МАТЕМАТИКА

УДК 515.122.536

© *А. А. Грызлов, Е. С. Бастрыков, Р. А. Головастов*

О ТОЧКАХ ОДНОГО БИКОМПАКТНОГО РАСШИРЕНИЯ N

Изучается бикомпактное расширение счётного дискретного пространства, построенное как пространство Стоуна одной булевой алгебры. Получены новые классы точек этого расширения.

Ключевые слова: бикомпактное расширение, пространство Стоуна булевой алгебры, центрированные системы множеств.

Введение

Наиболее изученным и изучаемым бикомпактным расширением счётного дискретного пространства N является его расширение Чеха–Стоуна βN.

Решая вопрос о существовании бикомпактного расширения счётного дискретного пространства, нарост которого несепарабелен, но удовлетворяет условию Суслина, М. Белл построил [1] расширение BN счётного дискретного пространства N как пространство Стоуна некоторой булевой алгебры подмножеств N. Отметим, что и расширение βN является пространством Стоуна булевой алгебры всех подмножеств N.

Дальнейшее изучение расширения BN, построенного Беллом, обнаруживает другие интересные свойства этого пространства. В продолжение исследований М. Белла в [2] были получены свойства этого расширения, позволяющие использовать его для построения некоторых слабых p-точек в βN.

В [3] изучались замыкания различных подмножеств в расширении Белла. Новая база, построенная в [3], позволила получить интересные результаты. Так было показано существование подмножеств $N \subseteq BN$, замыкания которых гомеоморфны βN, и подмножеств BN, являющихся сходящимися последовательностями, и были изучены их свойства.

В работе [4] получены характеристики точек $BN \setminus N$, являющихся пределами сходящихся последовательностей.

В данной работе продолжено изучение расширения Белла. Получены точки $BN \setminus N$, определяемые центрированными семействами различного вида. В первой части работы рассматриваются различные свойства центрированных семейств, необходимые, в частности, и в дальнейшем. Вторая часть содержит основные результаты — теоремы 4, 5, 6, 7. В этих теоремах строятся так называемые u- и ℓ-точки расширения BN и показывается существование точек в $BN \setminus N$, не являющихся ни u-, ни ℓ-точками.

§ 1. Предварительные результаты

Обозначения в работе стандартны для отечественной литературы.

Приведём конструкцию расширения Белла [1].

Пусть $P = \left\{ f \in \omega^\omega : 0 \leqslant f(n) \leqslant n+1 \text{ для всех } n < \omega \right\}$. Определим множество

$$N = \left\{ f|_n : f \in P,\ n \subset \omega \right\}$$

всех сужений отображений $f \in P$ на $n \subset \omega$. Здесь и далее буквой n обозначаем, в зависимости от контекста, как натуральное число, так и подмножество $n = \{0, \ldots, n-1\}$.

Отметим, что множество $N = \left\{ f|_n : f \in P,\ n \in \omega \right\}$ является частично упорядоченным множеством со следующим отношением порядка: для $s, t \in N$ отношение $s \leqslant t$ имеет место тогда и только тогда, когда t является продолжением s.

Пусть $T = \{\, \pi \in N^{\omega} : \mathrm{dom}(\pi(n)) = n+1$ для всех $n < \omega \,\}$, где под $\mathrm{dom}\, s$ понимается область определения отображения $s \in N$. Для каждого $s \in N$ положим $C_s = \{\, t \in N : t|_{\mathrm{dom}\, s} = s \,\}$. Для $\pi \in T$ положим $C_{\pi} = \bigcup\{\, C_{\pi(n)} : n < \omega \,\}$. Отметим, что C_{π} и $N \setminus C_{\pi}$ бесконечны для всякого $\pi \in T$. Пусть B — булева алгебра, порождённая множествами из

$$B' = \{\, C_{\pi} : \pi \in T \,\} \bigcup \{\, N \setminus C_{\pi} : \pi \in T \,\}.$$

Заметим, что $\{\, \{s\} : s \in N \,\} \bigcup \{\, C_s : s \in N \,\} \subseteq B$. Определим BN как пространство Стоуна построенной булевой алгебры B. Это расширение и является расширением Белла [1].

Из конструкции расширения Белла следует, что всякая точка нароста $BN \setminus N$ — это ультрафильтр булевой алгебры B, базой которого является семейство бесконечных множеств вида

$$\Big(\bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\Big) \bigcap \Big(N \setminus \bigcup_{j \leqslant m} C_{\pi_j}\Big).$$

Отметим, что замыкание элемента булевой алгебры в BN является открыто-замкнутым подмножеством BN. Для множества $A \subseteq BN$ через $[A]$ будем обозначать замыкание A в BN, для множества $A \subseteq N$ обозначим $A^* = [A] \setminus A$. Приведём необходимые для дальнейшего свойства расширения BN, полученные в [3].

Для $\pi \in T$ и $M \subseteq \omega$ обозначим $C_{\pi|M} = \bigcup\{\, C_{\pi(n)} : n \in M \,\}$.

Лемма 1. *$C_{\pi|M}$ — элемент булевой алгебры B.*

Лемма 2. *Для всякого семейства $\{\, C_{\pi_i|M_i} : i \leqslant n \,\}$, где $n \in \omega$, выполнено равенство*

$$\bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i|M_i} = \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i|M_i'}, \qquad \text{где} \qquad M_i' \subseteq M_i, \quad i \leqslant n.$$

Теорема 1. *Семейство*

$$\Big\{\, C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i} : \pi,\, \pi_i \in T,\ M \subseteq \omega,\ n \in \omega \,\Big\}$$

образует базу BN, а наросты элементов этого семейства образует базу $BN \setminus N$.

Теорема 2. *Пусть $\{\, C_{s_i} : i \in \omega \,\}$ — дизъюнктное семейство множеств, $\mathrm{dom}\, s_i \neq \mathrm{dom}\, s_j$ для всех $i \neq j$, и $X = \{\, x_i : i \in \omega \,\}$ такое, что $x_i \in [C_{s_i}]$. Тогда $[X]$ гомеоморфно βN.*

Теорема 3. *Пусть $A = \{\, s_i : i \in \omega \,\}$ — бесконечная цепь в N. Тогда A является сходящейся последовательностью в BN.*

§ 2. Максимальные центрированные системы

Уточним некоторые определения и понятия. Пусть μ — некоторое семейство бесконечных подмножеств N.

Определение 1. Систему бесконечных множеств $\alpha = \{F\}$ будем называть *центрированной системой*, если для любой конечной подсистемы $\alpha' \subseteq \alpha$ множество $\bigcap\{\, F : F \in \alpha' \,\}$ бесконечно. Центрированную систему $\alpha = \{F\}$ будем называть *центрированной системой в семействе* μ, если $\alpha \subseteq \mu$.

Мы будем рассматривать прежде всего максимальные центрированные системы различных семейств, состоящих из элементов булевой алгебры B. Заметим, что максимальная центрированная система в семействе подмножеств необязательно замкнута относительно конечных пересечений. Отметим также, что максимальной центрированной в булевой алгебре является ультрафильтр этой булевой алгебры.

Определение 2. Пусть $\alpha = \{F\}$ — центрированная система в семействе μ. Подмножество $A \subseteq N$ назовём *центрированным с системой* $\alpha = \{F\}$, если для каждой конечной подсистемы $\alpha' \subseteq \alpha$ выполнено следующее условие: множество $\big(\bigcap\{\, F : F \in \alpha' \,\}\big) \bigcap A$ бесконечно.

Определение 3. Будем говорить, что центрированная система $\alpha = \{F\}$ *вписана* в центрированную систему $\alpha' = \{G\}$, если для любого элемента $G \in \alpha'$ найдётся $F \in \alpha$ такой, что $F \subseteq G$.

Лемма 3. *Пусть $\xi = \{C_{\pi|M}\}$ — максимальная центрированная система в семействе множеств $\{\, C_{\pi|M} : \pi \in T,\ M \subseteq \omega \,\}$, и множество $C_{\pi'|M'}$ таково, что $C_{\pi'|M'} \cap C_{\pi|M}$ — бесконечно для всякого $C_{\pi|M} \in \xi$. Тогда $C_{\pi'|M'} \in \xi$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольный конечный набор элементов системы ξ, $\{\, C_{\pi_k|M_k} : k \leqslant n \,\}$. В силу леммы 2 найдётся набор $\{\, M'_k : k \leqslant n \,\}$ такой, что $M'_k \subseteq M_k$ для каждого $k = 1, \ldots, n$, и

$$\bigcap_{k \leqslant n} C_{\pi_k|M_k} = \bigcup_{k \leqslant n} C_{\pi'_k|M'_k}.$$

Докажем, что найдётся k_0 такое, что $C_{\pi_{k_0}|M'_{k_0}} \in \xi$. Предположим противное. Пусть для каждого $k = 1, \ldots, n$ найдётся конечный набор $\{C_{\pi^k_\ell|M^k_\ell} : \ell \leqslant n_k\}$ такой, что

$$C_{\pi_k|M'_k} \bigcap \Bigl(\bigcap_{\ell \leqslant n_k} C_{\pi^k_\ell|M^k_\ell} \Bigr) \qquad \text{конечно.}$$

Тогда

$$\Bigl(\bigcup_{k \leqslant n} C_{\pi'_k|M'_k} \Bigr) \bigcap \Bigl(\bigcap_{k \leqslant n} \bigcap_{\ell \leqslant n_k} C_{\pi^k_\ell|M^k_\ell} \Bigr) = \Bigl(\bigcap_{k \leqslant n} C_{\pi_k|M_k} \Bigr) \bigcap \Bigl(\bigcap_{k \leqslant n} \bigcap_{\ell \leqslant n_k} C_{\pi^k_\ell|M^k_\ell} \Bigr)$$

— конечно, что противоречит центрированности $\xi = \{C_{\pi|M}\}$. Отсюда и из максимальности ξ следует, что найдётся $C_{\pi_{k_0}|M'_{k_0}} \in \xi$ и, следовательно, $C_{\pi_{k_0}|M_{k_0}} \in \xi$. Лемма доказана. □

Лемма 4. *Для всякого множества вида $C_{\pi|M}$ существуют два элемента π_1 и $\pi_2 \in T$ такие, что $C_{\pi|M} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $M = \{k_1, k_2, \ldots, k_j, \ldots\}$. Построим π_1 и $\pi_2 \in T$ следующим образом. Для $0 \leqslant n < k_1$ определим элемент $\pi_1(n)$ тождественно равным 0 на множестве n, а элемент $\pi_2(n)$ определим тождественно равным 1 на множестве n. Для $k_j \leqslant n < k_{j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ определим $\pi_1(n)$ и $\pi_2(n)$ как продолжение $\pi(k_j)$ на n. Из построения π_1 и π_2 вытекает требуемое свойство для C_{π_1} и C_{π_2}: $C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2} = C_{\pi|M}$. Лемма доказана. □

Лемма 5. *Пусть $\alpha' = \{C_{\pi|M}\}$ — максимальная центрированная система в семействе множеств $\{\, C_{\pi|M} : \pi \in T,\ M \subseteq \omega \,\}$. Тогда $\alpha = \{\, C_\pi : C_{\pi|M} \in \alpha' \,\}$ — максимальная центрированная система в семействе множеств $\{\, C_\pi : \pi \in T \,\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha' = \{C_{\pi|M}\}$ — максимальная центрированная система в семействе множеств $\{\, C_{\pi|M} : \pi \in T,\ M \subseteq \omega \,\}$. Предположим, что $\alpha = \{\, C_\pi : C_{\pi|M} \in \alpha' \,\}$ не максимальна. Тогда найдётся $\pi' \in T$ такое, что $C_{\pi'} \cup \bigl(\bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i} \bigr)$ бесконечно для любого конечного набора $\{\, C_{\pi_i} : i \leqslant n \,\}$, но $C_{\pi'} \notin \alpha'$.

В силу леммы 3 найдётся $C_{\pi_0|M_0} \subseteq \alpha'$ такое, что $C_{\pi'} \cap C_{\pi_0|M_0}$ конечно. В силу леммы 4 найдутся множества $C_{\widehat{\pi}_0}$ и $C_{\widehat{\pi}_1}$ такие, что $C_{\widehat{\pi}_0} \cap C_{\widehat{\pi}_1} = C_{\pi_0|M_0}$. Отсюда следует, с одной стороны, что $(C_{\widehat{\pi}_0} \cap C_{\widehat{\pi}_1}) \cap C_{\pi'}$ конечно, с другой стороны, $C_{\widehat{\pi}_0}, C_{\widehat{\pi}_1} \in \alpha$; это следует из того, что $C_{\pi|M_0} \in \alpha'$ и $\alpha \subseteq \alpha'$. Получаем противоречие. Тем самым максимальность системы $\alpha = \{\, C_\pi : C_{\pi|M} \in \alpha' \,\}$ показана. □

Непосредственными вычислениями доказывается следующее утверждение.

Лемма 6. 1. *Если $\alpha = \{C_\pi\}$ — максимальная центрированная система в семействе $\{\, C_\pi : \pi \in T \,\}$, то $\alpha' = \{\, \bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i} : n \in \omega,\ \pi_i \in \alpha \,\}$ — максимальная центрированная система в семействе $\{\, \bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i} : n \in \omega,\ \pi_i \in T \,\}$.*

2. *Если* $\alpha' = \{C\}$ *— максимальная центрированная система в семействе*

$$\Big\{\, C = \bigcap_{i\leqslant n} C_{\pi_i} : n \in \omega,\ \pi_i \in T \,\Big\},$$

то система

$$\Big\{\, C_\pi : \text{найдётся } C \in \alpha',\ C = \bigcap_{i\leqslant n} C_{\pi_i} \text{ такое, что } C_\pi = C_{\pi_i} \,\Big\}$$

— максимальная центрированная система в семействе $\big\{\, C_\pi : \pi \in T \,\big\}$.

Из леммы 2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 7. *Если* $\alpha = \{C_{\pi|M}\}$ *— максимальная центрированная система в семействе множеств* $\big\{\, C_{\pi|M} : \pi \in T,\ M \subseteq \omega \,\big\}$*, то для всякого конечного набора множеств* $\alpha' \subseteq \alpha$ *найдётся* $C_{\pi_0|M_0} \in \alpha$ *такое, что* $C_{\pi_0|M_0} \subseteq \bigcap\big\{\, C_{\pi|M} : C_{\pi|M} \in \alpha' \,\big\}$.

Лемма 8. *Для максимальной центрированной системы* $\alpha = \{C_{\pi|M}\}$ *в семействе множеств* $\big\{C_{\pi|M} : \pi \in T,\ M \subseteq \omega\big\}$ *существует максимальная центрированная система* $\alpha'' = \{C\}$ *в семействе* $\big\{\, C = \bigcap_{i\leqslant n} C_{\pi_i} : n \in \omega,\ \pi_i \in T \,\big\}$ *такая, что* $\alpha'' = \{C\}$ *вписана в* $\alpha = \{C_{\pi|M}\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha = \{C_{\pi|M}\}$ — максимальная центрированная система в семействе

$$\big\{\, C_{\pi|M} : \pi \in T,\ M \subseteq \omega \,\big\}.$$

В силу леммы 5 система $\alpha' = \big\{\, C_\pi : C_{\pi|M} \in \alpha \,\big\}$ — максимальная центрированная система в семействе $\big\{\, C_\pi : \pi \in T \,\big\}$. В силу леммы 6 всевозможные конечные пересечения элементов системы α' образуют максимальную центрированную систему $\alpha'' = \{C\}$ в семействе $\big\{\, C = \bigcap_{i\leqslant n} C_{\pi_i} : n \in \omega,\ \pi_i \in T \,\big\}$. Покажем, что $\alpha'' = \{C\}$ вписан в α. Действительно, пусть $C_{\pi|M} \in \alpha$. В силу леммы 4 $C_{\pi|M} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}$ для некоторых $\pi_1, \pi_2 \in T$. Тогда $\pi_1, \pi_2 \in \alpha'$, а их пересечение $C_{\pi|M} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2} \in \alpha''$. Таким образом α'' вписана в α. Лемма доказана. $\square$

Лемма 9. *Для максимальной центрированной системы* $\alpha = \{C\}$ *в семействе*

$$\Big\{\, C = \bigcap_{i\leqslant n} C_{\pi_i} : n \in \omega,\ \pi_i \in T \,\Big\}$$

существует максимальная центрированная система $\alpha' = \{C_{\pi|M}\}$ *в семействе*

$$\big\{\, C_{\pi|M} : \pi \in T,\ M \subseteq \omega \,\big\},$$

вписанная в α.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha = \{C\}$ — максимальная центрированная система в семействе

$$\Big\{\, C = \bigcap_{i\leqslant n} C_{\pi_i} : n \in \omega,\ \pi_i \in T \,\Big\}.$$

Рассмотрим семейство множеств $\alpha' = \big\{\, C_{\pi|M} : C_{\pi|M}$ центрировано с $\alpha \,\big\}$. Покажем, что α' искомая. В силу леммы 4 всякое множество $C_{\pi|M} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}$. Так как $C_{\pi|M}$ центрирована с $\alpha = \{C\}$, отсюда следует, что $C_{\pi_1}, C_{\pi_2} \in \alpha$. Таким образом, всякий элемент $C_{\pi|M} \in \alpha'$ является элементом системы $\alpha = \{C\}$. Следовательно, система $\alpha' = \big\{\, C_{\pi|M} : C_{\pi|M}$ центрировано с $\alpha \,\big\}$ центрирована. Докажем максимальность системы α' и то, что α' вписана в α.

Пусть C — произвольный элемент системы α, то есть $C = \bigcap_{i\leqslant n} C_{\pi_i}$. В силу леммы 2 $C = \bigcap_{i\leqslant n} C_{\pi_i} = \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i|M_i}$. В силу центрированности $\alpha = \{C\}$ среди множеств $C_{\pi_i|M_i}$ $(i \leqslant n)$ найдётся $C_{\pi_{i_0}|M_{i_0}}$, центрированное с $\alpha = \{C\}$, то есть $C_{\pi_{i_0}|M_{i_0}} \in \alpha'$. Отсюда следует, что α' вписано в α. Отсюда же легко выводится и максимальность системы α'. Лемма доказана. $\square$

§ 3. u-точки и ℓ-точки пространства BN

Как было указано во введении, точка нароста $BN \setminus N$ — это свободный ультрафильтр булевой алгебры B, базу которого образуют бесконечные множества вида

$$\Big(\bigcap_{i\leqslant n} C_{\pi_i}\Big)\bigcap\Big(N\setminus\bigcup_{j\leqslant m} C_{\pi_j}\Big).$$

Базой каждого ультрафильтра является также и семейство множеств вида

$$C_{\pi|M}\bigcap\Big(N\setminus\bigcup_{j\leqslant m} C_{\pi_j}\Big).$$

Возникают вопросы, что из себя представляют максимальные центрированные семейства, состоящие из множеств вида $C_{\pi|M}$, или $\bigcap\limits_{j\leqslant n} C_{\pi_i}$, или $N\setminus\bigcup\limits_{j\leqslant m} C_{\pi_j}$. Ответы на эти вопросы дают следующие теоремы.

Теорема 4. *Если* $\xi=\{C_{\pi|M}\}$ — *максимальная центрированная система в семействе*

$$\big\{\, C_{\pi|M} : \pi\in T,\ M\subseteq\omega \,\big\},$$

то $\big|\bigcap\big\{\, C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M}\in\xi \,\big\}\big| = 1$.

Доказательство. Из центрированности системы $\xi=\{C_{\pi|M}\}$ и бикомпактности BN следует, что $\bigcap\big\{\, C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M}\in\xi \,\big\}\neq\varnothing$.

Покажем, что $\big|\bigcap\big\{\, [C_{\pi|M}] : C_{\pi|M}\in\xi \,\big\}\big| = 1$. Предположим противное, пусть найдутся две различные точки $x,\,y\in\bigcap\big\{\, C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M}\in\xi \,\big\}$. Рассмотрим некоторую окрестность

$$O_x=\Big[C_{\pi_0|M_0}\setminus\bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}\Big]=\big[C_{\pi_0|M_0}\big]\setminus\Big[\bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}\Big]$$

точки x такую, что $O_x\not\ni y$. Множество $\big[C_{\pi_0|M_0}\big]$ является открыто-замкнутым множеством, содержащим точку x, следовательно, множество $C_{\pi_0|M_0}\cap C_{\pi|M}$ бесконечно для всякого $C_{\pi|M}\in\xi$. Из леммы 3 следует, что $C_{\pi_0|M_0}\in\xi$, и, следовательно, $[C_{\pi_0|M_0}]\ni y$. Так как $O_x\not\ni y$, получаем, что $y\in\big[\bigcup\limits_{i\leqslant n} C_{\pi_i}\big]=\bigcup\limits_{i\leqslant n}\big[C_{\pi_i}\big]$. Тогда найдётся $i_0\leqslant n$ такое, что $y\in[C_{\pi_{i_0}}]$. Так как $[C_{\pi_{i_0}}]$ является открыто-замкнутым множеством, содержащим y, и $y\in\bigcap\big\{\, C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M}\in\xi \,\big\}$, получаем, что $C_{\pi_{i_0}}\cap C_{\pi|M}$ бесконечно для всякого $C_{\pi|M}\in\xi$, и из леммы 3 вытекает, что $C_{\pi_{i_0}}\in\xi$. Но тогда мы получим, что $\bigcap\big\{\, C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M}\in\xi \,\big\}\subseteq C^*_{\pi_{i_0}}$ и, следовательно, $x\notin\bigcap\big\{\, C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M}\in\xi \,\big\}$. Это противоречие доказывает теорему. □

Из теоремы 4 и леммы 9 получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Если* $\xi=\{C\}$ — *максимальная центрированная система в семействе*

$$\Big\{\, C=\bigcap_{i\leqslant n} C_{\pi_i|M_i} : n\in\omega,\ \pi_i\in T \,\Big\},$$

то $\big|\bigcap\big\{\, C^* : C\in\xi \,\big\}\big| = 1$.

Аналогично теореме 4 доказывается следующая теорема.

Теорема 6. *Если* $\xi=\{G\}$ — *максимальная центрированная система в семействе*

$$\Big\{\, G=N\setminus\bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i} : n\in\omega,\ \pi_i\in T \,\Big\},$$

то $\big|\bigcap\big\{\, G^* : G\in\xi \,\big\}\big| = 1$.

Доказательство. Из центрированности системы $\xi = \{G\}$ и бикомпактности BN следует, что $\bigcap\{G^* : G \in \xi\} \neq \varnothing$. Предположим, что найдутся две различные точки $x, y \in \bigcap\{G^* : G \in \xi\}$. Рассмотрим некоторую окрестность $O_x = \big[C_{\pi_0|M_0} \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\big]$ точки x такую, что $y \notin O_x$. Заметим, что

$$\Big[C_{\pi_0|M_0} \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\Big] = \big[C_{\pi_0|M_0}\big] \setminus \Big[\bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\Big] = \big[C_{\pi_0|M_0}\big] \setminus \Big(\bigcup_{i \leqslant n} [C_{\pi_i}]\Big).$$

Имеем: $[C_{\pi_0|M_0}]$ и $\bigcap_{i \leqslant n} [N \setminus C_{\pi_i}]$ — открыто-замкнутые множества, содержащее точку x. Отсюда и из максимальности ξ следует, что $\bigcap_{i \leqslant n} (N \setminus C_{\pi_i}) \in \xi$; из этого вытекает, что $\bigcap_{i \leqslant n} [N \setminus C_{\pi_i}] \ni y$. Так как $y \notin O_x$, получаем, что $y \notin [C_{\pi_0|M_0}]$. По лемме 4 $C_{\pi_0|M_0} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}$ для некоторых $\pi_1, \pi_2 \in T$. Имеем $y \notin [C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}] = [C_{\pi_1}] \cap [C_{\pi_2}]$.

Пусть $y \notin [C_{\pi_1}]$. Тогда $y \in [N \setminus C_{\pi_1}]$. Из открыто-замкнутости множества $[N \setminus C_{\pi_1}]$ и максимальности ξ следует, что $N \setminus C_{\pi_1} \in \xi$. Отсюда $[N \setminus C_{\pi_1}] \ni x$, следовательно, $[C_{\pi_1}] \not\ni x$, что противоречит тому, что

$$\big[C_{\pi_1}\big] \supseteq \big[C_{\pi_0|M_0}\big] \ni x.$$

Это противоречие доказывает теорему. □

Теоремы 4, 5 и 6 являются основанием для введения следующих определений.

Определение 4. Точку $x \in BN \setminus N$ назовём *u-точкой*, если $x = \bigcap\big\{\, C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M} \in \xi \,\big\}$ для некоторой максимальной центрированной системы $\xi = \{C_{\pi|M}\}$ в семействе множеств

$$\big\{\, C_{\pi|M} : \pi \in T,\ M \subseteq \omega \,\big\}.$$

Определение 5. Точку $x \in BN \setminus N$ назовём *ℓ-точкой*, если $x \in \bigcap\big\{\, C^* : C \in \xi \,\big\}$ для некоторой максимальной центрированной системы $\xi = \{C\}$ в семействе множеств

$$\Big\{\, N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i} : n \in \omega,\ \pi_i \in T \,\Big\}.$$

Из определений следует, что u-точки — суть точки $BN \setminus N$, которые имеют базу окрестностей в $BN \setminus N$, состоящую из множеств вида $C^*_{\pi|M}$, где $\pi \in T$, $M \subseteq \omega$, а ℓ-точки — суть точки $BN \setminus N$, которые имеют базу окрестностей в $BN \setminus N$, состоящую из множеств вида $\big(N \setminus \bigcup_{j \leqslant n} C_{\pi_i}\big)^*$, где $\pi \in T$, $n \in \omega$.

В [4] доказана следующая теорема:

Для точки $x \in BN \setminus N$ следующие утверждения эквивалентны:

(a) *точка x есть предел некоторой цепи $\{\, s_k : k \in \omega \,\}$ элементов N;*

(b) *точка x имеет базу в $BN \setminus N$, состоящую из открыто-замкнутых окрестностей вида*

$$\Big(N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\Big)^*;$$

(c) *из того, что $x \in [C_{\pi|M}]$ для некоторых $\pi \in T$, $M \subseteq \omega$ следует, что существует $i \in M$ такое, что $x \in [C_{\pi(i)}]$.*

Отсюда получаем, что каждое из условий (a) или (c) является необходимым и достаточным для того, чтобы точка $x \in BN \setminus N$ была ℓ-точкой.

В связи с полученными результатами возникает вопрос: существует ли в $BN \setminus N$ точка общего вида, то есть не u- и не ℓ-точка. Ответ на этот вопрос даёт теорема 7, доказываемая ниже.

Лемма 10. *Если $X = \{\, x_i : i \in \omega \,\} \subseteq BN \setminus N$ — счётное подмножество, состоящее из ℓ-точек, то X дискретно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всякой точки $x_i \in X$ существует функция $f_i \in P$ такая, что

$$x_i \in F_{f_i} = \bigcap_{n\in\omega} \big[C_{f_i|_n}\big].$$

Заметим, что семейство $\big\{\big[C_{f_i|_n}\big] : n \in \omega\big\}$ образует базу F_{f_i}. Так как x_i $(i \in \omega)$ являются ℓ-точками, то $F_{f_i} \cap F_{f'_i} = \varnothing$, если $i \neq i'$. Пусть $x_{i_0} \in X$. Покажем, что найдётся окрестность $O_{x_{i_0}}$ такая, что $O_{x_{i_0}} \cap \big(X \setminus \{x_{i_0}\}\big) = \varnothing$. Для всякой точки $x_i \in X$, $i \neq i_0$ рассмотрим множество $C_{f_i|_{n_i}}$ такое, что $x_i \in F_{f_i} \subset \big[C_{f_i|_{n_i}}\big]$ и $x_{i_0} \notin \big[C_{f_i|_{n_i}}\big]$. Можно считать, что $n_i \neq n_{i'}$, если $i \neq i'$. Для множества

$$\bigcup_i \big\{\, C_{f_i|_{n_i}} : i \neq i_0 \,\big\}$$

имеем:

$$x_{i_0} \notin \Big[\bigcup_i \big\{\, C_{f_i|_{n_i}} : i \neq i_0 \,\big\}\Big].$$

В противном случае по свойству ℓ-точек нашёлся бы номер $i^*\in\omega$, $i^*\neq i_0$ такой, что $\big[C_{f_{i^*}|_{n_{i^*}}}\big]\ni x_{i_0}$, что противоречит построению. Итак,

$$x_{i_0} \notin \Big[\bigcup_i \big\{\, C_{f_i|_{n_i}} : i \neq i_0 \,\big\}\Big],$$

тогда

$$O_x = \Big[N \setminus \bigcup_i \big\{\, C_{f_i|_{n_i}} : i \neq i_0 \,\big\}\Big]$$

не пересекается с $X \setminus \{x_{i_0}\}$ и является искомой. Лемма доказана. □

Теорема 7. *Пусть $\big\{\, C_{s_i} : i \in \omega \,\big\}$ — семейство дизъюнктных подмножеств BN, $x_i \in C_{s_i}$ — ℓ-точка $(i \in \omega)$ и $X = \big\{\, x_i : i \in \omega \,\big\}$. Тогда $[X] \setminus X$ гомеоморфно $\beta N \setminus N$ и состоит из точек, не являющихся ни ℓ-точками, ни u-точками.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество $[X]$ гомеоморфно βN в силу теоремы 2.

Рассмотрим $X = \{\, x_i : i \in \omega \,\}$. Пусть $x \in [X] \setminus X$. Точка x не является ℓ-точкой, так как в противном случае, в силу леммы 10, множество $\{x\} \cup X$ было бы дискретным.

Покажем, что x не является u-точкой. По условиям теоремы $x_i \in C_{s_i}$ для всякого $i \in \omega$. Пусть $F_{f_i} = \bigcap_n \big[C_{f_i|n}\big]$, где $f_i \in P$, — множество такое, что $x_i \in F_{f_i} \subseteq C^*_{s_i}$. Отметим, что $\big\{\big[C_{f_i|n}\big] : n\in\omega\big\}$ является базой множества F_{f_i} в BN.

Покажем, что в N существуют счётные подмножества

$$A = \big\{\, t(i, n) : i, n \in \omega \,\big\} \qquad \text{и} \qquad B = \big\{\, q(i, n) : i, n \in \omega \,\big\},$$

обладающие следующими свойствами:

(i) любые два элемента множества $A \cup B$ попарно несравнимы и имеют разные области определения;

(ii) $[A] \cap F_{f_i} \neq \varnothing$ и $[B] \cap F_{f_i} \neq \varnothing$ для любого $i \in \omega$.

Пусть $\big\{\, L_i : i \in \omega \,\big\}$ — разбиение ω на счётное число дизъюнктных бесконечных множеств.

Рассмотрим произвольное $i \in \omega$, C_{s_i} и $F_{f_i} = \bigcap_n \big[C_{f_i|n}\big] \subseteq C_{s_i}$. Пусть $N_i = \min\big\{n : \big[C_{f_i|n}\big] \subseteq C_{s_i}\big\}$. Нетрудно видеть, что мы можем построить множества $A_i = \{t(i,n) : n \in \omega\}$ и $B_i = \{q(i,n) : n \in \omega\}$, для которых выполнены следующие условия:

1) $t(i, n), q(i, n) \in C_{f_i|_{N_i+n}} \setminus C_{f_i|_{N_i+n+1}}$;

2) области определения различных элементов $A_i \cup B_i$ различны и являются элементами L_i;

3) любые два элемента $A_i \cup B_i$ несравнимы.

Определим $A = \bigcup\big\{\, A_i : i \in \omega \,\big\}$, $B = \bigcup\big\{\, B_i : i \in \omega \,\big\}$. Множества A и B удовлетворяют условиям (i) и (ii). Условие (ii), очевидно, выполнено по построению. Для проверки (i) достаточно заметить, что если один элемент множества $A \cup B$ лежит в $A_i \cup B_i$, а другой — в $A_j \cup B_j$, и $i \neq j$, то они несравнимы, так как один из них лежит в C_{s_i}, а другой — в C_{s_j}, и, следовательно, один является продолжением s_i, а другой — продолжением s_j, и s_i несравним с s_j. Области их определения различны, так как у одного она является элементом L_i, а у другого — элементом L_j, и $L_i \cap L_j = \varnothing$.

Итак, A и B построены. Заметим, что в силу условия (i) по теореме 2 $[A]$, $[B]$, $[A \cup B]$ гомеоморфны βN и, следовательно, $[A] \cap [B] = \varnothing$.

Покажем, что точка $x \in [X] \setminus X$ не является u-точкой. Предположим противное. Рассмотрим произвольную базисную окрестность точки x вида $O_x = \left[C_{\pi|M}\right] = \left[\cup\left\{ C_s : s \in \pi(M) \right\}\right]$. Если $x_i \in X \cap O_x$, то $x_i \in \left[\bigcup\left\{ C_s : s \in \pi(M) \right\}\right]$ и, так как x_i есть ℓ-точка, найдётся $s_0 \in \pi(M)$ такое, что $x_i \in [C_{s_0}]$, и, следовательно, $[C_{s_0}]$ является окрестностью F_{f_i}.

Так как $x_i \in F_{f_i} \subseteq \cap\left\{ \left[C_{f_i|_n}\right] : n \in \omega \right\}$, и $\left\{ \left[C_{f_i|_n}\right] : n \in \omega \right\}$ является базой множества F_{f_i}, то $\left[C_{s_0}\right]$ является окрестностью F_{f_i} и в силу условия (ii) $\left[C_{s_0}\right] \cap A \neq \varnothing$ и $\left[C_{s_0}\right] \cap B \neq \varnothing$. Следовательно, $O_x \cap A \neq \varnothing$ и $O_x \cap B \neq \varnothing$. Отсюда следует, что $x \in [A]$ и $x \in [B]$, то есть $x \in [A] \cap [B]$, что противоречит тому, что $[A] \cap [B] = \varnothing$. Таким образом, $x \in [X] \setminus X$ не u-точка. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bell M. G. Compact ccc non-separable spaces of small weight // Topology Proceedings. — 1980. — Vol. 5. — P. 11–25.
`http://topo.math.auburn.edu/tp/reprints/v05/tp05002s.pdf`
2. Грызлов А. А. О бикомпактных расширениях дискретных пространств // Фундаментальная и прикладная математика. — 1996. — Т. 2, № 3. — С. 803–848.
`http://www.math.msu.su/~fpm/rus/96/963/96306t.htm`
3. Gryzlov A. A., Bastrykov E. S., Golovastov R. A. On Bell's compactification of N // Topology Proceedings. — 2010. — Vol. 35. — P. 177–185.
`http://topology.auburn.edu/tp/reprints/v35/`
4. Бастрыков Е. С. О некоторых точках расширения Белла счётного дискретного пространства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. Вып. 4. — С. 3–6.
`http://vst.ics.org.ru/uploads/vestnik/4_2009/vu09401.pdf`

Поступила в редакцию 19.02.10

A. A. Gryzlov, E. S. Bastrykov, R. A. Golovastov

About points of compactification of N

We consider a compactification of a countable discrete space constructed as a Stone space of a Boolean algebra. Some new points of the compactification are constructed.

Keywords: compactification, Stone space of Boolean algebra, family of sets with finite intersection property.

Mathematical Subject Classifications: 54D35, 54D80, 54-06

Грызлов Анатолий Александрович, д. ф.-м. н., зав. кафедрой алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, E-mail: gran_@mail.ru

Бастрыков Евгений Станиславович, аспирант, кафедра алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, E-mail: vporoshok@gmail.com

Головастов Роман Александрович, аспирант, кафедра алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, E-mail: rpa4@mail.ru