УДК 517.929

© *И. С. Загребина*

ОБ ОЦЕНКЕ СВЕРХУ ДЛЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА АБСТРАКТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ВОЗМУЩЕНИЕМ

Получена оценка сверху для показателей Ляпунова возмущенной абстрактной линейной системы.

Ключевые слова: фильтры, абстрактные линейные системы, показатели Ляпунова.

Абстрактные линейные системы являются упрощенной моделью эволюционных систем, позволяющей в общем виде реализовать ряд их свойств, вытекающих из существования оператора Коши и имеющих важное значение для асимптотического исследования. Одной из основных задач современной теории показателей Ляпунова линейных систем является задача отыскания достижимых границ подвижности показателей этих систем под действием возмущений.

В статье получена оценка сверху показателей Ляпунова решений абстрактной линейной системы с возмущением.

Определение 1 [1]. Пусть $\mathcal{G}$ — семейство множеств, которое вместе с любыми множествами A и B содержит их пересечение $A\cap B$. *Фильтром в* $\mathcal{G}$ называется непустое подсемейство $\mathcal{F}\subset\mathcal{G}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\varnothing\notin\mathcal{F}$;
2) если $A,B\in\mathcal{F}$, то $A\cap B\in\mathcal{F}$;
3) если $A\in\mathcal{F}, B\in\mathcal{G}$ и $A\subset B$, то $B\in\mathcal{F}$.

Под фильтром в топологическом пространстве G понимают фильтр в семействе всех подмножеств пространства G.

Пример 1. 1. G — произвольное топологическое пространство. $\mathcal{F}_A$ — семейство всех окрестностей фиксированного непустого множества $A\subset G$ образует фильтр. В частном случае, когда A состоит из одной точки x_0, фильтр $\mathcal{F}_{x_0}$ называется *фильтром окрестностей точки* x_0.

2. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечная последовательность элементов из множества G. Семейство $\mathcal{F}_{\{x_n\}}$ всех подмножеств $M\subset G$, каждое из которых содержит все x_n, кроме конечного их числа, образует фильтр в G и называется *элементарным фильтром, ассоциированным с последовательностью* x_n.

3. Пусть G — подмножество метрического пространства. Семейство $\mathcal{F}_G=\{A\subset G: G\backslash A -$ ограничено$\}$ называется *фильтром дополнений до ограниченных множеств.*

Определение 2 [1]. Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — два фильтра в одном и том же множестве G. Говорят, что $\mathcal{F}_2$ *мажорирует* $\mathcal{F}_1$, если семейство $\mathcal{F}_1$ является подсемейством семейства $\mathcal{F}_2$. Обозначение: $\mathcal{F}_2\geqslant\mathcal{F}_1$.

Пример 2. $\mathcal{F}_{\{x_{n_k}\}}\geqslant\mathcal{F}_{\{x_n\}}$, где $\{x_{n_k}\}$ — произвольная подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$.

Определение 3 [1]. Система β множеств, входящих в состав некоторого фильтра $\mathcal{F}$ в G, называется *базой* этого *фильтра*, если для любого $A\in\mathcal{F}$ существует $B\in\beta$ такое, что $B\subset A$.

Утверждение 1 [1]. *Непустая система β подмножеств из G служит базой некоторого фильтра в G тогда и только тогда, когда:*
1) для любых $B_1, B_2 \in \beta$ найдется $B_3 \in \beta$ такое, что $B_3 \subset B_1 \cap B_2$;
2) $\varnothing \notin \beta$.

Данное семейство может служить базой только для одного фильтра $\mathcal{F}_\beta = \{A \subset G :$ найдется $B \in \beta$ такое, что $B \subset A\}$.

Определение 4 [1]. Пусть x_0 — произвольная точка топологического пространства G, а $\mathcal{F}$ — фильтр в G. Говорят, что *фильтр $\mathcal{F}$ в пространстве G сходится к точке* x_0, если он мажорирует фильтр окрестностей этой точки, то есть если всякая окрестность точки x_0 входит в состав семейства $\mathcal{F}$; при этом точку x_0 называют *пределом фильтра* $\mathcal{F}$. Точка x_0 является *пределом базы β фильтра*, если x_0 — предел фильтра $\mathcal{F}_\beta$.

Утверждение 2 [1]. *Пусть $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ — два фильтра в топологическом пространстве G. Если $\mathcal{F}_2 \geqslant \mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_1$ сходится к точке $x_0 \in G$, то $\mathcal{F}_2$ также сходится к x_0.*

Утверждение 3 [1]. *Пусть $\mathcal{F}$ — фильтр в множестве G, β — база этого фильтра, а $f : G \to Q$ — произвольное отображение. Образ $f(\beta)$ базы фильтра, в частности, образ $f(\mathcal{F})$ фильтра, есть база фильтра в Q.*

Определение 5 [1]. Пусть $f : G \to Q$ — произвольное отображение множества G в топологическое пространство Q, а $\mathcal{F}$ — некоторый фильтр в G. Точка $y_0 \in Q$ называется *пределом отображения f по фильтру* $\mathcal{F}$, если образ $f(\mathcal{F})$ фильтра $\mathcal{F}$ сходится к y_0. Обозначение: $\lim\limits_{\mathcal{F}} f = y_0$.

Определение 6. Пусть G — подмножество метрического пространства с метрикой ρ. Последовательность $\{t_k\} \subset G$ стремится к ∞, если $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(t_k, t_0) = +\infty$. Обозначение: $t_k \to \infty$.

Лемма 1. *Пусть $\{t_k\} \subset G$ и $t_k \to \infty$, G — подмножество метрического пространства. Тогда $\mathcal{F}_G \leqslant \mathcal{F}_{\{t_k\}}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, пусть существует последовательность $\{t_k\} \subset G$, $t_k \to \infty$ такая, что $\mathcal{F}_{\{t_k\}}$ не мажорирует $\mathcal{F}_G$. Следовательно, существует множество $A \in \mathcal{F}_G$ и $A \notin \mathcal{F}_{\{t_k\}}$. По определению фильтра дополнений до ограниченных множеств и фильтра, ассоциированного с последовательностью, множество $G\backslash A$ ограничено и содержит бесконечное число членов последовательности $\{t_k\}$. Следовательно, существует подпоследовательность $\{t_{k_j}\}$, сходящаяся к элементу ограниченного множества $\overline{G\backslash A}$. Получили противоречие с тем, что $t_k \to \infty$. Лемма доказана. □

Следствие 1. *Пусть G — метрическое пространство. Если существует $\lim\limits_{\mathcal{F}_G} f(t)$, то для любой последовательности $\{t_k\} \subset G$, $t_k \to \infty$ существует $\lim\limits_{\mathcal{F}_{\{t_k\}}} f(t)$ и $\lim\limits_{\mathcal{F}_G} f(t) = \lim\limits_{\mathcal{F}_{\{t_k\}}} f(t)$.*

Для пределов по фильтру отображений в числовые множества выполнены свойства классических конечных пределов функций, например возможность предельного перехода в неравенствах, и свойства, связанные с арифметическими действиями над функциями.

Определение 7. Пусть $f : G \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ — фильтр в множестве G. Обозначим через $C(\mathcal{F}; f)$ совокупность фильтров $\mathcal{F}_1$ в множестве G, мажорирующих фильтр $\mathcal{F}$, для которых существует $\lim\limits_{\mathcal{F}_1} f(t)$. Тогда $\overline{\lim\limits_{\mathcal{F}}} f(t) \doteq \sup\limits_{\mathcal{F}_1 \in C(\mathcal{F}; f)} \lim\limits_{\mathcal{F}_1} f(t)$.

Докажем необходимые для дальнейшего свойства верхнего предела функции по фильтру.

Лемма 2. *Пусть* $f : G \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ *— фильтр в множестве* G. *Тогда существует фильтр* $\widetilde{\mathcal{F}} \geqslant \mathcal{F}$ *такой, что* $\overline{\lim\limits_{\mathcal{F}}} f(t) = \lim\limits_{\widetilde{\mathcal{F}}} f(t)$.

Доказательство. Обозначим $\alpha \doteq \overline{\lim\limits_{\mathcal{F}}} f(t) = \sup\limits_{\mathcal{F}_0 \in C(\mathcal{F}; f)} \lim\limits_{\mathcal{F}_0} f(t)$. По свойствам sup, найдется фильтр $\mathcal{F}_1 \in C(\mathcal{F}; f)$ такой, что $\lim\limits_{\mathcal{F}_1} f(t) = \alpha_1$, при этом $\alpha_1 \in (\alpha - 1, \alpha)$. Следовательно, найдется множество $A_1 \in \mathcal{F}_1$ такое, что $f(A_1) \subset O_1(\alpha_1)$, и так как $\mathcal{F}_1 \geqslant \mathcal{F}$, то для любого множества $B \in \mathcal{F}:\ B \cap A_1 \neq \varnothing$. Рассмотрим множество $\widetilde{A}_1 = f^{-1}(O_2(\alpha))$. Поскольку $O_1(\alpha_1) \subset (\alpha - 2, \alpha - 1) \subset O_2(\alpha)$, имеет место включение $f(A_1) \subset f(\widetilde{A}_1)$, поэтому $A_1 \subset \widetilde{A}_1$ и $B \cap \widetilde{A}_1 \supset B \cap A_1 \neq \varnothing$ для любого $B \in \mathcal{F}$.

Существует фильтр $\mathcal{F}_2 \in C(\mathcal{F}; f)$ такой, что $\lim\limits_{\mathcal{F}_2} f(t) = \alpha_2$, при этом $\alpha_2 \in (\alpha - \frac{1}{2}, \alpha)$. Следовательно, найдется множество $A_2 \in \mathcal{F}_2$ такое, что $f(A_2) \subset O_{1/2}(\alpha_2)$, и так как $\mathcal{F}_2 \geqslant \mathcal{F}$, то для любого множества $B \in \mathcal{F}:\ B \cap A_2 \neq \varnothing$. Рассмотрим множество $\widetilde{A}_2 = f^{-1}(O_1(\alpha))$. Поскольку $O_{1/2}(\alpha_2) \subset (\alpha - 1, \alpha + \frac{1}{2}) \subset O_1(\alpha)$, следовательно, $f(A_2) \subset f(\widetilde{A}_2)$. Поэтому $A_2 \subset \widetilde{A}_2$ и $B \cap \widetilde{A}_2 \supset B \cap A_2 \neq \varnothing$ для любого $B \in \mathcal{F}$. Так как $O_1(\alpha) \subset O_2(\alpha)$, то $\widetilde{A}_2 \subset \widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2 \cap \widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_2 \neq \varnothing$.

Продолжая процесс, построим множества $\widetilde{A}_n = f^{-1}(O_{2/n}(\alpha))$, которые удовлетворяют следующим условиям: 1) $\widetilde{A}_n \subset \widetilde{A}_{n-1}$; 2) $B \cap \widetilde{A}_n \neq \varnothing$ для любого множества $B \in \mathcal{F}$.

Рассмотрим семейство множеств β, состоящее из множеств $\widetilde{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots,$ $B \in \mathcal{F}$ и множеств вида $B \cap \widetilde{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Согласно утверждению 1 β является базой некоторого фильтра $\widetilde{\mathcal{F}}$. Так как все множества $B \in \mathcal{F}$ содержатся в β, то $\widetilde{\mathcal{F}} \geqslant \mathcal{F}$. Семейство множеств $f(\widetilde{\mathcal{F}})$ содержит множества $f(\widetilde{A}_i) = O_{2/i}(\alpha)$. Поэтому фильтр, порожденный базой $f(\widetilde{\mathcal{F}})$, мажорирует фильтр окрестностей точки α. Следовательно, $\lim\limits_{\widetilde{\mathcal{F}}} f(t) = \alpha$. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть* $f_1, f_2 : G \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ *— фильтр в множестве* G. *Тогда* $\overline{\lim\limits_{\mathcal{F}}}(f_1(t) + f_2(t)) \leqslant$ $\leqslant \overline{\lim\limits_{\mathcal{F}}} f_1(t) + \overline{\lim\limits_{\mathcal{F}}} f_2(t)$.

Доказательство. Пусть фильтр $\widetilde{\mathcal{F}}$ таков, что $\overline{\lim\limits_{\mathcal{F}}}(f_1(t) + f_2(t)) = \lim\limits_{\widetilde{\mathcal{F}}}(f_1(t) + f_2(t))$. Рассмотрим фильтр $\widetilde{\mathcal{F}}_1 \geqslant \widetilde{\mathcal{F}}$ такой, что существует $\lim\limits_{\widetilde{\mathcal{F}}_1} f_1(t)$ и $\lim\limits_{\widetilde{\mathcal{F}}_1} f_1(t) \leqslant \overline{\lim\limits_{\mathcal{F}}} f_1(t)$. Пусть фильтр $\widetilde{\mathcal{F}}_2 \geqslant \widetilde{\mathcal{F}}_1$ таков, что существует $\lim\limits_{\widetilde{\mathcal{F}}_2} f_2(t)$ и $\lim\limits_{\widetilde{\mathcal{F}}_2} f_2(t) \leqslant \overline{\lim\limits_{\mathcal{F}}} f_2(t)$. Тогда

$$\overline{\lim_{\mathcal{F}}}(f_1(t) + f_2(t)) = \lim_{\widetilde{\mathcal{F}}}(f_1(t) + f_2(t)) = \lim_{\widetilde{\mathcal{F}}_2}(f_1(t) + f_2(t)) \leqslant \overline{\lim_{\mathcal{F}}} f_1(t) + \overline{\lim_{\mathcal{F}}} f_2(t).$$

Лемма доказана. □

Лемма 4. *Пусть* $f : G \to \mathbb{R}$; $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ *— фильтры в множестве* G, $\mathcal{F}_1 \leqslant \mathcal{F}_2$. *Тогда* $\overline{\lim\limits_{\mathcal{F}_1}} f(t) \geqslant \overline{\lim\limits_{\mathcal{F}_2}} f(t)$.

Доказательство. По определению

$$\overline{\lim_{\mathcal{F}_1}} f(t) \doteq \sup_{\mathcal{F} \in C(\mathcal{F}_1; f)} \lim_{\mathcal{F}} f(t), \qquad \overline{\lim_{\mathcal{F}_2}} f(t) \doteq \sup_{\mathcal{F} \in C(\mathcal{F}_2; f)} \lim_{\mathcal{F}} f(t).$$

Пусть $\mathcal{F} \in C(\mathcal{F}_2; f)$. Тогда $\mathcal{F} \geqslant \mathcal{F}_2$, а по условию $\mathcal{F}_2 \geqslant \mathcal{F}_1$. Следовательно, $\mathcal{F} \geqslant \mathcal{F}_1$. Таким образом, если $\mathcal{F} \in C(\mathcal{F}_2; f)$, то $\mathcal{F} \in C(\mathcal{F}_1; f)$. Поэтому $C(\mathcal{F}_2; f) \subset C(\mathcal{F}_1; f)$. Следовательно, $\overline{\lim\limits_{\mathcal{F}_1}} f(t) \geqslant \overline{\lim\limits_{\mathcal{F}_2}} f(t)$. Лемма доказана. □

Лемма 5. *Пусть* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. *Тогда* $\overline{\lim\limits_{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}} f(t) = \overline{\lim\limits_{k \to \infty}} f(k)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} \in C(\mathcal{F}_{\mathbb{N}}; f)$. Докажем, что фильтр $\mathcal{F}$ не может содержать ограниченных множеств из $\mathbb{N}$. Предположим противное. Пусть существует ограниченное множество $A_0 \in \mathcal{F}$. Рассмотрим множество $A \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ такое, что $\mathbb{N} \backslash A = A_0$. Следовательно, $A \in \mathcal{F}$. Но $A_0 \cap A = \varnothing$. Получили противоречие с определением фильтра. Так как $\mathcal{F} \in C(\mathcal{F}_{\mathbb{N}}; f)$, то существует $\lim\limits_{\mathcal{F}} f(t) \doteq \alpha$. По определению предела отображения по фильтру любая окрестность $O_r(\alpha)$ точки α входит в состав семейства $\widetilde{\mathcal{F}}$, где $\widetilde{\mathcal{F}} = \{C \subset \mathbb{R} :$ существует $B \in f(\mathcal{F})$ такое, что $B \subset C\}$ — фильтр в $\mathbb{R}$, порожденный базой $f(\mathcal{F})$. Так как $O_1(\alpha) \in \widetilde{\mathcal{F}}$, то найдется множество $B_1 \in f(\mathcal{F})$ такое, что $B_1 \subset O_1(\alpha)$. $B_1 \in f(\mathcal{F})$ тогда и только тогда, когда $B_1 = f(A_1)$, где $A_1 \in \mathcal{F}$, A_1 — бесконечное подмножество $\mathbb{N}$. Возьмем $\tau_1 \in A_1$. Тогда $f(\tau_1) \in B_1 \subset O_1(\alpha)$. $O_{1/2}(\alpha) \in \widetilde{\mathcal{F}}$, следовательно, существует множество $B_2 \in f(\mathcal{F})$ такое, что $B_2 \subset O_{1/2}(\alpha)$. $B_2 \in f(\mathcal{F})$ тогда и только тогда, когда $B_2 = f(A_2)$, где $A_2 \in \mathcal{F}$, A_2 — бесконечное подмножество $\mathbb{N}$. Выберем $\tau_2 \in A_2$ такое, что $\tau_2 > \tau_1$. Тогда $f(\tau_2) \in B_2 \subset O_{1/2}(\alpha)$. Продолжая этот процесс, построим последовательность $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, $\tau_1 < \tau_2 < \ldots$ такую, что $f(\tau_k) \in O_{1/k}(\alpha)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда из определения предела следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(\tau_k) = \alpha$. Итак, если $\mathcal{F} \in C(\mathcal{F}_{\mathbb{N}}; f)$, причем $\lim\limits_{\mathcal{F}} f(t) = \alpha$, то существует последовательность $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\tau_k \to \infty$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(\tau_k) = \alpha$.

С другой стороны, любой последовательности $\{t_k\} \subset \mathbb{N}$, $t_k \to \infty$ соответствует фильтр $\mathcal{F}_{\{t_k\}}$ в $\mathbb{N}$. Если существует $\lim\limits_{t_k\to\infty} f(t_k)$, то существует $\lim\limits_{\mathcal{F}_{\{t_k\}}} f(t)$ и они равны. По лемме 1 $\mathcal{F}_{\{t_k\}} \geqslant \mathcal{F}_{\mathbb{N}}$. Следовательно, $\mathcal{F}_{\{t_k\}} \in C(\mathcal{F}_{\mathbb{N}}; f)$.

Тогда $\overline{\lim\limits_{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}}} f(t) \doteq \sup\{\lim\limits_{\mathcal{F}} f(t) | \ \mathcal{F} \in C(\mathcal{F}_{\mathbb{N}}; f)\} = \sup\{\lim\limits_{k\to\infty} f(\tau_k) | \ \tau_k \to \infty, \ \exists \lim\limits_{k\to\infty} f(\tau_k)\} \doteq$ $\doteq \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} f(k)$. Лемма доказана.

Пусть Ω — метрическое пространство с метрикой ρ; F, V — вещественные линейные нормированные пространства; $L(F, V)$ — нормированное пространство ограниченных линейных отображений из F в V с нормой, согласованной с нормами в F и V, то есть удовлетворяющей условию $\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$ при всех $A \in L(F, V)$, $x \in F$; $GL(F)$ — группа всех обратимых элементов из $L(F, F)$. Нейтральный элемент группы $GL(F)$ будем обозначать через E.

Определение 8 [2]. *Абстрактной линейной системой (АЛС) на пространстве* Ω *с фазовым пространством* F будем называть тройку (Ω, F, X), где $X : \Omega \times \Omega \to GL(F)$ представляет собой непрерывное по каждому аргументу отображение, удовлетворяющее условиям

$$X(t, t) = E \ \text{ и } \ X(t, s)X(s, t) = E \ \text{ для любых } \ t, s \in \Omega.$$

Отображение X, а также и всякое его значение $X(t, s)$ при фиксированных $t, s \in \Omega$ будем называть *оператором Коши АЛС* (Ω, F, X).

Определение 9 [2]. *Частичным решением абстрактной линейной системы* (Ω, F, X), *отвечающим начальному значению* $x_0 \in F$ *при* $t = t_0 \in \Omega$ (или же *решением задачи Коши* для этой АЛС), будем называть отображение $x : \Omega \to F$, определенное формулой $x(t) = x(t, t_0, x_0) = X(t, t_0)x(t_0)$.

Определение 10 [2]. *Решением* (или *полным решением*) *абстрактной линейной системы* (Ω, F, X) будем называть отображение $x : \Omega \to F$, удовлетворяющее условию $x(t) = X(t, s)x(s)$ при любых $t, s \in \Omega$.

Определение 11. *Показателем Ляпунова* решения $x(\cdot)$ АЛС (Ω, F, X) будем называть

$$\lambda[x] \doteq \overline{\lim\limits_{\mathcal{F}_{\Omega}}} \frac{1}{\rho(t, t_0)} \ln \|x(t)\|,$$

где $\mathcal{F}_{\Omega}$ — фильтр дополнений до ограниченных множеств в Ω.

Рассмотрим АЛС

$$(\Omega, F, X) \tag{1}$$

и возмущенную АЛС

$$(\Omega, F, X(E+H)) \tag{2}$$

с возмущением $H(t,s)$ и оператором Коши

$$Y(t,s) = X(t,s)(E + H(t,s)). \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть* $\|H(t,s)\| \leqslant h(t,s)$ *для всех* $t, s \in \Omega$. *Тогда для любого решения* $y(\cdot)$ *системы* (2) *выполнено неравенство*

$$\lambda[y] \leqslant \varlimsup_{\mathcal{F}_\Omega} \frac{1}{\rho(t,t_0)} \ln \|X(t,t_0)\| + \varlimsup_{\mathcal{F}_\Omega} \frac{1}{\rho(t,t_0)} \ln(1 + h(t,t_0)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отображение $Z(\cdot,\cdot)$, задаваемое равенством $Z(t,s) = X(s,t)Y(t,s)$. Из (3) для $Z(\cdot,\cdot)$ имеем представление

$$Z(t,s) = E + H(t,s). \tag{4}$$

Переходя в (4) к нормам, получим оценку $\|Z(t,s)\| \leqslant 1 + h(t,s)$. Поэтому для решения $y(\cdot)$ системы (2) выполнено

$$\|y(t)\| \leqslant \|Y(t,t_0)\|\|y(t_0)\| \leqslant \|X(t,t_0)\|\|Z(t,t_0)\|\|y(t_0)\| \leqslant \|y(t_0)\|\|X(t,t_0)\|(1 + h(t,t_0)).$$

Прологарифмируем полученное неравенство, затем разделим его на $\rho(t,t_0)$ и перейдем к пределу по произвольному фильтру $\mathcal{F} \in C\left(\mathcal{F}_\Omega; \dfrac{1}{\rho(t,t_0)} \ln\|y(t)\|\right)$, используя лемму 3, получим оценку:

$$\begin{aligned}\lim_{\mathcal{F}} \frac{1}{\rho(t,t_0)} \ln \|y(t)\| \leqslant \lim_{\mathcal{F}} \frac{1}{\rho(t,t_0)} \ln \|y(t_0)\| + \varlimsup_{\mathcal{F}} \frac{1}{\rho(t,t_0)} \ln \|X(t,t_0)\| + \\ + \varlimsup_{\mathcal{F}} \frac{1}{\rho(t,t_0)} \ln(1 + h(t,t_0)) = \varlimsup_{\mathcal{F}} \frac{1}{\rho(t,t_0)} \ln \|X(t,t_0)\| + \varlimsup_{\mathcal{F}} \frac{1}{\rho(t,t_0)} \ln(1 + h(t,t_0)).\end{aligned}$$

Из полученной оценки и леммы 4 следует требуемое неравенство. Теорема доказана. □

Замечание 1. Полученная в теореме 1 оценка сверху показателей Ляпунова решений АЛС является обобщением на случай АЛС аналогичной оценки, полученной в [3] для решений возмущенных линейных однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример 3. Пусть $\Omega = \mathbb{N}$, $F = \mathbb{R}^n$, $\rho_{\mathbb{N}}(t_1, t_2) = |t_1 - t_2|$, $\|x\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{x^* x}$, где $*$ означает транспонирование. Рассмотрим дискретные линейные системы

$$\Delta\, x(t) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{N} \tag{5}$$

и

$$\Delta\, y(t) = (A(t) + Q(t))y(t), \quad t \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

где Δ — разностный оператор, определенный равенством $\Delta\, x(t) = x(t{+}1) - x(t)$; $x, y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, $A, Q : \mathbb{N} \to M_n$, где M_n — пространство вещественных $n \times n$-матриц со спектральной нормой. Предполагаем, что $\|A(t)\| \leqslant a < 1$, $\|Q(t)\| \leqslant q$, $\|A(t) + Q(t)\| \leqslant a + q < 1$ для всех $t \in \mathbb{N}$. Всюду далее $\prod\limits_{j=k}^{l} A_j \doteq A_k A_{k+1} \ldots A_l$ при $k \leqslant l$, и $\prod\limits_{j=k}^{l} A_j \doteq A_k A_{k-1} \ldots A_l$ при $k > l$; E — единичная $n \times n$-матрица.

Из определения оператора Δ следует, что систему (5) можно переписать следующим образом:

$$x(t+1) = (A(t)+E)x(t).$$

Тогда

$$x(t+2) = (A(t+1)+E)x(t+1) = (A(t+1)+E)(A(t)+E)x(t).$$

Используя принцип математической индукции, получим:

$$x(t) = \left(\prod_{i=t-1}^{s}(A(i)+E)\right)x(s) = X(t,s)x(s), \tag{7}$$

при всех $s \leqslant t-1$. Известно (см. [4, с. 364]), что если $n\times n$-матрица B удовлетворяет условию $\|B\|<1$, то матрица $E+B$ обратима. Поэтому при $s \geqslant t+1$ из (7) получим:

$$x(t) = \left(\prod_{i=t}^{s-1}(A(i)+E)^{-1}\right)x(s) = X(t,s)x(s).$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для системы (6). Следовательно, матрицы Коши систем (5) и (6) имеют вид:

$$X(t,s) = \begin{cases} \prod\limits_{i=t-1}^{s}(A(i)+E), & s \leqslant t-1, \\ E, & s=t, \\ \prod\limits_{i=t}^{s-1}(A(i)+E)^{-1}, & s \geqslant t+1, \end{cases} \qquad Y(t,s) = \begin{cases} \prod\limits_{i=t-1}^{s}(A(i)+Q(i)+E), & s \leqslant t-1, \\ E, & s=t, \\ \prod\limits_{i=t}^{s-1}(A(i)+Q(i)+E)^{-1}, & s \geqslant t+1. \end{cases}$$

Следовательно, тройки $(\mathbb{N}, \mathbb{R}^n, X)$ и $(\mathbb{N}, \mathbb{R}^n, Y)$ образуют абстрактные линейные системы.

Для того чтобы применить к системам (5) и (6) теорему 1, найдем функцию $h(t,s)$.

$$\begin{gathered} Y(t+1,t) = E + A(t) + Q(t) = X(t+1,t)(E + H(t+1,t)) = \\ = (E+A(t))(E+H(t+1,t)) = E + A(t) + (E+A(t))H(t+1,t). \end{gathered}$$

Следовательно,

$$Q(t) = (E+A(t))H(t+1,t),$$

$$H(t+1,t) = (E+A(t))^{-1}Q(t). \tag{8}$$

Известно (см. [4, с. 364]), что если $n\times n$-матрица B удовлетворяет условию $\|B\|<1$, то $\|(E+B)^{-1}\| \leqslant \dfrac{1}{1-\|B\|}$. Поэтому из (8) получаем оценку

$$\|H(t+1,t)\| \leqslant \frac{q}{1-a} \doteq h(t+1,t).$$

$$\begin{gathered} Y(t+2,t) = (E + A(t+1) + Q(t+1))(E+A(t)+Q(t)) = \\ = X(t+2,t)(E+H(t+2,t)) = (E+A(t+1))(E+A(t))(E+H(t+2,t)). \end{gathered}$$

Отсюда получаем

$$\begin{gathered} E + H(t+2,t) = (E+A(t))^{-1}(E+A(t+1))^{-1}(E+A(t+1)+Q(t+1))(E+A(t)+Q(t)) = \\ = (E+A(t))^{-1}(E + (E+A(t+1))^{-1}Q(t+1))(E+A(t)+Q(t)) = \\ = (E+A(t))^{-1}(E+A(t)+Q(t) + (E+A(t+1))^{-1}Q(t+1)(E+A(t)+Q(t))) = \\ = E + (E+A(t))^{-1}Q(t) + (E+A(t))^{-1}(E+A(t+1))^{-1}Q(t+1)(E+A(t)+Q(t)). \end{gathered}$$

Поэтому

$$\|H(t+2,t)\| \leqslant \frac{q}{1-a} + \frac{q(1+a+q)}{(1-a)^2} \doteq h(t+2,t).$$

Проведя аналогичные рассуждения, получим оценку:

$$\|H(t+k,t)\| \leqslant \frac{q}{1-a} + \frac{q(1+a+q)}{(1-a)^2} + \dots + \frac{q(1+a+q)^{k-1}}{(1-a)^k} = \\ = \frac{q}{q+2a}\left(\left(\frac{1+a+q}{1-a}\right)^k - 1\right) \doteq h(t+k,t).$$

Тогда по теореме 1 получим:

$$\lambda[y] \leqslant \varlimsup_{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}} \frac{1}{|t-t_0|} \ln\|X(t,t_0)\| + \varlimsup_{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}} \frac{1}{|t-t_0|} \ln(1+h(t,t_0)) = \\ = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \ln\|X(t_0+k,t_0)\| + \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \ln(1+h(t_0+k,t_0)) \leqslant \\ \leqslant \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \ln(1+a)^k + \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \ln\left(1+\frac{q}{q+2a}\left(\left(\frac{1+a+q}{1-a}\right)^k - 1\right)\right) \leqslant \\ \leqslant \ln(1+a) + \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \ln\left(\left(1+\frac{q}{q+2a}\right)\left(\frac{1+a+q}{1-a}\right)^k\right) = \\ = \ln(1+a) + \ln\frac{1+a+q}{1-a} = \ln\frac{(1+a)(1+a+q)}{1-a}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А. Общая топология. — М.: Высш. школа, 1979. — 336 с.
2. Макаров Е. К. Об асимптотической классификации абстрактных линейных систем // Труды Института математики НАН Беларуси. — Минск. — 1999. — Т. 3. — С. 79–88.
3. Макаров Е. К. Об оценке сверху для показателей Ляпунова линейной дифференциальной системы с возмущением // Известия Института математики и информатики УдГУ. — Ижевск. — 1998. — Т. 2, № 13. — С. 89–97.
4. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.

Поступила в редакцию 01.03.10

I. S. Zagrebina

Upper-bound estimate for Lyapunov exponents of perturbed abstract linear system

Upper-bound estimate for Lyapunov exponents of perturbed abstract linear system is obtained.

Keywords: filters, abstract linear systems, Lyapunov exponents.

Mathematical Subject Classifications: 34K25, 34C41

Загребина Ирина Сергеевна, ассистент, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4),
E-mail: zagrebina_is@mail.ru