ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 3

УДК 512.556

© *Е. М. Вечтомов, А. В. Черанева*

ПОЛУТЕЛА С ОБРАЗУЮЩЕЙ [1]

Статья посвящена теории полуколец и полутел. Вводится и изучается понятие образующей полутела. Показано, что любое полутело вкладывается в полутело с образующей. Дана спектральная характеризация полутел с образующей.

Ключевые слова: полутело, ядро полутела, образующая полутела, неприводимый спектр.

Введение

Специальное рассмотрение полутел с образующей мотивируется следующими обстоятельствами. Во-первых, всякое полутело вкладывается в полутело с образующей (теорема 1). Во-вторых, полутела с образующей обладают некоторыми важными дополнительными свойствами, например, в них собственные ядра содержатся в максимальных ядрах (теорема 5). Вложение в полутело с образующей является одним из инструментов исследования произвольных полутел. Отметим, что понятие образующей полутела служит аналогом единицы в кольцах и обобщает понятие сильной единицы в решеточно упорядоченных группах. А само понятие полутела является весьма широким обобщением понятия решеточно упорядоченной группы.

Теорию полутел можно рассматривать и как раздел теории полуколец, и как часть теории мультипликативных групп, наделенных коммутативно-ассоциативной операцией сложения. Первые работы, посвященные полутелам, появились в 60-е годы XX века в рамках теории полуколец. Назовем статьи [1–8], а также монографию Голана [9] по общей теории полуколец, на которые мы будем далее ссылаться.

§ 1. Исходные понятия и результаты

Полутелом называется алгебраическая структура U с бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, такими, что $\langle U,+\rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle U,\cdot\rangle$ — группа с единицей 1 и умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон [2]. Эквивалентное определение: полутело — это делимое полукольцо с квазитождеством $a+b=0 \;\Rightarrow\; a=0$ с выброшенным затем нулем 0.

В сигнатуре $\langle +,\cdot,^{-1},1\rangle$ типа $(2,2,1,0)$ класс всех полутел образует многообразие. Понятия подполутела, конгруэнции на полутеле, факторполутела, гомоморфизма и прямого произведения полутел определяются стандартно. Для полутел выполняются известные теорема о гомоморфизме и теоремы об изоморфизме (см. [3, §3]).

Полутело называется:

полуполем, если умножение в нем коммутативно;

идемпотентным, если оно удовлетворяет тождеству $a+a=a$ (равносильно, $1+1=1$);

сократимым, когда оно удовлетворяет квазитождеству $a+c=b+c \Rightarrow\; a=b$;

зероидным, когда $a+b=a$ для некоторых его элементов a,b;

тривиальным, если оно содержит единственный элемент 1.

Всякое полутело U либо идемпотентно, либо содержит в качестве подполутела копию полуполя $\mathbb{Q}^+$ положительных рациональных чисел с обычными операциями сложения и умножения чисел [2, пункт 2]. Во втором случае будем считать, что $\mathbb{Q}^+\subseteq U$, и тогда $\mathbb{Q}^+$ лежит в *центре*

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 08-01-11000 ано).

полутела U, являющегося, по определению, множеством всех центральных элементов полутела. Как обычно, элемент полутела называется *центральным*, если он коммутирует с каждым элементом полутела. Легко видеть, что центр любого полутела U является коммутативным подполутелом в U.

Одним из важнейших понятий теории полутел является понятие ядра. *Ядром* полутела называется класс 1 произвольной конгруэнции на нем (С. В. Полин [2] употребил термин «идеал»). Подмножество A полутела U будет ядром тогда и только тогда, когда A — нормальная подгруппа мультипликативной группы U, удовлетворяющая условию: если $u, v \in U$, $u+v=1$, $a, b \in A$, то $au+bv \in A$ [2, лемма 1.1]. Другие характеризации ядер полутел можно найти в [3, теорема 3.2].

Множество $\mathrm{Con}\, U$ всех ядер полутела U образует полную модулярную решетку относительно операций умножения и пересечения ядер, канонически изоморфную решетке всевозможных конгруэнций на U [3, теорема 3.6].

Утверждение 1 [6, следствие 1]. *Для каждого ядра A полутела U любой элемент интервала $[A, U] = \{B \in \mathrm{Con}\, U : B \supseteq A\}$ имеет в этом интервале не более одного дополнения.*

Полутело U называется *дистрибутивным* (*цепным*, *простым*), если решетка $\mathrm{Con}\, U$ дистрибутивна (соответственно: является цепью, двухэлементна).

Если M — подмножество полутела U, то через (M) обозначим наименьшее ядро в U, содержащее M; оно равно пересечению всех ядер в U, содержащих M. Если при этом $U = (M)$, то M называется *множеством образующих* полутела U (как ядра).

Ядро $(u) = (\{u\})$ полутела U называется *главным ядром*, порожденным элементом $u \in U$. Если $U = (u)$ для некоторого элемента $u \in U$, то u называется *образующей* полутела U, а само U — *полутелом с образующей*. Образующую полутела, являющуюся его центральным элементом, назовем *центральной образующей* полутела. Подполутело полутела, служащее одновременно его ядром, назовем *ядерным подполутелом*. Легко видеть, что главное ядро (2) полутела U, где $2 = 1+1$, служит наименьшим ядерным подполутелом в U. Ясно также, что ядро A полутела U будет подполутелом в U в том и только в том случае, когда факторполутело U/A идемпотентно.

Полутело $U = (2)$ с образующей 2 называется *ограниченным* (образующая 2 центральная). Полутело ограниченно тогда и только тогда, когда все его факторполутела сократимы [7, теорема 1]. Следовательно, ограниченные полутела сократимы. Простые полутела — это в точности нетривиальные полутела, в которых любой элемент, отличный от 1, является образующей. Простые полутела либо идемпотентны, либо ограниченны. Ограниченные полутела совпадают с полутелами U, имеющими единственное ядерное подполутело — само U. А идемпотентные полутела суть полутела, все ядра которых являются подполутелами.

Полутело U называется *расширением* полутела V при помощи полутела W, если в нем существует ядерное подполутело A, изоморфное V, факторполутело по которому U/A изоморфно W. Поскольку ядро (2) любого полутела является ограниченным полутелом [7, теорема 3], то имеет место следующий принципиальный результат.

Утверждение 2. *Любое полутело U служит расширением ограниченного полутела при помощи идемпотентного полутела $U/(2)$.*

Полезным понятием и методом изучения полутел служит *кольцо разностей* полутела. Каждое сократимое полутело U обладает кольцом разностей $R = R(U)$ [2, 3], которое определяется как кольцо, содержащее U в качестве подалгебры и совпадающее с $U - U$. Кольцо R определено однозначно с точностью до изоморфизма над U. Существуют канонические отображения $\gamma : \mathrm{Id}\, R \to \mathrm{Con}\, U$ и $\delta : \mathrm{Con} U \to \mathrm{Id}\, R$, где $\mathrm{Id}\, R$ — решетка всех идеалов кольца R, задаваемые формулами

$$\gamma(I) = (I+1) \cap U \ \text{ для всех } \ I \in \mathrm{Id}\, R, \quad \delta(A) = (A-1)U \ \text{ для всех } \ A \in \mathrm{Con}\, U.$$

Известно [4], что $\delta \circ \gamma$ есть тождественное отображение решетки $\mathrm{Id}\, R$, γ является $\cap$-вложением, а δ — эпиморфизмом решеток.

Лемма 1. *Для любого элемента и сократимого полутела U справедливо равенство $\delta((u)) = R(u-1)R$, где $R(u-1)R$ — главный идеал кольца $R = R(U)$, порожденный элементом $u-1$.*

Доказательство. Для $u \in U$ имеет место цепочка включений:

$$\gamma(\delta((u))) = \gamma(((u)-1)U) \supseteq \gamma(R(u-1)R) = (R(u-1)R)+1) \cap U \supseteq (u),$$

откуда $\delta((u)) = \delta(\gamma(R(u-1)R)) = R(u-1)R$. □

Стоит заметить, что кольцо разностей $R(U)$ можно определить для любого полутела U. Но оно может оказаться нулевым: $R(U) = \{0\}$ тогда и только тогда, когда полутело U зероидное [7, с. 167].

Класс идемпотентных полутел совпадает с классом решеточно упорядоченных групп [1], имеющих дистрибутивные решетки конгруэнций [10, с. 393]. Поэтому идемпотентные полутела дистрибутивны. Хорошо известно, что сократимые полутела (полукольца) — это в точности полутела (полукольца), вложимые в кольца (равносильно, вложимые в свои кольца разностей) [2, 9]. По утверждению 2 каждое полутело служит расширением сократимого (ограниченного) полутела при помощи идемпотентного полутела. Тем не менее, класс всевозможных полутел значительно шире этих двух важнейших классов полутел вместе взятых, а изучение произвольных полутел далеко не сводится к исследованию идемпотентных полутел и сократимых полутел. Заметим также, что идемпотентные полутела зероидны, а зероидные сократимые полутела тривиальны.

Лемма 2 [9, предложение 20.37]. *В любом полутеле выполняется квазитождество*

$$a+b+c = a \Rightarrow a+b = a.$$

Доказательство. Пусть $a+b+c = a$ для элементов a, b, c полутела U. Умножим обе части равенства справа на $a^{-1}ba^{-1}$, затем прибавим к обеим частям ca^{-1} и сгруппируем члены в левой части:

$$(ba^{-1}+ca^{-1})(1+ba^{-1}) = ba^{-1}+ca^{-1}.$$

Откуда $1+ba^{-1} = 1$ и, стало быть, $a+b = a$. □

На любом полутеле U имеется «разностное» отношение $\leqslant$: $a \leqslant b$ означает, что $a = b$ или $a+c = b$ для некоторого элемента $c \in U$. Это отношение рефлексивно и, очевидно, транзитивно. Его антисимметричность вытекает из леммы 2. Стало быть, бинарное отношение $\leqslant$ на полутеле U является отношением порядка, называемым *естественным порядком* на полутеле U [2, пункт 1].

Утверждение 3. *Относительно естественного порядка всякое полутело U является упорядоченным полутелом, то есть $a \leqslant b$ влечет $a+c \leqslant b+c$, $ac \leqslant bc$ и $ca \leqslant cb$ для всех $a, b, c \in U$.*

Это еще одно основополагающее свойство полутел. Заметим, что на идемпотентных полутелах неравенство $a \leqslant b$ эквивалентно равенству $a+b = b$.

Докажем некоторые утверждения о ядрах полутел.

Лемма 3. *Если A — ядро полутела U, $a, b \in U$, $a+a^{-1} \in A$ или $a+a^{-1}+b \in A$, то $a \in A$.*

В самом деле, пусть $a+a^{-1} \in A$. Тогда в факторполутеле U/A для элемента $w = aA$ получаем $w+w^{-1} = 1$. Поэтому $w \leqslant 1$, $w^{-1} \leqslant 1$, $w \geqslant 1$, $w = 1$, то есть $aA = A$ и $a \in A$. На основании леммы 2 получаем второе утверждение. □

Утверждение 4 [2, следствие 1.1]. *Каждое ядро A любого полутела U выпукло относительно естественного порядка на U: если $a, c \in A$, $b \in U$ и $a \leqslant b \leqslant c$, то $b \in A$.*

Действительно, $a+u=b$ и $b+v=c$ для некоторых $u,v\in U$, то есть $a+u+v=c$. В факторполутеле $U/A=\{dA:d\in U\}$ выполняется равенство $A+uA+vA=A$. Откуда $bA=(a+u)A=A+uA=A$ в силу леммы 2, и $b\in A$. □

Следующее утверждение хорошо известно для решеточно упорядоченных групп [11].

Утверждение 5 [5, свойство 5]. *Мультипликативная группа любого полутела является группой без кручения, то есть все ее отличные от* 1 *элементы имеют бесконечный порядок.*

Следствие 1. *Для каждого ядра* A *любого полутела* U *если* $a\in U$, $n\in\mathbb{N}$ *и* $a^n\in A$, *то* $a\in A$.

Следствие 2. *Конечные полутела тривиальны.*

Утверждение 6 [7, теорема 2]. *Пусть* $a\geqslant 1$ *— центральный элемент полутела* U. *Тогда*

$$(a)=\{u\in U:\exists n\in\mathbb{N}\quad a^{-n}\leqslant u\leqslant a^n\},$$

где $\leqslant$ *— естественный порядок на полутеле* U.

Следствие 3. *Для любого полутела* U *имеет место равенство*

$$(2)=\{u\in U:\exists n\in\mathbb{N}\quad 2^{-n}\leqslant u\leqslant 2^n\}.$$

§ 2. Образующие

Сначала рассмотрим несколько свойств, касающихся образующих.

Свойство 1. *Всякое нетривиальное полутело с образующей обладает образующей* >1.

Если u — образующая полутела U, то по лемме 3 образующей U будет элемент $u+u^{-1}$, а значит, и элемент $(u+u^{-1})^2=u^2+u^{-2}+2>1$. □

Свойство 2. *Гомоморфные образы полутел с образующей суть полутела с образующей.*

Если $f:U\to V$ — гомоморфизм полутела U на полутело V и $U=(u)$, то $V=(f(u))$, поскольку прообраз ядра при гомоморфизме полутел всегда является ядром. □

Свойство 3. *Всякое полутело, имеющее конечное множество образующих, является полутелом с образующей.*

Действительно, пусть дано полутело $U=(u_1)\cdot\ldots\cdot(u_n)$ с конечным множеством образующих $\{u_1,\ldots,u_n\}$. По лемме 3 все элементы $u_1,\ldots,u_n$ лежат в ядре (u) при $u=u_1+u_1^{-1}+\ldots+u_n+u_n^{-1}$. Поэтому $U=(u)$. □

Частным случаем свойства 3 служат:

Свойство 4. *Всякое полутело, имеющее конечное множество ядер, является полутелом с образующей.*

Свойство 5. *Конечнопорожденные ядра в любом идемпотентном полутеле — главные.*

Свойство 5 — известный в теории решеточно упорядоченных групп результат [10, с. 396].

Свойство 6. *Прямое произведение конечного числа полутел* $U_1,\ldots,U_n$ *имеет образующую тогда и только тогда, когда все* U_k *— полутела с образующей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $U = U_1 \times \ldots \times U_n$. В силу свойства 2 достаточно показать, что если $U_k = (a_k)$ для $k = 1, \ldots, n$, то U — полутело с образующей. Определим $u_k \in U$, $k = 1, \ldots, n$, как строку, в которой все координаты, кроме k-й, равны 1, а на k-м месте стоит элемент a_k. Ясно, что $(u_1) \cdot \ldots \cdot (u_n) = U$. Остается применить свойство 3. (Можно доказать, что элемент $(a_1, \ldots, a_n)$ будет образующей полутела $(a_1) \times \ldots \times (a_n)$, но это требует иной техники. См. [8, пункт 2].) □

Свойство 7. *Если элемент u является образующей (центральной образующей) сократимого полутела U, то $R(U)(u-1)R(U) = R(U)$ (элемент $u-1$ обратим в $R(U)$).*

Это свойство вытекает из леммы 1. Обратное утверждение неверно: в сократимом неограниченном полутеле $u - 1 = 1$ при $u = 2$.

Легко видеть, что в свойствах 1–3 и 6 слово «образующая» можно заменить на словосочетание «центральная образующая».

Пример 1. Пусть $U(X)$ — полуполе всех непрерывных положительных вещественных функций, заданных на произвольном топологическом пространстве X, с поточечными операциями сложения и умножения функций. В [12] доказано, что $U(X)$ имеет образующую тогда и только тогда, когда пространство X псевдокомпактно, то есть все функции из $U(X)$ ограниченные. Данные условия равносильны ограниченности полуполя $U(X)$. Именно на этом основании и было введено понятие ограниченного полутела (см. [8]). Отметим также, что для того чтобы все конечнопорожденные ядра полуполя $U(X)$ были главными, необходимо и достаточно, чтобы X являлось F-пространством [12].

Теорема 1. *Любое полутело (идемпотентное полутело) U вкладывается — в качестве наибольшего собственного ядра — в зероидное (идемпотентное) полутело V с центральной образующей. При этом все собственные ядра полутела V суть в точности ядра полутела U.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть U — произвольное полутело. Возьмем бесконечную циклическую группу $G = \{x^m, \quad m \in \mathbb{Z}\}$ и рассмотрим мультипликативную группу $V = U \times G$. Положим $ux^m \equiv (u, x^m)$ и $ux^0 \equiv u$ для любых $u \in U$ и $m \in \mathbb{Z}$. Операция умножения на множестве V покоординатная. Введем операцию сложения на V: для любых $m, n \in \mathbb{Z}$ и элементов $u, v \in U$

$$ux^m + vx^n = vx^n + ux^m = \begin{cases} ux^m, \text{ если } m > n; \\ (u+v)x^m \text{ при } m = n. \end{cases}$$

Легко проверить, что данное множество V с введенными операциями умножения и сложения является зероидным полутелом (а если U идемпотентное, то идемпотентным), имеющим подполутело U. Покажем, что любое ядро A в U является и ядром в V. Поскольку U — прямой сомножитель мультипликативной группы V, то A будет нормальной подгруппой в V. Возьмем $s, t \in A$, $u, v \in U$ и $ux^m + vx^n \in V$ с условием $ux^m + vx^n = 1$. Заметим, что одно из чисел m или n равно нулю, а другое — не больше нуля. Пусть $m = 0$. Если $n < 0$, то $1 = ux^m + vx^n = u$ и $ux^m s + vx^n t = s \in A$; если $n = 0$, то $u + v = 1$ и $ux^m s + vx^n t = us + vt \in A$.

Рассмотрим теперь $ux^m \in V \setminus U$, то есть $u \in U$, $m \neq 0$, и возьмем произвольный элемент $vx^n \in V$. Выберем целое число k так, чтобы $-mk < n < mk$. Тогда $(ux^m)^{-k} + vx^n + (ux^m)^k = (ux^m)^k$ принадлежит главному ядру (ux^m), значит, $vx^n = (ux^m)^{-k} + vx^n$ также принадлежит (ux^m) по утверждению 4. Поэтому элемент ux^m порождает все полутело V, а элемент x служит центральной образующей полутела V. Отсюда также следует, что U является наибольшим собственным ядром полутела V. □

Возникает **вопрос** о вложимости произвольного сократимого полутела в сократимое полутело с образующей. Дадим одно достаточное условие.

Предложение 1. *Если полутело вложимо в тело, то оно вложимо в некоторое сократимое полутело с центральной образующей.*

Доказательство. Пусть полутело U является подполутелом тела T. Возьмем множество V всевозможных формальных степенных рядов

$$f = t_m x^m + t_{m-1} x^{m-1} + \ldots, \quad m \in \mathbb{Z} \tag{2.1}$$

от центральной переменной x с коэффициентами $t_k \in T$ и старшим коэффициентом $t_m \in U$. Относительно обычных операций сложения и умножения степенных рядов V становится полутелом, содержащим полутело U в качестве подполутела при отождествлении всех $u \in U$ с $ux^0 \in V$. Центральный элемент $x \in V$ больше 1, так как $x = 1 + (x + (-1)x^0)$. Он служит образующей полутела V. Действительно, возьмем в V произвольный элемент f вида (2.1). При $n = |m| + 1$ имеем

$$x^n = f + \big(x^n + (-t_m)x^m + (-t_{m-1})x^{m-1} + \ldots\big) \text{ и } f = x^{-n} + (t_m x^m + \ldots + (t_{-n} - 1)x^{-n} + \ldots).$$

Значит, $x^{-n} < f < x^n$, и $f \in (x)$ по утверждению 6. Заметим, что кольцом разностей полутела V будет тело всех формальных степенных рядов (2.1) с коэффициентами из тела T. □

Предложение 2. *Если сократимое полутело содержит подполутело, изоморфное бесконечному прямому произведению нетривиальных полутел, то оно не вложимо ни в какое ограниченное полутело.*

Доказательство. Пусть сократимое полутело U содержит подполутело $V = U_1 \times \ldots U_n \ldots$, где U_n — нетривиальные сократимые полутела для всех натуральных чисел n. При этом $(1, 1, \ldots, 1, \ldots) = 1$ в U. Предположим от противного, что U является подполутелом ограниченного полутела W. Рассмотрим элемент $u = (2, 4, \ldots, 2^n, \ldots) \in V \subseteq (2)$. По следствию 3 найдется такое натуральное n, что $u < 2^n$ в полутеле W. Это значит, что $u + w = 2^n$ для некоторого единственного элемента $w \in W$. Кольцо разностей R полутела W содержит подкольцо $V - V$, которое будет кольцом разностей полутела V. Поскольку кольцо $(U_1 - U_1) \times \ldots \times (U_n - U_n) \times \ldots$ также служит кольцом разностей для V, то можно отождествить $V - V$ с $(U_1 - U_1) \times \ldots \times (U_n - U_n) \times \ldots$ и считать, что $w \in V - V$. Тогда $w = (2^n - 2, 2^n - 4, \ldots, 0, -2^n, (-3)2^n, \ldots) \in W$ является делителем нуля в кольце $V - V \subseteq W - W$, что невозможно. □

Пример 2. По предложению 2 сократимое полуполе $(R^+)^m$, где m — бесконечный кардинал, не вкладывается в ограниченные полутела.

Теорема 2. *Для того чтобы прямое произведение непустого семейства $(U_i)_{i \in I}$ нетривиальных полутел имело центральную образующую, необходимо и достаточно, чтобы I было конечно, а все U_i были полутелами с центральной образующей.*

Доказательство. *Достаточность* вытекает из свойства 6.

Необходимость. Пусть прямое произведение $U = \prod U_i$ непустого семейства $(U_i)_{i \in I}$ нетривиальных полутел имеет центральную образующую (a_i). В силу свойства 1 считаем, что $(a_i) > 1$ в U. По свойству 1 для любого индекса $i \in I$ элемент $a_i > 1$ в полутеле U_i и служит его центральной образующей. Предположим, что множество I бесконечно; тогда оно содержит копию натурального ряда $\mathbb{N}$. Возьмем элемент $(b_i) \in U$ так, что $b_k = a_k^k$ при любом $k \in \mathbb{N} \subseteq I$ и $b_i = 1$ при $i \in I \backslash \mathbb{N}$. По утверждению 1 существует $n \in \mathbb{N}$, для которого $(b_i) \leqslant (a_i)^n = (a_i^n)$. При $i = n+1$ имеем $a_{n+1}^{n+1} \leqslant a_{n+1}^n$, откуда $a_{n+1} \leqslant 1$. Получаем противоречие с $a_{n+1} > 1$. Теорема доказана. □

Частным случаем является

Теорема 3. *Прямое произведение непустого семейства $(U_i)_{i \in I}$ полутел является ограниченным полутелом тогда и только тогда, когда почти все сомножители U_i тривиальны, а остальные — бесконечные ограниченные полутела.*

Замечание 1. Известно, что многообразие $\mathbf{I}$ всех идемпотентных полуполей содержится в любом нетривиальном подмногообразии многообразия $\mathbf{J}$ всех идемпотентных полутел [11, с. 215]. Рассмотрим произвольное нетривиальное многообразие $\mathbf{M}$ полутел. По теореме 3 в $\mathbf{M}$ существует неограниченное полутело U. Факторполутело $U/(2) \in \mathbf{M}$ нетривиально и идемпотентно. Поэтому $\mathbf{M} \cap \mathbf{J}$ — нетривиальное подмногообразие в $\mathbf{J}$. Значит, $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{M} \cap \mathbf{J} \subseteq \mathbf{M}$. Вывод: *многообразие всех идемпотентных полуполей является наименьшим нетривиальным многообразием и в классе всевозможных полутел.*

§ 3. Спектральная характеризация

Собственное ядро P полутела U называется *неприводимым* (*максимальным*), если из $A \cap B \subseteq P$ следует $A \subseteq P$ или $B \cap P$ для любых $A, B \in \operatorname{Con} U$ (если P не содержится ни в каком другом собственном ядре полутела U).

Пространство $\operatorname{Sp}(U)$ всех неприводимых ядер полутела $U,$ рассматриваемое со стоуновской топологией, назовем *неприводимым спектром* полутела $U.$ Его подпространство $\operatorname{Max} U,$ состоящее из всех максимальных ядер, называется *максимальным спектром* полутела $U.$ В пучковых представлениях неприводимый спектр полутела заменяет понятие первичного спектра кольца.

Множества $D(A) = \{P \in \operatorname{Sp}(U) : A \nsubseteq P\},$ $A \in \operatorname{Con} U,$ объявляются открытыми в стоуновской топологии. Для элемента $u \in U$ полагаем $D(u) = D((u)).$ Ясно, что $D(1) = \varnothing,$ $D(U) = \operatorname{Sp}(U)$ и $D(\prod A_i) = \bigcup D(A_i)$ для любого семейства ядер A_i полутела $U.$ Для $A, B \in \operatorname{Con} U$ выполняется равенство $D(A \cap B) = D(A) \cap D(B).$ Тем самым, множества $D(A)$ действительно дают топологию на множестве $\operatorname{Sp}(U).$ Множества $D(u),$ $u \in U,$ образуют базу стоуновской топологии на $\operatorname{Sp}(U).$ Аналогично вводится топология на множестве $\operatorname{Max} U.$ Получаем T_0-пространство $\operatorname{Sp}(U)$ и T_1-пространство $\operatorname{Max} U.$

Лемма 4. *Если A, B — ядра полутела U и K — его ядерное подполутело, то* $(A \cap B)K = AK \cap BK.$

Доказательство. Предположим сначала, что $A \cap B = \{1\}.$ Рассмотрим в полутеле U ядра $(A \cap BK)(B \cap K),$ $(B \cap AK)(A \cap K)$ и ядерное подполутело $V = (A \cap BK)(B \cap AK)K.$ Эти ядра являются дополнениями элемента K в интервале $[(A \cap K)(B \cap K), V]$ модулярной решетки $\operatorname{Con} V,$ поскольку

$$(A \cap BK)(B \cap K)K = (A \cap BK)K = AK \cap BK = (B \cap AK)K = (B \cap AK)(A \cap K)K,$$

$$(A \cap BK)(B \cap K) \cap K = (B \cap K)((A \cap BK) \cap K) = (B \cap K)(A \cap K) = (B \cap AK)(A \cap K) \cap K.$$

Значит, $(A \cap BK)(B \cap K) = (B \cap AK)(A \cap K)$ по утверждению 1. Докажем равенство $A \cap BK = A \cap K.$ Достаточно проверить включение $A \cap BK \subseteq A \cap K.$ Пусть $a \in A \cap BK.$ Тогда по доказанному $a \in (A \cap K)(B \cap AK),$ то есть $a = a_1 b$ для некоторых $a_1 \in A \cap K$ и $b \in B.$ Поэтому $a_1^{-1} a = b \in A \cap B = \{1\},$ откуда $a = a_1 \in A \cap K.$ И мы имеем

$$AK \cap BK = K(A \cap BK) = K(A \cap K) = K = (A \cap B)K. \tag{3.1}$$

Пусть теперь $A \cap B = D.$ Рассмотрим полутело $U/D.$ Будем обозначать ядра полутела U/D со штрихами, то есть если ядро $C \supseteq D,$ то $C' = C/D.$ Поскольку $A'B' = \{1\},$ то в силу (3.1) получаем

$$(A(DK) \cap B(DK))' = (A(DK))' \cap (B(DK))' = (A'(DK)') \cap (B'(DK)') = (DK)',$$

откуда

$$AK \cap BK = A(DK) \cap B(DK) = DK = (A \cap B)K. \qquad \square$$

Теорема 4. *Каждое собственное ядро любого полутела содержится в некотором его неприводимом ядре.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A — собственное ядро полутела U. Рассмотрим два случая: $(2)A \neq U$ и $(2)A = U$. Пусть $(2)A \neq U$ и $b \in U \backslash (2)A$. Рассмотрим упорядоченное по включению множество ядерных подполутел $\{K \in \mathrm{Con}\, U : (2)A \subseteq K, b \notin K\}$. Это множество не пусто и удовлетворяет условию леммы Цорна, поскольку объединение цепочки ядер полутела всегда является ядром. Поэтому в нем найдется максимальный элемент M. Докажем, что ядро M неприводимо. Пусть $B \cap C \subseteq M$ для некоторых ядер B, C полутела U. Тогда по лемме 4 $BM \cap CM = (B \cap C)M = M$. Так как $b \notin M$, то $b \notin BM$ или $b \notin CM$. Значит, $B \subseteq BM = M$ или $C \subseteq CM = M$.

Пусть $(2)A = U$. Тогда $2 \notin A$, и упорядоченное множество ядер $\{K \in \mathrm{Con}\, U : A \subseteq K, 2 \notin K\}$ имеет максимальный элемент M. Проверим неприводимость ядра M. Пусть $B \cap C \subseteq M$ для некоторых $B, C \in \mathrm{Con}\, U$. Допустим от противного, что B и C не содержатся в M. Тогда $BM = U$ и $CM = U$. В интервале $[(B \cap M)(C \cap M), U]$ решетки $\mathrm{Con}\, U$ элемент M будет иметь два дополнения $(B \cap M)C$ и $(C \cap M)B$: $(B \cap M)CM = U = (C \cap M)BM$ и в силу модулярности решетки $\mathrm{Con}\, U$

$$(B \cap M)C \cap M = (B \cap M)(C \cap M) = (C \cap M)B \cap M.$$

По утверждению 1 имеем $(B \cap M)C = (C \cap M)B$. Откуда снова по закону модулярности получаем противоречие:

$$B \subseteq BC = (B \cap M)C(C \cap M)B = (B \cap M)C \cap (C \cap M)B =$$
$$= (BM)[(C(CM)B)] = (B \cap M)(C \cap M)(B \cap C) \subseteq M.$$

Следствие 4. *Максимальные ядра любого полутела неприводимы.*

Теорема 4 и ее следствие показывают, что $\mathrm{Max}\, U \subseteq \mathrm{Sp}\,(U) \neq \varnothing$ для любого нетривиального полутела U. Но существуют полутела U, не имеющие максимальных ядер: $\mathrm{Max}\, U = \varnothing$. Приведем два примера.

Пример 3. Цепное полуполе $^*(\mathbb{R}^+) = (^*\mathbb{R})^+$, являющееся неархимедовым расширением полуполя $\mathbb{R}^+$ всех положительных действительных чисел.

Пример 4. Возьмем любое простое полуполе, скажем $\mathbb{R}^+$, и последовательно расширим его с помощью конструкции теоремы 1 счетное число раз. Тогда в объединении получим полуполе, решетка собственных ядер которого изоморфна цепи $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

Теорема 5. *Для любого нетривиального полутела U эквивалентны следующие утверждения:*

1) *U — полутело с образующей;*
2) *неприводимый спектр $\mathrm{Sp}\,(U)$ компактен;*
3) *максимальный спектр $\mathrm{Max}\, U$ компактен и каждое собственное ядро полутела U содержится в некотором его максимальном ядре.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) $\Rightarrow$ 2) & 3). Пусть A — собственное ядро полутела $U = (e)$. Рассмотрим упорядоченное по включению множество ядер в U, содержащих A и не содержащих e. По лемме Цорна существует максимальный элемент M в этом множестве. Очевидно, M будет максимальным ядром полутела U.

Далее пусть $\bigcup D(A_i) = \mathrm{Sp}\,(U)$ для некоторого семейства ядер A_i из $\mathrm{Con}\, U$. Тогда $\mathrm{Sp}\,(U) = D(\prod A_i)$, и $\prod A_i = U$. Действительно, если $\prod A_i$ — собственное ядро в U, то по доказанному оно содержится в некотором максимальном ядре M, и $M \in \mathrm{Sp}\,(U)$ по следствию теоремы 4, что невозможно. Найдется конечное число ядер $A_1, \ldots, A_n$ из семейства (A_i), таких, что $e \in A_1 \ldots A_n$. Откуда $A_1 \ldots A_n = U$. Значит, $D(A_1) \cap \ldots \cap D(A_n) = D(U) = \mathrm{Sp}\,(U)$. Это доказывает и компактность спектра $\mathrm{Max}\, U$.

2) $\Rightarrow$ 1). Имеем $\mathrm{Sp}\,(U) = D(a_1) \cap \ldots \cap D(a_n)$ для конечного числа некоторых элементов $a_1, \ldots, a_n \in U$. Тогда $\prod (a_i) = U$ в силу теоремы 4. Остается воспользоваться свойством 3. Импликация 3) $\Rightarrow$ 1) доказывается аналогично.

МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 3

Пример 5. Пусть X — бесконечное множество и $\mathbb{Q}^{\vee}$ — полуполе рациональных чисел со сложением max и обычным умножением. Рассмотрим идемпотентное полуполе U_1 всех функций $f : X \to \mathbb{Q}^{\vee}$, почти всюду равных 1. Любое собственное ядро полуполя U_1 является пересечением некоторых его максимальных ядер $M_x = \{f \in U_1 : f(x) = 1\}$, $x \in X$. Спектры $\mathrm{Sp}\,(U_1)$ и $\mathrm{Max}\,(U_1)$ совпадают и гомеоморфны некомпактному дискретному пространству X.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Weinert H. J. Ein Struktursatz für idempotente Halbkörper // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1964. — Vol. 15, № 3–4. — P. 289–295.
2. Полин С. В. Простые полутела и полуполя // Сибирский математический журнал. — 1974. — Т. 15, № 1. — С. 90–101.
3. Hutchins H. C., Weinert H. J. Homomorphisms and kernel of semifields // Periodica Mathematica. — 1990. — Vol. 21(2). — P. 113–152.
4. Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семенова И. А. Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // Фундаментальная и прикладная математика. — 1998. — Т. 4, № 2. — С. 493–510.
5. Вечтомов Е. М. О свойствах полутел // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. — 2001. — Вып. 3. — С. 11–20.
6. Семенов А. Н. О решетке конгруэнции полутел // Вестник ВятГГУ. — 2003. — № 9. — С. 92–95.
7. Черанева А. В. О конгруэнциях на полутелах // Чебышевский сборник. — 2005. — Т. 6, вып. 4(16). — С. 164–171.
8. Вечтомов Е. М., Черанева А. В. К теории полутел // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, вып. 2. — С. 161–162.
9. Golan J. S. Semirings and Their Applications. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht–Boston–London, 1999.
10. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984.
11. Копытов В. М. Решеточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984.
12. Чупраков Д. В. О главных ядрах полуполей непрерывных функций // Современная математика и математическое образование, проблемы истории и философии математики. Международная научная конференция. Тамбов, 2008. С. 33–36.

Поступила в редакцию 29.03.09

E. M. Vechtomov, A. V. Cheraneva
Semifields with generator

The article deals with the theory of semirings and semifields. The definition of semifield's generator is given. It is shown that any semifield is embedded into a semifield with generator. Spectral characteristics of semifield with generator are also given.

Keywords: Semifield, kernel of semifield, semifield's generator, irreducible spectrum

Mathematical Subject Classifications: 16Y60, 12K10

Вечтомов Евгений Михайлович, д. ф.-м. н., профессор, зав. кафедрой высшей математики, Вятский государственный гуманитарный университет, 610002, Россия, г. Киров, ул. Красноармейская, 26 (корп. 1), E-mail: vecht@mail.ru
Черанева Анна Владимировна, к. ф.-м. н., старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики, Вятский государственный университет, 610000, Россия, г. Киров, ул. Московская, 36 (корп. 1), E-mail: ACh127@yandex.ru