УДК 517.977+517.926

© *В. А. Зайцев, С. Н. Попова, Е. Л. Тонков*

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗИРУЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ [1]

Получено новое достаточное условие экспоненциальной стабилизируемости допустимого процесса нелинейной управляемой системы.

Ключевые слова: нелинейная управляемая система, линейная управляемая система, экспоненциальная стабилизируемость.

В этой статье получено достаточное условие экспоненциальной стабилизируемости допустимого процесса нелинейной управляемой системы. Доказательство основано на результатах об управлении асимптотическими инвариантами линейных систем, в частности, о стабилизации линейных управляемых систем [1]–[5].

Введем необходимые обозначения. Пусть $e_1,\ldots,e_n$ — канонический ортонормированный базис евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|\cdot\|$, определяемой равенством $\|x\|=\sqrt{x^*x}$ (звездочка означает транспонирование); $\mathrm{B}^n_h(\widehat{x})\doteq\{x\in\mathbb{R}^n:\ \|x-\widehat{x}\|<h\}$. Через M_{mn} будем обозначать пространство вещественных матриц размерности $m\times n$ (при $m=n$ пишем M_n) со спектральной нормой, то есть операторной нормой, индуцируемой в M_{mn} евклидовыми нормами в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$. Для любого набора векторов $\xi_i\in\mathbb{R}^k$, $i=1,\ldots,n$, запись $[\xi_1,\ldots,\xi_n]$ будет обозначать матрицу из M_{kn}, имеющую своими столбцами векторы $\xi_1,\ldots,\xi_n$; $E=[e_1,\ldots,e_n]\in\mathrm{M}_n$ — единичная матрица; $\mathrm{Sp}\,A$ — след квадратной матрицы A. Для произвольной не равной финально нулю функции $\psi:\ [t_0,+\infty)\to\mathbb{R}$ обозначим $\lambda[\psi]=\varlimsup\limits_{t\to\infty}t^{-1}\ln|\psi(t)|$ — показатель Ляпунова функции $\psi(\cdot)$ [6, с. 121]. Для линейной однородной дифференциальной системы $\dot y=A(t)y$, $y\in\mathbb{R}^n$ с кусочно непрерывной и ограниченной на полуоси $[t_0,+\infty)$ матрицей коэффициентов $A(\cdot)$ обозначим через $\lambda_1(A)\leqslant\lambda_2(A)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(A)$ полный спектр показателей Ляпунова [6, с. 145], $\sigma_{\text{Л}}(A)=\sum\limits_{k=1}^n\lambda_k(A)-\varliminf\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}\int\limits_{t_0}^t\mathrm{Sp}\,A(s)\,ds$ — коэффициент неправильности Ляпунова [6, с. 271].

Рассмотрим нелинейную управляемую систему

$$\dot x=f(t,x,u),\quad (t,x,u)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m. \tag{1}$$

Будем предполагать, что функция $f(t,x,u)$ непрерывна по переменной t и имеет непрерывные частные производные по переменным x и u на множестве $(t,x,u)\in[t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$.

Допустимым управлением в системе (1) называем произвольную кусочно непрерывную функцию $u:\ [t_0,+\infty)\to\mathbb{R}^m$. *Допустимым решением* называем продолжаемое на всю полуось $[t_0,+\infty)$ решение $x(\cdot)$ системы (1), в которой выбрано допустимое управление $u(\cdot)$. *Допустимым процессом* системы (1) называем пару $\big(x(\cdot),u(\cdot)\big)$, состоящую из допустимого управления $u(\cdot)$ и соответствующего ему допустимого решения $x(\cdot)$.

Определение 1. Допустимый процесс $\big(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot)\big)$ системы (1) называется *экспоненциально стабилизируемым*, если для каждого $\alpha>0$ найдутся такие $\delta>0$ и $c>0$, что при всяком $x_0\in\mathrm{B}^n_\delta(\widehat{x}(t_0))$ существует допустимое управление $u(\cdot)$, удовлетворяющее оценке

$$\|u(t)-\widehat{u}(t)\|\leqslant ce^{-\alpha(t-t_0)},\quad t\geqslant t_0,$$

[1] Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Математическая теория управления».

и такое, что решение $x(\cdot)$ системы (1) с выбранным $u(\cdot)$ и с начальным условием $x(t_0)=x_0$ определено на всей полуоси $[t_0,+\infty)$ и удовлетворяет оценке

$$\|x(t)-\widehat{x}(t)\| \leqslant ce^{-\alpha(t-t_0)}, \quad t\geqslant t_0.$$

В задачах о стабилизации линейных управляемых систем ключевую роль играет понятие равномерной полной управляемости.

Определение 2 (Р. Калман [7]). Линейная управляемая система

$$\dot{y}=A(t)y+B(t)v, \quad (t,y,v)\in[t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m, \tag{2}$$

называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие $\sigma>0$ и $\beta_1,\beta_2>0$, что при всех $\xi\in\mathbb{R}^n$ и $t\geqslant t_0$ выполнено неравенство

$$\beta_1\|\xi\|^2\leqslant \xi^*W(t,t+\sigma)\xi\leqslant\beta_2\|\xi\|^2;$$

здесь

$$W(t,t+\sigma):=\int_t^{t+\sigma}Y(t,s)B(s)B^*(s)Y^*(t,s)\,ds$$

— *матрица Калмана* системы (2), $Y(t,s)$ — матрица Коши однородной системы $\dot{y}=A(t)y$.

Теорема 1. *Пусть* $\big(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot)\big)$ *— допустимый процесс системы* (1) *такой, что:*
1) *матричная функция* $A(t):=\dfrac{\partial f(t,x,u)}{\partial x}\bigg|_{(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))}$ *кусочно непрерывна и ограничена на* $[t_0,+\infty)$;
2) *матричная функция* $B(t):=\dfrac{\partial f(t,x,u)}{\partial u}\bigg|_{(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))}$ *кусочно непрерывна и ограничена на* $[t_0,+\infty)$;
3) *линейная управляемая система* (2) *равномерно вполне управляема*;
4) *имеет место равенство*

$$f(t,\widehat{x}(t)+y,\widehat{u}(t)+v)-f(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t))=A(t)y+B(t)v+\varphi(t,y,v),$$

причем

$$\|\varphi(t,y,v)\|\leqslant\psi(t)\left\|\begin{pmatrix} y\\ v\end{pmatrix}\right\|^m, \tag{3}$$

при всех $(t,y,v)\in[t_0,+\infty)\times\mathrm{B}_h^n(0)\times\mathrm{B}_h^m(0)$, *где* $\lambda[\psi]\leqslant 0$, $m>1$.

Тогда процесс $\big(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot)\big)$ *экспоненциально стабилизируем.*

Доказательство. На множестве $(t,y,v)\in[t_0,+\infty)\times\mathrm{B}_h^n(0)\times\mathrm{B}_h^m(0)$ систему (1) перепишем в виде

$$\dot{y}=A(t)y+B(t)v+\varphi(t,y,v), \tag{4}$$

где функция $\varphi(t,y,v)$ удовлетворяет условию (3).

Возьмем произвольное $\alpha>\dfrac{2+\sigma_{\text{Л}}(A)}{m-1}$ и положим $\mu=-2\alpha-\lambda_n(A)$. Пользуясь равномерной полной управляемостью системы первого приближения (2) и результатами работы [5, теорема 1], построим управление $v=V(t)y$, удовлетворяющее оценке $\sup\limits_{t\geqslant t_0}\|V(t)\|\leqslant v_0$ и обеспечивающее асимптотическую эквивалентность замкнутой системы

$$\dot{y}=\big(A(t)+B(t)V(t)\big)y \tag{5}$$

и системы

$$\dot{y}=\big(A(t)+\mu E\big)y \tag{6}$$

с выбранным μ. Полный спектр показателей Ляпунова системы (6) состоит из чисел

$$\lambda_k(A+\mu E)=\lambda_k(A)+\mu,\quad k=1,\ldots,n.$$

Кроме того,

$$\sigma_{\text{Л}}(A+\mu E)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A+\mu E)-\varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\mathrm{Sp}\big(A(s)+\mu E\big)\,ds=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\big(\lambda_k(A)+\mu\big)-\varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\big(\mathrm{Sp}\ A(s)+n\mu\big)\,ds=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A)-\varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\mathrm{Sp}\ A(s)\,ds=\sigma_{\text{Л}}(A).$$

Поскольку коэффициент неправильности Ляпунова и полный спектр показателей Ляпунова являются асимптотическими инвариантами, выполнены равенства

$$\sigma_{\text{Л}}(A+BV)=\sigma_{\text{Л}}(A+\mu E)=\sigma_{\text{Л}}(A),$$

$$\lambda_k(A+BV)=\lambda_k(A+\mu E)=\lambda_k(A)+\mu,\quad k=1,\ldots,n.$$

Обозначим $\varphi_1(t,y)=\varphi(t,y,V(t)y)$. Система (4) с выбранным управлением $v(\cdot)$ принимает вид

$$\dot y=\big(A(t)+B(t)V(t)\big)y+\varphi_1(t,y). \tag{7}$$

Положим $h_1=\min\{h,h/v_0\}$. Пусть $t\geqslant t_0$, $\|y\|\leqslant h_1$. Тогда $\|y\|\leqslant h$ и $\|V(t)y\|\leqslant v_0h_1\leqslant h$, поэтому из оценки (3) получаем

$$\|\varphi_1(t,y)\|=\|\varphi(t,y,V(t)y)\|\leqslant\psi(t)\left\|\begin{pmatrix} y\\ V(t)y\end{pmatrix}\right\|^{m}=$$

$$=\psi(t)\big(\|y\|^2+\|V(t)y\|^2\big)^{m/2}\leqslant\psi(t)\Big(\big(1+v_0^2\big)\|y\|^2\Big)^{m/2}=\psi(t)\big(1+v_0^2\big)^{m/2}\|y\|^m\doteq\psi_1(t)\|y\|^m,$$

при этом $\lambda[\psi_1]=\lambda[\psi]\leqslant 0$.

Пусть $\Phi(t)=[\varphi^{(1)}(t),\ldots,\varphi^{(n)}(t)]$ — нормальная фундаментальная матрица системы (5) такая, что

$$\lambda[\varphi^{(k)}]=\lambda_k(A+BV)=\lambda_k(A)+\mu,\quad k=1,\ldots,n.$$

Следуя [8] (см. также [6], с. 271–274), положим

$$D=\mathrm{diag}\big(\lambda_1(A+BV)+\alpha,\ldots,\lambda_n(A+BV)+\alpha\big)=\mathrm{diag}\big(\lambda_1(A)+\mu+\alpha,\ldots,\lambda_n(A)+\mu+\alpha\big)$$

и к системе (7) применим преобразование $y=\Phi(t)e^{-Dt}z$. Тогда

$$\dot z=Dz+g(t,z), \tag{8}$$

где

$$g(t,z)=e^{Dt}\Phi^{-1}(t)\varphi_1(t,\Phi(t)e^{-Dt}z),$$

при этом выполнены следующие свойства (см. [8]):

1) $\lambda[\Phi(t)e^{-Dt}]\leqslant-\alpha<0$, поэтому найдется такое $c_1>0$, что при всех $t\geqslant t_0$ выполнено неравенство $\|\Phi(t)e^{-Dt}\|\leqslant c_1$. Обозначим $h_2=h_1/c_1$. Тогда при всех $(t,z)\in[t_0,+\infty)\times\mathrm{B}^n_{h_2}(0)$ получаем оценку

$$\|y\|\leqslant\|\Phi(t)e^{-Dt}\|\,\|z\|<c_1\|z\|\leqslant c_1h_2=h_1,$$

то есть $(t,y)\in[t_0,+\infty)\times\mathrm{B}^n_{h_1}(0)$.

2) При всех $(t,z) \in [t_0,+\infty) \times \mathrm{B}^n_{h_2}(0)$:

$$\|g(t,z)\| \leqslant \widetilde{\psi}(t)\|z\|^m,$$

где $\lambda[\widetilde{\psi}] \leqslant \sigma_{\text{Л}}(A+BV) + (1-m)\alpha = \sigma_{\text{Л}}(A) + (1-m)\alpha < \sigma_{\text{Л}}(A) + (1-m)\dfrac{2+\sigma_{\text{Л}}(A)}{m-1} = -2.$ Следовательно, при некотором $c_2 > 0$ и всех $t \geqslant t_0$ имеет место оценка $\widetilde{\psi}(t) \leqslant c_2 e^{-t}$, поэтому при всех $t \geqslant t_0$

$$\int_{t_0}^t \widetilde{\psi}(s)\,ds \leqslant c_2 \int_{t_0}^t e^{-s}\,ds = c_2\bigl(e^{-t_0} - e^{-t}\bigr) \leqslant c_2 e^{-t_0} \leqslant c_3. \tag{9}$$

Считаем, что $c_3 > 1$.

Положим $\delta = \dfrac{\min\{1,h_2\}}{2c_3\|e^{Dt_0}\Phi^{-1}(t_0)\|.}$ Выберем произвольное $x_0 \in \mathrm{B}^n_\delta(\widehat{x}(t_0))$ и положим $y_0 = x_0 - \widehat{x}(t_0)$. Тогда $y_0 \in \mathrm{B}^n_\delta(0)$. Возьмем $z_0 = e^{Dt_0}\Phi^{-1}(t_0)y_0$. Имеем неравенство

$$\|z_0\| < \frac{\min\{1,h_2\}}{2c_3} < \frac{h_2}{2c_3}.$$

Рассмотрим задачу Коши для системы (8) с начальным условием

$$z(t_0) = z_0. \tag{10}$$

Тогда в силу формулы Коши

$$z(t) = e^{D(t-t_0)}z_0 + \int_{t_0}^t e^{D(t-s)} g\bigl(s, z(s)\bigr)\,ds. \tag{11}$$

Решение интегрального уравнения (11) и задачи Коши (8), (10) определено на некотором полуинтервале $[t_0, t_0+l)$, причем $\|z(t)\| < \min\{h_2, 1\}$ при всех $t \in [t_0, t_0+l)$.

Поскольку D — диагональная матрица и ее наибольший элемент равен $\lambda_n(A) + \mu + \alpha = \lambda_n(A) - 2\alpha - \lambda_n(A) + \alpha = -\alpha$, имеем равенство $\|e^{D(t-s)}\| = e^{-\alpha(t-s)}$ при всех $t \geqslant s \geqslant t_0$. Следовательно, при всех $t \in [t_0, t_0+l)$

$$\|z(t)\| \leqslant e^{-\alpha(t-t_0)}\|z_0\| + \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)}\widetilde{\psi}(s)\|z(s)\|^m\,ds <$$

$$< e^{-\alpha(t-t_0)}\|z_0\| + \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)}\widetilde{\psi}(s)\|z(s)\|\,ds.$$

Умножим полученное неравенство на $e^{\alpha(t-t_0)}$:

$$\|z(t)\|e^{\alpha(t-t_0)} < \|z_0\| + \int_{t_0}^t \widetilde{\psi}(s)\|z(s)\|e^{\alpha(s-t_0)}\,ds.$$

На основании леммы Гронуолла–Беллмана [6, с. 108–109] и неравенства (9) получаем оценку

$$\|z(t)\|e^{\alpha(t-t_0)} < \|z_0\|\exp\biggl(\int_{t_0}^t \widetilde{\psi}(s)\,ds\biggr) \leqslant \|z_0\|\exp\biggl(c_2\int_{t_0}^t e^{-s}\,ds\biggr) \leqslant c_3\|z_0\| < c_3 \cdot \frac{h_2}{2c_3} = \frac{h_2}{2},$$

поэтому при всех $t \in [t_0, t_0+l)$

$$\|z(t)\| < \frac{h_2}{2}e^{-\alpha(t-t_0)}. \tag{12}$$

Следовательно, при каждом $t \in (t_0, t_0+l)$ точка $(t, z(t))$ является внутренней точкой области $\{(t,z) \in (t_0,+\infty) \times B^n_{h_2}(0)\}$, откуда вытекает [6, с. 275] продолжаемость решения $z(\cdot)$ на всю полуось $[t_0,+\infty)$, и при каждом $t \geqslant t_0$ выполнена оценка (12). Тогда решение $y(\cdot)$ задачи Коши для системы (7) с начальным условием $y(t_0)=y_0$ задается равенством $y(t)=\Phi(t)e^{-Dt}z(t)$, определено при всех $t \geqslant t_0$ и удовлетворяет оценке

$$\|y(t)\| < c_1\|z(t)\| < \frac{c_1 h_2}{2}e^{-\alpha(t-t_0)} = \frac{h_1}{2}e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

Наконец, решение $x(\cdot)$ задачи Коши для системы (1) с начальным условием $x(t_0)=x_0$ и управлением $u(t)=\widehat{u}(t)+v(t)$ задается равенством $x(t)=\widehat{x}(t)+y(t)$, поэтому оно определено при всех $t \geqslant t_0$ и

$$\|x(t)-\widehat{x}(t)\| \leqslant \frac{h_1}{2}e^{-\alpha(t-t_0)},$$

а для управления $u(\cdot)$ имеем оценку

$$\|u(t)-\widehat{u}(t)\| = \|v(t)\| \leqslant \|V(t)y(t)\| \leqslant \frac{v_0 h_1}{2}e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

Полагая $c=\max\{1,v_0\}h_1/2$, получим требуемые неравенства. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тонков Е. Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференциальные уравнения. — 1979. — Т. 15, № 10. — С. 1804–1813.
2. Макаров Е. К., Попова С. Н. О глобальной управляемости центральных показателей линейных систем // Известия вузов. Математика. — 1999. — № 2(441). — С. 60–67.
3. Зайцев В. А. Об управлении показателями Ляпунова и о λ-приводимости // Вестник Удмуртского университета. Ижевск. — 2000. — № 1. — С. 68–77.
4. Попова С. Н. О глобальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, № 8. — С. 1048–1054.
5. Зайцев В. А. Ляпуновская приводимость и стабилизация нестационарных систем с наблюдателем // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, № 3. — С. 432–442.
6. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
7. Kalman R. E. Contributions to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. — 1960. — Vol. 5, № 1. — P. 102–119.
8. Массера Х. Л. К теории устойчивости // Математика: сб. переводов. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. — 1:4. — С. 81–101.

Поступила в редакцию 01.03.10

V. A. Zaitsev, S. N. Popova, E. L. Tonkov
Exponential stabilization of nonlinear control systems

New sufficient condition of exponential stabilization of nonlinear control system is proved.

Keywords: nonlinear control system, linear control system, exponential stabilization.

Mathematical Subject Classifications: 34H15, 93D15

Зайцев Василий Александрович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4),
E-mail: verba@udm.ru
Попова Светлана Николаевна, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4),
E-mail: ps@uni.udm.ru
Тонков Евгений Леонидович, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: eltonkov@udm.ru