МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 3

УДК 517.977

© *Д. А. Серков*

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ КОНСТРУКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ[1]

Рассматривается задача управления при наличии динамических помех. Приводится пример управляемой системы и позиционной стратегии, для которых пучок конструктивных идеальных движений, формирующий гарантированный результат, существенно изменяется при сужении множества допустимых помех до программных помех.

Ключевые слова: дифференциальные игры, программная помеха, позиционная стратегия, конструктивные движения.

Введение

В теории дифференциальных игр определяется пучок конструктивных идеальных движений [1, § 6], [2, гл. 1] (обозначим его $X(t,z,U)$ и назовем «игровым»), порожденный из начальной позиции (t,z) позиционной стратегией U и участвующий в определении гарантированного результата $\Gamma^*(t,z,U)$ для этой стратегии:

$$\Gamma^*(t,z,U) \equiv \sup_{x(\cdot)\in X(t,z,U)} \gamma(x(\cdot)),$$

$\gamma(x(\cdot))$ — значение показателя качества на движении $x(\cdot)$. В случае когда помеха заведомо является программной, пучок конструктивных идеальных движений, определяющий значение гарантированного результата, может быть сформирован иначе, чем в ситуации неопределенного характера помехи. Именно, пусть даны начальная позиция $(t,z)\in G$ и позиционная стратегия U. При фиксированной программной помехе $v[\cdot]$ мы получим конструктивные идеальные движения $X(t,z,U,v[\cdot])$, отвечающие этой помехе. Следовательно, гарантированный результат для стратегии U в позиции (t,z), как верхняя грань значений показателя качества на всех возможных конструктивных идеальных движениях при всех возможных реализациях помехи, дается выражением

$$\Gamma^*_{pro}(t,z,U) \equiv \sup_{\substack{v[\cdot]\in \mathbf{V}_{[t,\vartheta]} \\ x(\cdot)\in X(t,z,U,v[\cdot])}} \gamma(x(\cdot)),$$

где $\mathbf{V}_{[t,\vartheta]}$ обозначает множество всех программных помех. Величина $\Gamma^*_{pro}(t,z,U)$ не превосходит гарантированного результата $\Gamma^*(t,z,U)$ для произвольных помех в силу включения

$$\bigcup_{v[\cdot]\in \mathbf{V}_{[t,\vartheta]}} X(t,z,U,v[\cdot]) \subseteq X(t,z,U).$$

Естественно, возникает вопрос: имеет ли место равенство в последнем соотношении? Приводимый ниже пример показывает, что в общем случае объединение программных пучков конструктивных идеальных движений не является плотным в игровом пучке таких движений (в топологии равномерной сходимости).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00313-а).

§ 1. Пример

Рассмотрим управляемую систему, описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями и краевым условием:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(\tau) = v[\tau], \quad v[\tau], u[\tau] \in \{-1, 1\}, \\ \dot{x}_2(\tau) = u[\tau], \quad \tau \in [0,1], \quad (x_1(0), x_2(0)) = (0,0). \end{cases} \tag{1}$$

Измеримые по Борелю [3, I.4] реализации управления и помехи, удовлетворяющие ограничениям (1), назовем допустимыми и их множества обозначим $\mathbf{U}_{[0,1]}$ и $\mathbf{V}_{[0,1]}$ соответственно. Обозначим $x(\cdot, t, z, u[\cdot], v[\cdot])$ решение задачи (1) в смысле Каратеодори [3, II.4] на интервале $[t, \vartheta]$.

Обозначим $\Delta = \{\tau_0 = t < \tau_1 < \ldots < \tau_{n_\Delta} = \vartheta\}$ разбиение отрезка $[t, \vartheta] \subseteq T$, а $\mathbf{d}(\Delta)$ — диаметр разбиения $\Delta\colon$ $\mathbf{d}(\Delta) \equiv \max\{\tau_i - \tau_{i-1} \mid i \in \overline{1, n_\Delta}\}$.

Всякую функцию $U(\cdot) : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \mapsto \{-1, 1\}$, действующую из расширенного пространства состояний системы (1) во множество $\{-1, 1\}$, назовем позиционной стратегией управления. Множество всех таких стратегий обозначим $\mathbf{U}_{pos}$.

Определим стандартным образом пошаговое движение [1, § 6] $x(\cdot, t, z, \{U, \Delta\}, v[\cdot])$, порожденное парой $\{U, \Delta\}$, где U — позиционная стратегия управления, а Δ — разбиение отрезка $[t, \vartheta]$, и помехой $v[\cdot]$ из начального положения (t, z), и соответствующую реализацию управления $u(\cdot, t, z, \{U, \Delta\}, v[\cdot])$:

$$\begin{gathered} u(\cdot, t, z, \{U, \Delta\}, v[\cdot])|_{[\tau_i, \tau_{i+1})} \equiv U(\tau_i, x(\tau_i)), \\ x(\tau, t, z, \{U, \Delta\}, v[\cdot]) \equiv x(\tau, \tau_i, x(\tau_i), u(\cdot), v[\cdot]), \quad \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \quad i \in \overline{0, n_\Delta - 1}. \end{gathered} \tag{2}$$

Для произвольных $(t, z) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$, $U \in \mathbf{U}_{pos}$ и $v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[0,1]}$ обозначим $X(t, z, U, v[\cdot])$ и $X(t, z, U)$ замыкание в пространстве $C([0,1]; \mathbb{R}^2)$ множества всех пределов последовательностей вида

$$\left\{ x(\cdot, t, z^k, \{U, \Delta^k\}, v[\cdot]),\ k \in \mathbb{N} \ \middle|\ \lim_{k\to\infty} z^k = z,\ \lim_{k\to\infty} \mathbf{d}(\Delta^k) = 0 \right\}$$

и

$$\left\{ x(\cdot, t, z^k, \{U, \Delta^k\}, v^k[\cdot]),\ k \in \mathbb{N} \ \middle|\ \lim_{k\to\infty} z^k = z,\ \lim_{k\to\infty} \mathbf{d}(\Delta^k) = 0,\ v^k[\cdot] \in \mathbf{V}_{[0,1]} \right\}$$

соответственно. Элементы множества $X(t, z, U)$, определенные, в частности, в [1, § 6], называются конструктивными идеальными движениями, и с их помощью определяется гарантированный результат [1, § 18] для стратегии U :

$$\Gamma^*(t, z, U) \equiv \sup_{x(\cdot) \in X(t,z,U)} \gamma(x(\cdot)),$$

где γ — показатель качества, рассматриваемый на множестве движений системы (1). Поэтому для краткости, как в некоторых других источниках, назовем множество $X(t, z, U)$ игровым пучком движений.

Из определений сразу следует, что при любых $(t, z) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$, $U \in \mathbf{U}_{pos}$ выполнено включение

$$\bigcup_{v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[0,1]}} X(t, z, U, v[\cdot]) \subseteq X(t, z, U). \tag{3}$$

Далее приводится пример стратегии, для которой, наряду с (3), выполняется неравенство

$$\bigcup_{v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[0,1]}} X(t, z, U, v[\cdot]) \neq X(t, z, U). \tag{4}$$

Пусть позиционная стратегия управления имеет вид

$$\bar{U}(x_1,x_2) \equiv \begin{cases} -\operatorname{sign}^-(x_1), & x_1 \cdot x_2 \geqslant 0, \\ \operatorname{sign}^-(x_1), & x_1 \cdot x_2 < 0, \end{cases} \qquad \operatorname{sign}^-(x) \equiv \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x \leqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

Для удобства приведем таблицу значений функции $\bar{U}$:

	$x_1 < 0$	$x_1 = 0$	$x_1 > 0$
$x_2 < 0$	1	1	1
$x_2 = 0$	1	1	-1
$x_2 > 0$	-1	1	-1

Замечание 1. Стратегия могла бы иметь такой вид в случае, когда стороне, формирующей управление, были доступны для наблюдения лишь величины x_1 и $x_1 \cdot x_2$, а целью управления u являлась стабилизация переменной x_2 в окрестности нуля.

1. Пусть последовательность начальных состояний $\{(z_1^k, z_2^k) : k \in \mathbb{N}\}$ стремится к нулю, а $\{\Delta^k : k \in \mathbb{N}\}$ — произвольная последовательность разбиений отрезка $[0,1]$ с измельчающимся шагом: $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{d}(\Delta^k) = 0$. Выберем последовательность допустимых программных помех $\{v^k[\cdot] : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbf{V}_{[0,1]}$ так, чтобы для первой координаты $x_1^k(\cdot)$ движения, порожденного соответствующей программной помехой $v^k[\cdot]$, для всех $\tau \in \Delta^k$ таких, что $\tau \geqslant |z_1^k|$, выполнялись соотношения $x_1^k(\tau) = 0$.

Тогда, в силу определения стратегии $\bar{U}$ и выбора начальной позиции, получим равенство $u^k(\cdot) \equiv u(\tau, 0, (z_1^k, z_2^k), \{\bar{U}, \Delta^k\}, v^k[\cdot]) = 1$ при всех $\tau \in [|z_1^k| + \mathbf{d}(\Delta^k), 1]$, $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, с учетом этого выбора получим

$$x_2(\tau, 0, (z_1^k, z_2^k), \{\bar{U}, \Delta^k\}, v^k[\cdot]) \geqslant \tau - |z_1^k| - \mathbf{d}(\Delta^k), \quad \tau \in [0,1], \quad k \in \mathbb{N},$$

то есть игровой пучок $X(0,(0,0),\bar{U})$ содержит движение $x(\cdot) = (x_1(\cdot), x_2(\cdot))$, для которого выполнено равенство

$$x_2(\tau) = \tau, \quad \tau \in [0,1]. \tag{6}$$

2. Пусть заданы произвольная помеха $v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[0,1]}$, последовательность начальных состояний $\{(z_1^k, z_2^k) : k \in \mathbb{N}\}$, стремящихся к нулю в $\mathbb{R}^2$, и последовательность разбиений $\{\Delta^k : k \in \mathbb{N}\}$ отрезка $[0,1]$ с измельчающимся шагом: $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{d}(\Delta^k) = 0$. Обозначим $x_1^k(\cdot)$ первую координату пошагового движения $x^k(\cdot) \equiv x(\cdot\,, 0, (z_1^k, z_2^k), \{\bar{U}, \Delta^k\}, v[\cdot])$:

$$x_1^k(\tau) = z_1^k + \int_0^\tau v[s]ds, \qquad \tau \in [0,1].$$

Лемма 1. *Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся $K_\varepsilon, N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такие, что для всех $k > K_\varepsilon$ множество нулей $L_0(x_1^k(\cdot))$ функции $x_1^k(\cdot)$ содержится в объединении не более чем N_ε интервалов с общей длиной, не превосходящей $\varepsilon/2$.*

Доказательство. Обозначим $\mu(S)$ меру Лебега произвольного измеримого множества $S \subseteq [0,1]$ и назовем величину

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mu(S \cap [\tau - h, \tau + h]))}{2h} \tag{7}$$

плотностью множества S в точке $\tau \in [0,1]$, если этот предел существует [4, гл. 3]. Обозначим $\varphi_{[0,1]}(S) \subseteq [0,1]$ множество точек, в которых плотность множества S равна 1.

Рассмотрим множество нулей первой координаты конструктивного идеального движения, порожденного последовательностью $\{x^k(\cdot) : k \in \mathbb{N}\}$ — $L_0(x_1(\cdot))$, где

$$x_1(\tau) = \int_0^\tau v[s]ds, \qquad \tau \in [0,1].$$

Отрезок $[0,1]$ представляется в виде объединения непересекающихся множеств

$$[0,1] = ([0,1]\backslash L_0(x_1(\cdot))) \cup L_0^s(x_1(\cdot)) \cup L_0^d(x_1(\cdot)), \tag{8}$$

где $L_0^s(x_1(\cdot)) \subseteq L_0(x_1(\cdot))$ — сингулярные точки множества $L_0(x_1(\cdot))$, т. е. обладающие открытой окрестностью в $[0,1]$, не содержащей точек из $L_0(x_1(\cdot))$; $L_0^d(x_1(\cdot)) \equiv L_0(x_1(\cdot))\backslash L_0^s(x_1(\cdot))$ — точки накопления множества $L_0(x_1(\cdot))$, т. е. точки, каждая окрестность которых содержит отличные от них элементы из $L_0(x_1(\cdot))$.

Множество $L_0^s(x_1(\cdot))$ не более чем счетно, следовательно, оно измеримо и имеет меру ноль

$$\mu(L_0^s(x_1(\cdot))) = 0. \tag{9}$$

Множество $L_0(x_1(\cdot))$ измеримо как прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении, и, значит, множество $L_0^d(x_1(\cdot))$ также измеримо. Обозначим

$$T_+ \equiv \{\tau \in [0,1] \mid v[\tau] = 1\}, \quad T_- \equiv \{\tau \in [0,1] \mid v[\tau] = -1\}.$$

Заметим, что множества T_+, T_- измеримы, $T_+ \cap T_- = \varnothing$ и $[0,1] = T_+ \cup T_-$.

Из определения $L_0^d(x_1(\cdot))$ следует, что для каждого $\tau \in L_0^d(x_1(\cdot))$ существует последовательность $\{\tau_i : i \in \mathbb{N}\} \subset L_0(x_1(\cdot)) \setminus \{\tau\}$, сходящаяся к τ, для которой выполняются равенства

$$\int_\tau^{\tau_i} v[s]ds = 0, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Из соотношений (10) следуют неравенства

$$\frac{\mu(T_+ \cap [\tau - |\tau_i|, \tau + |\tau_i|])}{2|\tau_i - \tau|} \leqslant \frac{3}{4}, \quad \frac{\mu(T_- \cap [\tau - |\tau_i|, \tau + |\tau_i|])}{2|\tau_i - \tau|} \leqslant \frac{3}{4}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Значит, плотность множества T_+, как и множества T_-, в любой точке множества $L_0^d(x_1(\cdot))$ не может равняться 1. Таким образом,

$$L_0^d(x_1(\cdot)) \subseteq [0,1] \setminus (\varphi_{[0,1]}(T_+) \cup \varphi_{[0,1]}(T_-)). \tag{12}$$

В силу теоремы Лебега о точках плотности [4, теорема 3.20] для любого измеримого множества $S \subseteq [0,1]$ выполняется равенство

$$\mu(S \triangle \varphi_{[0,1]}(S)) = 0, \tag{13}$$

где знак $\triangle$ обозначает симметрическую разность двух множеств: $A \triangle B \equiv (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$. В частности, из (13) следует [4, теорема 3.21]

$$\begin{gathered}\mu(\varphi_{[0,1]}(T_+) \cup \varphi_{[0,1]}(T_-)) = \mu(\varphi_{[0,1]}(T_+)) + \mu(\varphi_{[0,1]}(T_-)) - \mu(\varphi_{[0,1]}(T_+) \cap \varphi_{[0,1]}(T_-)) = \\ \mu(\varphi_{[0,1]}(T_+)) + \mu(\varphi_{[0,1]}(T_-)) - \mu(\varphi_{[0,1]}(T_+ \cap T_-)) = \mu(\varphi_{[0,1]}(T_+)) + \mu(\varphi_{[0,1]}(T_-)) - \mu(\varphi_{[0,1]}(\varnothing)) = \\ \mu(\varphi_{[0,1]}(T_+)) + \mu(\varphi_{[0,1]}(T_-)) = \mu(T_+) + \mu(T_-) = 1. \end{gathered} \tag{14}$$

Из соотношений (14), (12) получим

$$\mu(L_0^d(x_1(\cdot))) \leqslant \mu([0,1]) - \mu(\varphi_{[0,1]}(T_+) \cup \varphi_{[0,1]}(T_-)) = 0. \tag{15}$$

Значит, в силу (8), (9), (15), множество $[0,1]\backslash L_0(x_1(\cdot))$ имеет меру 1. Как всякое открытое множество в $[0,1]$, множество $[0,1]\backslash L_0(x_1(\cdot))$ представляется не более чем счетным объединением открытых в $[0,1]$ непересекающихся интервалов. Выберем из этого объединения конечный набор интервалов с общей длиной большей, чем $1 - \varepsilon/4$:

$$L_0(x_1(\cdot)) \subseteq [0,1] \setminus \bigcup_{i \in \overline{1, N_\varepsilon}} (a_i, b_i).$$

Сузим каждый из этих интервалов по краям на величину $\zeta(\varepsilon) \equiv \varepsilon/(8N_\varepsilon)$. Если длина интервала не позволяет этого, удаляем такой интервал из объединения:

$$(a_i', b_i') \equiv \begin{cases} (a_i + \zeta(\varepsilon), b_i - \zeta(\varepsilon)), & b_i - a_i > 2\zeta(\varepsilon), \\ ((b_i - a_i)/2, (b_i - a_i)/2) = \varnothing, & b_i - a_i \leqslant 2\zeta(\varepsilon). \end{cases}$$

Для дополнения в $[0,1]$ полученной системы интервалов (обозначим ее $L_0^\varepsilon(x_1(\cdot))$) выполнены соотношения

$$O_{\zeta(\varepsilon)}(L_0(x_1(\cdot))) \subseteq L_0^\varepsilon(x_1(\cdot)) \equiv [0,1] \setminus \bigcup_{i \in \overline{1,N_\varepsilon}} (a_i', b_i'), \qquad \mu(L_0^\varepsilon(x_1(\cdot))) \leqslant \varepsilon/2.$$

Так как $L_0(x_1^k(\cdot)) = L_{-z_1^k}(x_1(\cdot))$, а множества уровня непрерывной на компактном множестве функции полунепрерывны сверху по включению по отношению к величине уровня, то из условия $\lim\limits_{k\to\infty} z_1^k = 0$ следует, что для указанного $\zeta(\varepsilon)$ найдется K_ε такое, что для всех $k > K_\varepsilon$ будет выполнено включение

$$L_0(x_1^k(\cdot)) \subseteq O_{\zeta(\varepsilon)}(L_0(x_1(\cdot))).$$

Таким образом, при $k > K_\varepsilon$ множество $L_0^\varepsilon(x_1(\cdot))$ содержит множество $L_0(x_1^k(\cdot))$ и состоит из не более чем N_ε интервалов, с общей длиной не более $\varepsilon/2$.

Пусть

$$Z(k,\varepsilon) \equiv \bigcup_{\substack{\tau_i^k, \tau_{i+1}^k \in \Delta^k \\ [\tau_i^k, \tau_{i+1}^k) \cap L_0^\varepsilon(x_1(\cdot)) \neq \varnothing}} [\tau_i^k, \tau_{i+1}^k).$$

Нетрудно проверить, что мера множества $Z(k,\varepsilon)$ не превосходит величины $\varepsilon/2 + 2N_\varepsilon\,\mathbf{d}(\Delta^k)$ и во всех точках множества $[0,1]\backslash Z(k,\varepsilon)$ функция $x_1(\cdot)$ отлична от нуля. Выберем K_ε' из условия: для любого $k > K_\varepsilon'$ выполнено $2N_\varepsilon\,\mathbf{d}(\Delta^k) < \varepsilon/2$. Тогда при всех $k > \max\{K_\varepsilon, K_\varepsilon'\}$ выполнено включение $L_0(x_1^k(\cdot)) \subseteq Z(k,\varepsilon)$ и мера множества $Z(k,\varepsilon)$ не превосходит ε.

Обозначим через $x_2^k(\cdot)$ вторую координату пошагового движения $x(\cdot, 0, (z_1^k, z_2^k), \{\bar U, \Delta^k\}, v[\cdot])$ управляемой системы (1), порожденного из начального положения $(0, (z_1^k, z_2^k))$ законом управления $\{\bar U, \Delta^k\}$ при помехе $v[\cdot]$. Из определения стратегии $\bar U$ и указанных свойств множества $Z(k,\varepsilon)$ следует, что на интервалах $[\tau_i^k, \tau_{i+1}^k)$ из множества $[0,1]\backslash Z(k,\varepsilon)$ выполняются соотношения

$$\dot x_2^k(\tau) = \begin{cases} -1, & x_2^k(\tau_i^k) > 0, \\ 1, & x_2^k(\tau_i^k) < 0, \end{cases} \tag{16}$$

то есть при $|x_2^k(\tau)| > \mathbf{d}(\Delta^k)$ и $\tau \in [0,1]\backslash Z(k,\varepsilon)$ величина $|x_2^k(\tau)|$ уменьшается с ростом τ со скоростью 1. На интервалах $[\tau_i^k, \tau_{i+1}^k)$ из множества $Z(k,\varepsilon)$ величина $|x_2^k(\tau)|$ может расти с ростом τ со скоростью не более 1. Из этого следует оценка

$$|x_2^k(\tau)| \leqslant \max\{\mathbf{d}(\Delta^k), |z_2^k|\} + \varepsilon, \quad \tau \in [0,1], \quad k > \max\{K_\varepsilon, K_\varepsilon'\}.$$

Ввиду произвольности выбора величины $\varepsilon > 0$, последовательностей начальных состояний $\{(z_1^k, z_2^k) : k \in \mathbb{N}\}$ и разбиений $\{\Delta^k : k \in \mathbb{N}\}$ для любого $x(\cdot) = (x_1(\cdot), x_2(\cdot)) \in X(0,(0,0),\bar U, v[\cdot])$ получаем соотношение

$$|x_2(\tau)| = 0, \quad \tau \in [0,1]. \tag{17}$$

Из равенств (6), (17) следует, что в $X(0,(0,0),\bar U)$ содержится элемент, отстоящий от любого из множеств $X(0,(0,0),\bar U, v[\cdot])$, $v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[0,1]}$ на расстояние не меньшее чем 1. Таким образом, наряду с неравенством (4), выполнено более строгое неравенство

$$\mathbf{cl}_{C([0,1];\mathbb{R}^2)} \left(\bigcup_{v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[0,1]}} X(0,(0,0),\bar U, v[\cdot]) \right) \neq X(0,(0,0),\bar U),$$

здесь знак $\mathbf{cl}_X\, A$ обозначает замыкание множества $A \subset X$ в топологии пространства X.

МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
2. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981. — 288 с.
3. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977. — 624 с.
4. Oxtoby J. C. Measure and category. — New York: Springer–Verlag, 1971. Русский перевод: Окстоби Дж. Мера и категория. — М.: Мир, 1974. — 160 с.

Поступила в редакцию 01.08.09

D. A. Serkov

On a property of constructive motions

The control problem under dynamical disturbance is considered. An example is given of the control system and a feedback control that generates the game bundle of constructive ideal motions wider then the union of all program bundles.

Keywords: differential games, program disturbance, feedback control, constructive motions.

Mathematical Subject Classifications: 49N70, 93B52

Серков Дмитрий Александрович, к. ф.-м. н., главный программист, Институт математики и механики, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, E-mail: serkov@imm.uran.ru