2 = t + 1/2$.

Из свойства 8) следует, что при целом z выполнено равенство $t = \frac{s_1+s_2}{2} + z = \frac{t+1/2}{2} + z$ или равенство $t = \frac{s_1+s_2+1}{2} + z = \frac{t+3/2}{2} + z$. Тогда $t = 1/2 + 2z$ или $t = 1/2 + 2z + 1$. Отсюда заключаем, что $t = 1/2$ и $s_1 = 3/4$, $s_2 = 1/4$ при нечетных m и $s_1 = 1/4$, $s_2 = 3/4$ при четных m. Поэтому $\mathcal{M}_{2m+1} = (-1)^m \left(G_{2m+1}(1/2,1/4) - G_{2m+1}(1/2,3/4)\right)$.

Так как по свойству 9) $G_n(1/2,3/4) = -G_n(1/2,1/4)$, то $\mathcal{M}_{2m+1} = (-1)^m 2\, G_{2m+1}(1/2,1/4)$.

Определим $\mathcal{M}_n$ **при четных** $n > 2$. Пусть теперь $n = 2m > 2$. Из свойств 2) и 3) следует, что необходимым условием экстремума функции $g_n(t,s_1,s_2)$ являются равенства нулю частных производных по t, s_1 и s_2. Отсюда с использованием свойств 1) и 3) получаем систему уравнений

$$\int_0^1 G_{n-1}(\theta,s_1)\,d\theta = \int_0^1 G_{n-1}(\theta,s_2)\,d\theta, \tag{4.2}$$

$$G_{n-1}(s_1,t) = G_{n-1}(s_2,t) = \int_0^1 G_{n-1}(\theta,t)\,d\theta. \tag{4.3}$$

Если каждый интеграл в (4.2) равен нулю, то используя свойства 4) и 11) получаем, что $s_1 = 1/2$, $s_2 = 0$, $t = 1/2$ при четных m; $s_1 = 0$, $s_2 = 1/2$, $t = 1/2$ при нечетных m; $\max g(t,s_1,s_2) = (-1)^m G_n(1/2,1/2)$.

Покажем, что при $\displaystyle\int_0^1 G_{n-1}(\theta,s_1)\,d\theta \neq 0$ не существует точек t, s_1, s_2, удовлетворяющих уравнениям (4.2), (4.3). Предположим, что (4.2), (4.3) выполнены. Тогда $s_1, s_2 \notin \{0,1,t\}$.

Из равенства $G_{n-1}(s_1,t)=G_{n-1}(s_2,t)$, $s_1\neq s_2$ и свойства 4) следует, что либо $\frac{s_1+s_2}{2}=\frac{t}{2}$, либо $\frac{s_1+s_2}{2}=\frac{1+t}{2}$. По свойству 10) из (4.2) следует, что либо $s_1,s_2\in(0,1/2)$ и тогда $0<s_1+s_2=t<1/2$ по свойству 12), либо $s_1,s_2\in(1/2,1)$ и тогда $1>s_1+s_2-1=t>1/2$ по свойству 12).

Теперь в случае $s_1+s_2=t\in(0,1/2)$ из свойства 4) следует, что $-G_{n-1}(s_2,t)(-1)^{m-1}>0$, и из 10) следует, что $\displaystyle\int_0^1 G_{n-1}(\theta,t)\,d\theta(-1)^{m-1}>0$, поэтому равенства (4.3) не могут быть выполнены. Аналогично и в случае $s_1+s_2-1=t\in(1/2,1)$ из свойств 4) и 10) следует, что равенства (4.3) не могут быть выполнены.

Рекуррентные формулы (1.10) теперь легко следуют из определения функции Грина задачи (1.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hakl R., Lomtatidze A., Šremr J. Solvability and the unique solvability of a periodic type boundary value problem for first order scalar functional differential equations // Georgian Math. J. — 2002. — Vol. 9, № 3. — P. 525–547.

2. Hakl R., Lomtatidze A., Šremr J. Some Boundary Value Problems For First Order Scalar Functional Differential Eequations. Brno: Folia Facult. Scien. Natur. Masar. Brunensis. Mathematica, 2002. — 299 p.

3. Ломтатидзе А. Г., Пужа Б., Хакл Р. О периодических краевых задачах для функционально-дифференциональных уравнений первого порядка // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 3. — С. 320–327.

4. Hakl R. On periodic-type boundary value problems for functional differential equations with a positively homogeneous operator // Miskolc Math. Notes. — 2004. — Vol. 5, № 1. — P. 33–55.

5. Mukhigulashvili S. On a periodic boundary value problem for second-order linear functional differential equations // Boundary Value Problems. — 2005. — № 3. — P. 247–261.

6. Kiguradze I., Mukhigulashvili S. On periodic solutions of two-dimensional nonautonomous differential systems // Nonlinear Anal. Theory, Methods, Appl. — 2005. — Vol. 60, № 2(a). — P. 241–256.

7. Hakl R., Mukhigulashvili S. On one estimate for periodic functions // Georgian Math. J. — 2005. — Vol. 12, № 1. — P. 97–114.

8. Mukhigulashvili S., Půža B. On a Periodic Boundary Value Problem for Cyclic Feedback Type Linear Functional Differential Systems // Mem. Differential Equations Math. Phys. — 2007. — Vol. 40. — P. 67–75.

9. Mukhigulashvili S., Půža B. On a Periodic Boundary Value Problem for Third Order Linear Functional Differential Equations // Functional Differential Equations. — 2007. — Vol. 14, № 3–4. — P. 347–362.

10. Hakl R. On a Periodic Type Boundary Value Problem For Functional Differential Equations with A Positively Homogeneous Operator // Mem. Differential Equations Math. Phys. — 2007. — Vol. 40. — P. 17–54.

11. Mukhigulashvili S. On a periodic boundary value problem for third order linear functional differential equations // Nonlinear Anal. Theory, Methods, Appl. — 2007. — Vol. 66, № 2(a). — P. 527–535.

12. Mukhigulashvili S. On a periodic boundary value problem for cyclic feedback type linear functional differential systems // Arch. Math. — 2007. — Vol. 87, № 3. — P. 255–260.

13. Бравый Е. И. Об однозначной разрешимости периодической краевой задачи для линейного функционально-дифференциального уравнения // Теория управления и математическое моделирование: материалы науч. конф.-семинара. Ижевск: ИжГТУ, 2008. — С. 8–11.

14. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002. — 384 с.

15. Комленко Ю. В., Тонков Е. Л. О мультипликаторах линейного периодического дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом // Сиб. мат. журн. — 1974. — Т. 15, № 4. — С. 835–844.

16. Lasota A., Opial Z. Sur les solutions périodiques des équations differentielles ordinaires // Ann. Pol. Math. 1964. — Vol. 6, № 1. — C. 69–94.

17. Комленко Ю. В., Тонков Е. Л. Периодическая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка // ДАН. — 1968. — Т. 179, № 1. — С. 17–19.

18. Тонков Е. Л., Юткин Г. И. Периодические решения и устойчивость линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т. 5, № 11. — С. 1990–2001.

Поступила в редакцию 01.08.09

E. I. Bravyi

On the solvability of the periodic boundary value problem for a linear functional differential equation

Necessary and sufficient conditions for the uniquely solvability of the periodic boundary value problem for functional differential equations are obtained.

Keywords: functional differential equations, boundary value problems, periodic problem, Green function.

Mathematical Subject Classifications: 34K10, 34K13

Бравый Евгений Ильич, к. ф.-м. н., доцент, научно-исследовательский центр «Функционально-дифференциальные уравнения», Пермский государственный технический университет, 614999, Россия, г. Пермь, Комсомольский проспект, 29а, E-mail: bravyi@perm.ru