

УДК 517.977.58

© П. Д. Лебедев, А. А. Успенский

**АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ МНОЖЕСТВ
ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ¹**

Излагаются элементы численно-аналитического подхода к построению решения для одного класса задач быстродействия на плоскости. Предложены алгоритмы конструирования множества негладкости функции оптимального результата. Выявлена структура множеств Лебега этой функции. Обоснованы формулы для точек прекращения сингулярных кривых. Приведены результаты моделирования решений задач быстродействия для случая, когда целевое множество является невыпуклым и имеет кусочно-гладкую границу. Работа продолжает исследование обобщенных решений задач Дирихле для уравнений типа Гамильтона–Якоби.

Ключевые слова: задача быстродействия, рассеивающая линия, псевдовершина множества.

Введение

Рассмотрена задача управления по быстродействию с постоянной вектограммой скоростей и невыпуклым целевым множеством с кусочно-гладкой границей. Предложены методы построения функции оптимального результата. В рамках аналитического подхода проведено построение сингулярных кривых, на которых функция оптимального результата теряет гладкость. Получены формулы крайних точек этих кривых. Изучены свойства характеристических точек (псевдовершин) границы целевого множества, которые обуславливают зарождение изломов множеств управляемости в задаче быстродействия. Основными результатами исследования являются установление структуры линий уровня функции оптимального результата и разработка численно-аналитических процедур ее построения.

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается задача быстродействия на плоскости \mathbb{R}^2 с динамикой

$$\begin{cases} \dot{x} = \nu_1 + \mu_1, \\ \dot{y} = \nu_2 + \mu_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

и замкнутым целевым множеством $M \subset \mathbb{R}^2$. Здесь управление $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ стеснено ограничением $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2} \leq 1$, вектор $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ постоянный и удовлетворяет неравенству $\|\mu\| < 1$. Содержательно задача быстродействия заключается в приведении динамической системы (1.1) на множество M за наименьшее время за счет выбора допустимого позиционного управления ν [1].

Функция оптимального результата в задаче (1.1) совпадает с минимаксным решением задачи Дирихле для дифференциального уравнения в частных производных первого порядка [2]

$$\min_{\nu: \|\nu\| \leq 1} \left((\nu_1 + \mu_1) \frac{\partial u}{\partial x} + (\nu_2 + \mu_2) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 1 = 0, \quad (1.2)$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (1.3)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00587-а), программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-2640.2008.1), регионального гранта РФФИ/ПСО (проект 07-0196085) и программы Президиума РАН «Математическая теория управления».

Краевое условие (1.3) определено на границе $\Gamma = \partial M$ целевого множества $M \subset \mathbb{R}^2$, граница $\Gamma = \partial M$ которого является непрерывной склейкой дважды гладких кривых без точек самопересечения. Уравнение (1.2) является уравнением Айзекса–Беллмана [3] для задачи (1.1).

Когда вектор $\mu = (0, 0) = \mathbf{0}$, динамика системы принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \nu_1, \\ \dot{y} = \nu_2. \end{cases} \quad (1.4)$$

Задача быстрого действия (1.4) с теми же целевым множеством и ограничением на управление изучалась ранее с применением методов дифференциальной геометрии и выпуклого анализа [4, 5]. Показано, что основным элементом решения задачи является функция евклидова расстояния от точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ до множества M , которая совпадает с обобщённым (минимаксным) решением задач Дирихле для соответствующего уравнения Айзекса–Беллмана. Была выявлена структура сингулярных линий минимаксного решения и предложены процедуры их построения [6–9]. Стоит отметить, что возникающие негладкие особенности решения задачи определяются геометрией волновых фронтов [10–12].

Основная цель данного исследования состоит в разработке алгоритмов построения сингулярных кривых в задаче (1.1) и конструирования на их основе функции оптимального результата.

§ 2. Связь решения задачи с биссектрисой целевого множества

Задача (1.1) имеет сравнительно простую динамику, что позволяет сделать некоторые выводы относительно оптимальных траекторий и оптимального управления. Поскольку вектограмма скоростей $I = S_1 + \mu$ (S_1 — круг единичного радиуса с центром в начале координат), то оптимальная траектория [1, 3] всегда есть отрезок, соединяющий \mathbf{x} с точкой $\mathbf{y} \in \partial M$ множества M такой, что фазовый вектор системы достигает целевое множество за минимально возможное время, двигаясь по отрезку $[\mathbf{y}, \mathbf{x}]$. Управление ν выбирается постоянным, таким чтобы вектор скорости $\dot{\mathbf{x}} = \nu + \mu$ был сонаправленным вектору $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ и максимальным по норме [13]. Основная трудность при построении оптимальной траектории — отыскание точки \mathbf{y} .

Определение 1. Проекцией точки \mathbf{x} на множество M назовём ближайшую к \mathbf{x} в евклидовой метрике точку из M . Символом $\Omega_M(\mathbf{x})$ обозначим совокупность всех проекций точки \mathbf{x} на M .

Определение 2. Точку $\mathbf{y} \in \partial M$ назовём обобщённой проекцией точки $\mathbf{x} \in G$ на множество M в задаче (1.1), если отрезок $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ является оптимальной траекторией.

Множество всех обобщённых проекций точки $\mathbf{x} \in G$ будем обозначать $\Omega_{M,\mu}(\mathbf{x})$.

Замечание 1. Множество $\Omega_{M,\mu}(\mathbf{x})$ всегда непустое, поскольку множество допустимого управления является компактом I , таким что $\mathbf{0} \in \text{int } I$, а значит, для любой точки $\mathbf{y} \in \partial M$ найдётся такое число $t > 0$, что $\mathbf{y} \in (\mathbf{x} + tI)$.

Поскольку вектограмма скоростей $I = S_1 + \mu$ не зависит от координаты и времени и выпуклая, то множество достижимости [1] в точке \mathbf{x} в момент времени t равно

$$\tilde{X}(\mu, t, \mathbf{x}) = \mathbf{x} + t(S_1 + \mu).$$

Лемма 1. Точка $\mathbf{y} \in \partial M$ принадлежит множеству $\Omega_{M,\mu}(\mathbf{x})$ обобщённых проекций точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ в задаче (1.1) тогда и только тогда, когда найдётся число $t > 0$ такое, что выполняются вложения

$$\mathbf{y} \in \partial(\mathbf{x} + t(S_1 + \mu)) \cap M. \quad (2.1)$$

$$\forall t^* \in (0, t) \quad (\mathbf{x} + t^*(S_1 + \mu)) \cap M = \emptyset. \quad (2.2)$$

Доказательство. Покажем достаточность условий. Если условия (2.1), (2.2) выполняются, то решение системы может достичь множества M не раньше момента времени t , что следует из (2.2). Причём из (2.1) вытекает, что ровно в этот момент решение достигнет M , если будет двигаться сонаправленно вектору $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ с максимально возможной скоростью из $S_1 + \mu$. Следовательно, отрезок $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ является оптимальной траекторией (возможно не единственной).

Покажем необходимость условий. Пусть отрезок $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ — оптимальная траектория и функция оптимального результата в точке \mathbf{x} равна $u(\mathbf{x})$. Тогда при $t = u(\mathbf{x})$ выполняется вложение (2.1). В то же время поскольку $\mathbf{0} \in \text{int } I$, для множества достижимости, отвечающего моменту времени $t^* < t$,

$$\tilde{X}(\mu, t^*, \mathbf{x}) \subset \text{int } \tilde{X}(\mu, t, \mathbf{x}),$$

а следовательно, имеет место (2.2). \square

Лемма 2. Точка $\mathbf{x} \in G$ имеет множество проекций $\Omega_M(\mathbf{x})$ тогда и только тогда, когда точка $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} - \rho(\mathbf{x}, M)\mu$ имеет множество обобщённых проекций $\Omega_{M,\mu}(\mathbf{x}^*) = \Omega_M(\mathbf{x})$.

Доказательство. Покажем, что если выполняется $\mathbf{y} \in \Omega_M(\mathbf{x})$, то справедливо и $\mathbf{y} \in \Omega_{M,\mu}(\mathbf{x}^*)$. Действительно, пусть $\rho(\mathbf{x}, M) = t_1$. Множество достижимости из точки \mathbf{x} в задаче (1.4) и из точки $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} - \rho(\mathbf{x}, M)\mu$ совпадают в момент времени $t = \rho(\mathbf{x}, M)$ в силу специфики вектограмм скоростей в задачах (1.4) и (1.1) и являются кругом $t_1 S_1 + \mathbf{x} = t_1(S_1 + \mu) + \mathbf{x} - \mu t$. При этом точка \mathbf{y} лежит на границе множества достижимости $\tilde{X}(\mu, t_1, \mathbf{x}^*)$, причём для всех моментов времени времени $t < t_1$ выполняется $\tilde{X}(\mu, t, \mathbf{x}^*) \cap M = \emptyset$, что следует из леммы 2. Следовательно, $\mathbf{y} \in \Omega_{M,\mu}(\mathbf{x}^*)$.

Аналогично, из того что $\mathbf{y} \in \Omega_{M,\mu}(\mathbf{x}^*)$ и $\rho(\mathbf{x}, M) = t$, вытекает, что точка \mathbf{y} лежит на границе круга радиуса t с центром в \mathbf{x} , причём все круги с меньшим радиусом и тем же центром не пересекают множество M . Следовательно, \mathbf{y} входит в $\Omega_M(\mathbf{x})$. \square

Структура вектограммы скоростей позволяет находить линии уровня функции оптимального результата $\Phi(u^*) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus M : u(\mathbf{x}) = u^*\}$. В задаче (1.4) линии уровня совпадают с геометрическим местом точек, лежащих на равном расстоянии от множества M [4]. Покажем их связь с линиями уровня в более общей задаче (1.1).

Теорема 1. Пусть $\Phi(u^*)$ — линия уровня функции оптимального результата в задаче (1.4) с целевым множеством M . Тогда линия уровня $\Phi_\mu(u^*)$ в задаче (1.1) с тем же целевым множеством M вычисляется по формуле

$$\Phi_\mu(u^*) = \Phi(u^*) - \{u^* \mu\}. \quad (2.3)$$

В формуле (2.3) разность множеств понимается в алгебраическом смысле, то есть

$$A - B = \{(a - b) : a \in A, b \in B\}.$$

Выражение (2.3) означает, что множество $\Phi_\mu(u^*)$ совпадает со множеством $\Phi(u^*)$, смещённым на вектор $-u^* \mu$.

Доказательство. В силу леммы 2 функция оптимального результата в задаче (1.4) принимает значение $u(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x} тогда и только тогда, когда функция оптимального результата в задаче (1.1) принимает то же значение $u(\mathbf{x}^*)$ в точке $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + u(\mathbf{x})\mu$. Следовательно, для линий уровня функции оптимального результата связаны соотношением (2.3). \square

Обозначим $L(M, \mu)$ множество точек, для которых найдутся не менее двух оптимальных траекторий в задаче (1.1). Для случая $\mu = \mathbf{0}$ множество $L(M, \mu) = L(M, \mathbf{0})$ совпадает с биссектрисой $L(M)$ множества M (множеством точек из $\mathbb{R}^2 \setminus M$, имеющих более одной проекции на множество M , см. [5]). По классификации Айзекса $L(M, \mu)$ есть рассеивающая линия в задаче [3], в её точке \mathbf{x}_* теряет гладкость функция оптимального результата $u(\mathbf{x})$ и соответственно её линии уровня.

Из леммы 2 и теоремы 1 вытекает связь между рассеивающими линиями в задаче (1.1) и биссектрисой множества. Построив биссектрису $L(M)$ множества M и зная функцию расстояния от её точек до M , по формуле (2.3) находим координаты точек $L(\mu, M)$.

§ 3. Крайние точки рассеивающих линий

При изучении биссектрисы ключевое значение играют псевдовершины множества и крайние точки биссектрисы.

Определение 3. Несовпадающие точки \mathbf{y}_1 и \mathbf{y}_2 границы ∂M множества M , являющиеся проекциями точки \mathbf{x} биссектрисы $L(M)$ на это множество, называются α -симметричными точками. При этом \mathbf{x} называется точкой, порожденной парой $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$.

На границе ∂M множества M выделим точки, отвечающие за зарождение биссектрисы. Ограничимся при этом рассмотрением случая, когда M — подграфик почти всюду дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ с замкнутой связной областью определения $X \subseteq \mathbb{R}$.

Определение 4. Будем называть точку $\mathbf{y}_0 \in \partial M$ псевдовершиной множества M , если существует последовательность $\{(\mathbf{y}_n^*, \mathbf{y}_n^\square)\}_{n=1}^\infty$ пар α -симметричных точек, сходящаяся к $(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{y}_n^*, \mathbf{y}_n^\square) = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0).$$

Определение 5. Пусть W — псевдовершина множества M с биссектрисой $L(M)$. Будем говорить, что точка V является крайней точкой биссектрисы, соответствующей псевдовершине W , если существуют последовательности $\{(\mathbf{y}_n^*, \mathbf{y}_n^\square)\}_{n=1}^\infty \subset \partial M$ и $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^\infty \subset L(M)$, для которых выполняются условия

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{y}_n^*, \mathbf{y}_n^\square) = (W, W)$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = V$;
- 3) $\forall n \in \mathbb{N} (\mathbf{y}_n^*, \mathbf{y}_n^\square) \subset \Omega_M(\mathbf{x}_n)$.

Свойства псевдовершин и крайних точек биссектрис изучались в работах [4–7]. В частности, получен важный результат

Лемма 3. Если $W = (x_0, f(x_0))$ — псевдовершина множества M с границей $\Gamma = \text{gr } f$, функция f дважды дифференцируема в x_0 , причем $f''(x_0) \neq 0$, то крайняя точка $V = (\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ биссектрисы $L(M)$ является центром кривизны [14] кривой $\Gamma = \text{gr } f$ в точке $W = (x_0, f(x_0))$.

Из леммы 3 следует, что координаты крайней точки $V = (\bar{x}_0, \bar{y}_0)$, соответствующей псевдовершине W вычисляются по формулам

$$\bar{x}_0 = x_0 - \frac{y'_0 (1 + (y'_0)^2)}{y''_0}, \quad \bar{y}_0 = y_0 + \frac{1 + (y'_0)^2}{y''_0}. \tag{3.1}$$

Здесь и далее обозначаем: $y_i = f(x_i)$, $y'_i = f'(x_i)$, $y''_i = f''(x_i)$, $i = 0, 1$.

Замечание 2. Поскольку по условию леммы 3 $y''_0 \neq 0$, то центр кривизны у Γ в псевдовершине W определен [14]. Под условия леммы не попадают точки спрямления.

В окрестности псевдовершины W , отвечающей условиям леммы 3, существует диффеоморфизм $x_2 = x_2(x_1)$, связывающий абсциссы проекций $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in \Omega_M(\mathbf{y})$ точек биссектрисы $L(M)$. Предельное значение производной диффеоморфизма равно

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{x_2(x_1) - x_0}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{dx_2}{dx_1} = -1.$$

Подробнее о диффеоморфизмах, порождаемых α -симметричными точками в окрестностях псевдовершин, изложено в [8, 9].

Возможна принципиально другая ситуация, когда псевдовершина W является точкой негладкости для $\text{gr } f$, и для некоторых $\mathbf{y} \in L(M)$ выполняется включение $W \in \Omega_M(\mathbf{y})$. В этом случае точка $\mathbf{y} = (x^*, y^*)$ лежит на пересечении нормали к кривой Γ , построенной в точке $A(x_1, y_1)$, и срединного перпендикуляра к отрезку $[A, W]$, её координаты:

$$x^* = \frac{2(x_1 + y_1' y_1)(y_1 - y_0) - y_1'(x_1^2 + y_1^2 - x_0^2 - y_0^2)}{2(y_1 - y_0) - 2y_1'(x_1 - x_0)}; \quad (3.2)$$

$$y^* = \frac{x_1^2 + y_1^2 - x_0^2 - y_0^2 - 2(x_1 - x_0)(x_1 + y_1 y_1')}{2(y_1 - y_0) - 2y_1'(x_1 - x_0)}. \quad (3.3)$$

В формулах (3.2), (3.3) подразумевается, что нормаль к Γ в точке A не перпендикулярна и не параллельна вектору $A - W$.

Для псевдовершины $W = W(x_0, y_0)$, являющейся общей проекцией для точек некоторой ветви биссектрисы, и соответствующей ей крайней точки биссектрисы сформулируем лемму для случая, когда множество M — подграфик функции f , дважды дифференцируемой в выколотой окрестности точки x_0 .

Лемма 4. Пусть $W = (x_0, y_0)$ — псевдовершина множества $M = \text{hup } f$, функция f не дифференцируема в точке x_0 , но дважды дифференцируема в некоторой окрестности x_0 . При этом для точек некоторой ветви биссектрисы $L(M)$ одна из проекций $A(x_1, y_1)$ лежит на гладком участке Γ , а другая проекция совпадает с W . Тогда если существуют последовательности $\{A_n = (x_n, y_n)\}_{n=1}^\infty \subset \partial M$ и $\{\mathbf{x}_n^*\}_{n=1}^\infty \subset L(M)$, для которых выполняются условия

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0;$$

$$2) \forall n \in \mathbb{N} \ x_n > x_0 \text{ (либо } \forall n \in \mathbb{N} \ x_n < x_0);$$

$$3) \forall n \in \mathbb{N} \ (A_n, W) = \Omega_M(\mathbf{x}_n^*),$$

то крайняя точка $V = (\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ биссектрисы $L(M)$ является пределом центров кривизны кривой $\Gamma = \text{gr } f$ в точке $W = (x_0, y_0)$ справа, если $x_n > x_0$ и

$$\bar{x}_0 = x_0 - \frac{f'(x_0 + 0)(1 + (f'(x_0 + 0))^2)}{f''(x_0 + 0)}, \quad \bar{y}_0 = f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0 + 0))^2}{f''(x_0 + 0)}, \quad (3.4)$$

либо слева, если $x_n < x_0$ и

$$\bar{x}_0 = x_0 - \frac{f'(x_0 - 0)(1 + (f'(x_0 - 0))^2)}{f''(x_0 - 0)}, \quad \bar{y}_0 = f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0 - 0))^2}{f''(x_0 - 0)}, \quad (3.5)$$

Доказательство. Обозначим $y'(x_0 - 0) = f'(x_0 - 0)$ и $y'(x_0 + 0) = f'(x_0 + 0)$ — односторонние производные в точке $x = x_0$ слева и справа соответственно.

Аналогично символами $y''(x_0 - 0) = f''(x_0 - 0)$, $y''(x_0 + 0) = f''(x_0 + 0)$ обозначены односторонние производные второго порядка соответственно слева и справа в точке $x = x_0$, то есть

$$y''(x_0 + 0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0, x_1 > x_0} \frac{f'(x_1) - f'(x_0 + 0)}{x_1 - x_0}, \quad y''(x_0 - 0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0, x_1 < x_0} \frac{f'(x_1) - f'(x_0 - 0)}{x_1 - x_0}.$$

Рассмотрим случай, когда для проекций точки биссектрисы выполняется $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n > x_0$, то есть их абсциссы лежат в правой полукрестности точки x_0 . Полагаем без ограничения общности, что $x_0 = y_0 = y_0' = 0$, то есть псевдовершина W лежит в начале координат и предельное положение нормали к $\text{hup } f$ справа совпадает с осью ординат. Этого всегда можно

добиться при помощи поворота и параллельного переноса системы координат. При этом предел координат центров кривизны V_n кривой $gr f$ в точках A_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \left(0, \frac{1}{y''(+0)} \right). \quad (3.6)$$

Для координат точек $Q_n \in L(M)$, порождённых парами (A_n, W) , выполняются (3.2), (3.3). При этом на некотором достаточно малом интервале $(0, \varepsilon)$ по формуле Тейлора справедливы представления

$$f(x_1) = f(0) + f'(+0)x_1 + \frac{1}{2}f''(+0)x_1^2 + o((x_1)^2) = \frac{1}{2}f''(+0)(x_1)^2 + o((x_1)^2),$$

$$f'(x_1) = f'(0) + f''(+0)(x_1) + o(x_1 - x_0) = f''(+0)x_1 + o(x_1),$$

где $o(\lambda)$ бесконечно малая величина более высокого порядка, чем λ , то есть

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} o(\lambda)\lambda^{-1} = 0.$$

Найдём предел (x_v, y_v) координат точки $N(x, y)$ пересечения нормали к кривой Γ в точке $A = (x_1, y_1)$ со срединным перпендикуляром к отрезку $[A, W]$ при стремлении x_1 к нулю, что соответствует предельному стремлению точки A к псевдовершине W по дуге кривой Γ (справа):

$$\begin{aligned} x_v &= \lim_{x_1 \rightarrow +0} \frac{2(x_1 + y'_1 y_1)y_1 - y'_1(x_1^2 + y_1^2)}{2y_1 - 2y'_1 x_1} = \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow +0} \frac{2(x_1 + (y''(0)x_1 + o(x_1))o(x_1))o(x_1) - (y''(0)x_1 + o(x_1))(x_1^2 + o(x_1)^2)}{2(y''(+0)(x_1)^2/2 + o(x_1)^2) - 2(y''(+0)(x_1)^2 + o(x_1)^2)x_1} = \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow +0} \frac{2x_1 o(x_1) + o(x_1)^2}{y''(+0)x_1^2 - 2y''(+0)x_1^2 + o(x_1)^2} = \lim_{x_1 \rightarrow +0} \frac{2x_1 o(x_1)}{-y''(+0)x_1^2} = \lim_{x_1 \rightarrow +0} \frac{2o(x_1)}{-y''(+0)x_1} = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} y_v &= \lim_{x_1 \rightarrow +0} \frac{x_1^2 + y_1^2 - 2x_1(x_1 + y_1 y'_1)}{2y_1 - 2y'_1 x_1} = \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow +0} \frac{x_1^2 + o(x_1)^2 - 2x_1(x_1 + o(x_1)(y''(0)x_1 + o(x_1)))}{2(y''(+0)(x_1)^2/2 + o(x_1)^2) - 2(y''(+0)(x_1)^2 + o(x_1)^2)x_1} = \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow +0} \frac{x_1^2 - 2x_1^2 + o(x_1)^2}{-y''(+0)x_1^2 + o(x_1)^2} = \lim_{x_1 \rightarrow +0} \frac{-x_1^2 + o(x_1)^2}{-y''(+0)x_1^2 + o(x_1)^2} = \frac{1}{y''(+0)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Выражения (3.7), (3.8) дают координаты точки N , совпадающие с координатами точки V из выражения (3.6). Значит, для произвольных точек $A = (x_1, y_1)$, лежащих в достаточно малой окрестности псевдовершины W ,

$$\lim_{x_1 \rightarrow +0} N(x, y) = V.$$

Следовательно, и для любой последовательности $\{(A_n(x_1, y_1), W(0, 0))\}_{n=1}^{\infty} \subset \Gamma$ пар α -симметричных точек, сходящейся к (W, W) при $x_1 > 0$, соответствующая им последовательность точек $\{\mathbf{x}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ биссектрисы $L(M)$ сходится к точке V — пределу центров кривизны Γ в точках при стремлении A к W .

Аналогично лемма доказывается и в случае, если условие 2) имеет вид $x_1 < 0$. \square

Поскольку геометрия рассеивающих линий в задаче быстрогодействия тесно связана с геометрией биссектрисы $L(M)$ множества M , то знание псевдовершин множества позволяет находить особые точки кривой $L(M, \mu)$.

Определение 6. Пусть W — псевдовершина множества M с биссектрисой $L(M)$. Будем говорить, что точка V является крайней точкой рассеивающей линии $L(M, \mu)$, соответствующей псевдовершине W , если существуют последовательности $\{(\mathbf{y}_n^*, \mathbf{y}_n^\square)\}_{n=1}^\infty \subset \partial M$ и $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^\infty \subset L(M, \mu)$, для которых выполняются условия

$$\begin{aligned} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{y}_n^*, \mathbf{y}_n^\square) &= (W, W); \\ 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n &= V; \\ 3) \forall n \in \mathbb{N} (\mathbf{y}_n^*, \mathbf{y}_n^\square) &\subset \Omega_M(\mathbf{x}_n). \end{aligned}$$

Крайние точки рассеивающих линий являются для замыкания кривой $L(M)$ точками прекращения по классификации, принятой в дифференциальной геометрии. Их координаты находятся на основе соответствующих лемм для крайних точек биссектрисы [7–9].

Если $W = (x_0, f(x_0))$ — псевдовершина множества M , отвечающая условиям леммы 3, то из леммы 2 и теоремы 1 следует, что крайняя точка $V_\mu = (\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ рассеивающей линии $L(M, \mu)$, соответствующая псевдовершине W , вычисляется по формуле

$$V_\mu = C - R(W)\mu. \quad (3.9)$$

Здесь C — центр кривизны кривой $\Gamma = \text{gr } f$ в точке W , $R(W)$ — радиус кривизны кривой $\Gamma = \text{gr } f$ в точке W .

Если $W = (x_0, f(x_0))$ — псевдовершина множества M , отвечающая условиям леммы 4, то крайняя точка $V_\mu = (\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ рассеивающей линии $L(M, \mu)$, соответствующая псевдовершине W , вычисляется по формуле

$$V_\mu = \lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} (C(x) - R(x)\mu), \quad (3.10)$$

если по условию 2) леммы 4 проекции точек биссектрисы лежат в левой полуокрестности точки x_0 ; либо

$$V_\mu = \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} (C(x) - R(x)\mu), \quad (3.11)$$

если проекции точек биссектрисы лежат в правой полуокрестности точки x_0 . Здесь $C(x)$ — центр кривизны кривой $\Gamma = \text{gr } f$ в точке $(x, f(x))$, $R(x)$ — радиус кривизны кривой $\Gamma = \text{gr } f$ в точке $(x, f(x))$.

§ 4. Примеры вычисления функции оптимального результата

Приведём результаты моделирования задачи быстрого действия (1.1) с различными целевыми множествами. Конструирование решения опирается на последовательное построение рассеивающих линий $L(M, \mu)$ и множеств управляемости системы.

Пример 1. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dot{x} = \nu_1 - 0.3 \\ \dot{y} = \nu_2 - 0.1 \end{cases} \quad (4.1)$$

с ограничением на управление $\|\nu\| \leq 1$, когда в качестве целевого множества взято

$$M = \text{hyp } f, \quad f(x) = x^4 - 0.25x. \quad (4.2)$$

Отметим несколько характерных особенностей биссектрисы $L(M)$. Во-первых, у множества есть две псевдовершины: $W_1 \approx (-0.489, 0.179)$ и $W_2 \approx (0.545, -0.048)$. В них кривизна границы множества (кривой $\Gamma = \{(x, y) : y = x^4 - 0.25x\}$) достигает максимума. Во-вторых,

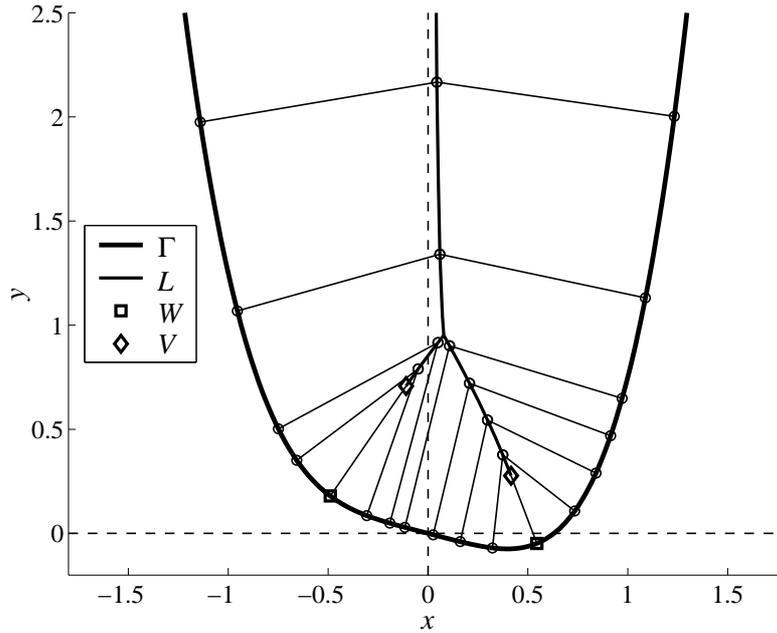


Рис. 1. Биссектриса множества (4.2)

на кривой $L(M)$ есть точка бифуркации $Q \approx (0.079, 0.951)$, в которой две гладкие ветви сливаются в одну.

На рис. 1 граница целевого множества обозначена Γ , биссектриса L , псевдовершины W , крайние точки биссектрисы V . Точки биссектрисы и их проекции обозначены маркерами в виде кружков. Рисунок иллюстрирует диффеоморфизм, определяемый α -симметричными точками в окрестностях гладких псевдовершин.

Рассеивающая линия $L(M, \mu)$ соответственно имеет две крайние точки, координаты которых находятся по лемме из формулы (3.9), а также одну точку бифуркации. Граница Γ целевого множества, линии уровня Φ функции оптимального результата и рассеивающая линия L представлены на рис. 2.

График решения $u = u(x, y)$ задачи (1.1) на прямоугольной сетке с шагом 0.05 представлен на рис. 3. Непрерывное продолжение решения на множество M принимается тождественно равным нулю.

Пример 2. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dot{x} = \nu_1 + 0.3, \\ \dot{y} = \nu_2 + 0.4 \end{cases} \quad (4.3)$$

с тем же ограничением на управление $\|\nu\| \leq 1$. В качестве целевого множества возьмём

$$M = \text{hup } f, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ 1/(x + 1) - 1, & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

Функция $f(x)$ не дифференцируема в точке $x = 0$, при этом существуют односторонние производные $f'(-0) = 0$, $f'(0) = -1$. Для кривой $\Gamma = \partial M$ точка $(0, 0)$ является точкой излома. Поэтому точка $(0, 0)$ является общей проекцией для всех точек биссектрисы $L(M)$ и псевдовершиной $L(M)$ (см. рис. 4).

Координаты крайней точки рассеивающей линии находятся по формуле (3.10). Граница Γ целевого множества, линии уровня Φ функции оптимального результата и рассеивающая линия L представлены на рис. 5.

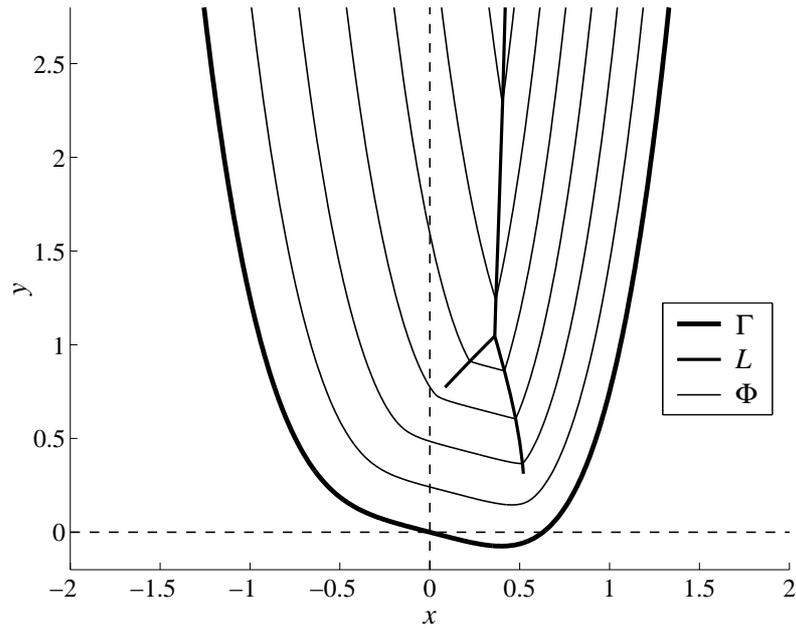


Рис. 2. Линии уровня функции $u = u(x, y)$ и рассеивающая линия
в задаче (4.1) с целевым множеством (4.2)

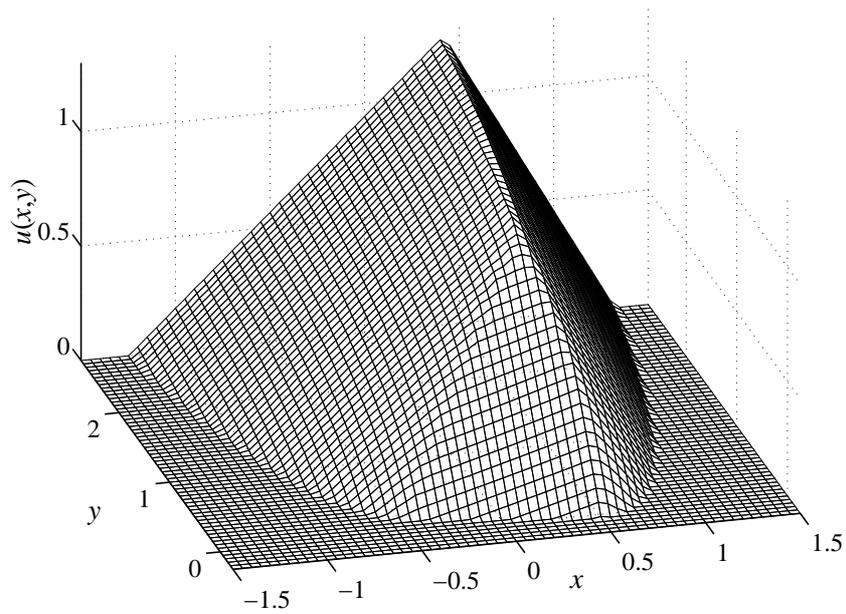


Рис. 3. Функция $u = u(x, y)$ в задаче (4.1) с целевым множеством (4.2)

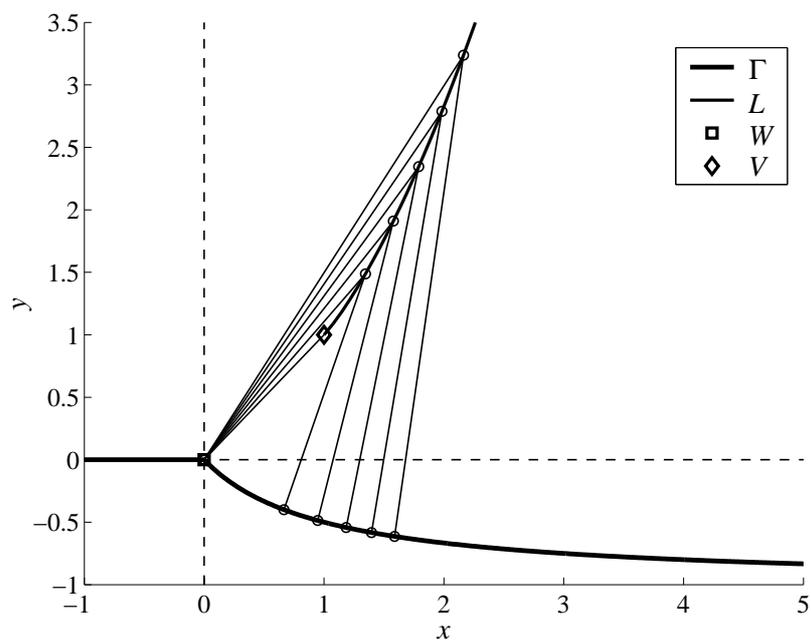


Рис. 4. Биссектриса множества (4.4)

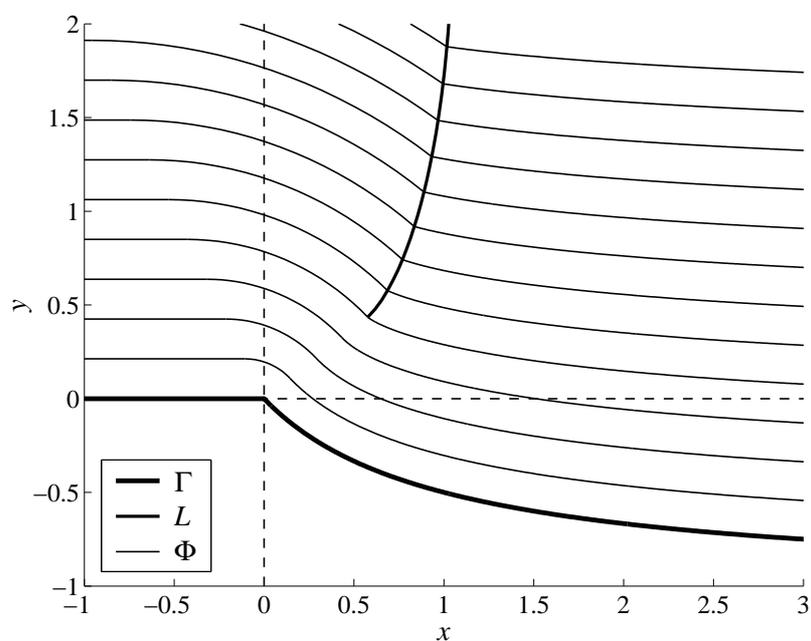


Рис. 5. Линии уровня функции $u = u(x, y)$ и рассеивающая линия в задаче (4.3) с целевым множеством (4.4)

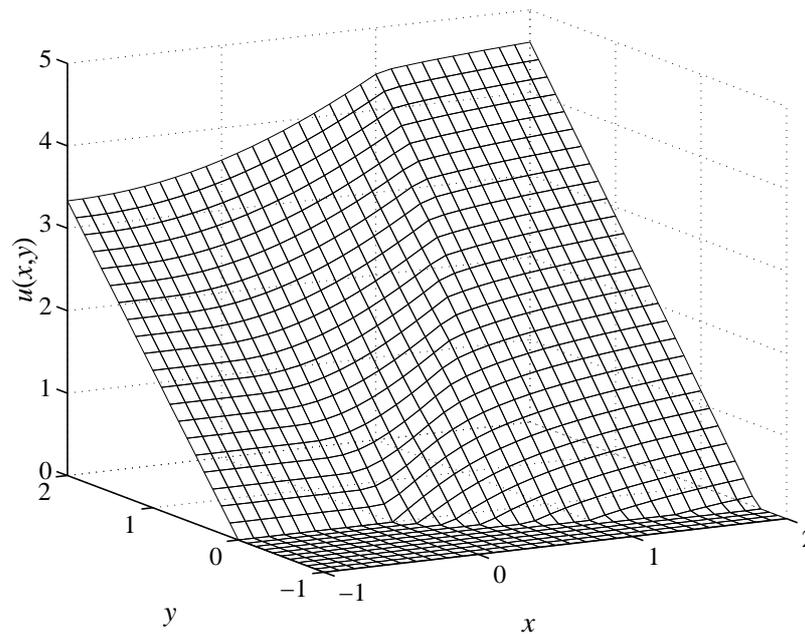


Рис. 6. Функция $u = u(x, y)$ в задаче (1.1) с целевым множеством (4.2)

График решения $u = u(x, y)$ задачи (1.1) на прямоугольной сетке с шагом 0.1 представлен на рис. 6. Его конструирование осуществлено посредством сплайна по его линиям уровня [15]. Непрерывное продолжение решения на множество M принимается тождественно равным нулю.

Функция оптимального результата $u = u(x, y)$ является гладкой на $\mathbb{R}^2 \setminus (M \cup L(M))$ и имеет излом в точках рассеивающей линии $L(M)$. Знание $L(M)$ позволяет конструировать оптимальные траектории в точках $\mathbb{R}^2 \setminus L(M)$, являющиеся в данной задаче отрезками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука. — 1974. — 456 с.
2. Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований. — 2003. — 336 с.
3. Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — 479 с.
4. Успенский А. А., Лебедев П. Д. Аналитическое и численное конструирование функции оптимального результата для одного класса задач быстродействия // Прикладная математика и информатика. Труды факультета ВМК МГУ. — 2007. — № 27. — С. 65–79.
5. Успенский А. А., Лебедев П. Д. Построение функции оптимального результата в задаче быстродействия на основе множества симметрии // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 7. — С. 50–57.
6. Успенский А. А., Лебедев П. Д., Ушаков В. Н. Построение минимаксного решения уравнений типа эйконала // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2008. — Т. 14, № 2. — С. 182–191.
7. Успенский А. А., Лебедев П. Д. Алгоритмы построения функции оптимального результата в задаче с простой динамикой // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2008. — Вып. 2. — С. 152–154.
8. Успенский А. А., Лебедев П. Д. Условия трансверсальности ветвей решения нелинейного уравнения в задаче быстродействия с круговой индикатрисой // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2008. — Т. 14, № 4. — С. 82–99.
9. Успенский А. А., Лебедев П. Д. О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 1. — С. 171–185.

10. Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. — М.: ФАЗИС. — 1996.
11. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности. — М.: Мир, 1988. — 262 с.
12. Sedykh V. D. On the topology of symmetry sets of smooth submanifolds in \mathbb{R}^k // Advanced Studies in Pure Mathematics 43, 2006. — Singularity Theory and Its Applications. P. 401–419.
13. Благодатских В. И. Введение в оптимальное управление. — М: Высш. шк., 2001. — 238 с.
14. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 432 с.
15. Ануфриев И. Е., Смирнов А. Б., Смирнова Е. Н. MATLAB 7. — СПб.: БХВ-Петербург. 2005. — 1104 с.

Поступила в редакцию 01.02.10

P. D. Lebedev, A. A. Uspenskiy

Singularities' of Optimal-Time Function in One Class of Optimal-Time Control Problems Construction Algorithms

Singular lines and nonsmooth singularities of cost function in one class of optimal-time problems are studied. Equations for their end points are written. Their relation with the geometry of the goal set is shown. Connection of the optimal-time problem and the first order PDE with boundary condition is ascertained. Examples of some problems' solving and graphs of solutions are given.

Keywords: optimal-time control problem, disperse line, pseudovericle of the set.

Mathematical Subject Classifications: 35F15, 37G10

Успенский Александр Александрович, к. ф.-м. н., с.н.с, ИММ УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, E-mail: uspen@imm.uran.ru

Лебедев Павел Дмитриевич, к. ф.-м. н., м.н.с, ИММ УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, E-mail: pleb@yandex.ru