УДК 517.972.8

© *А. Г. Ченцов*

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ МАКСИМИНА В ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА [1]

Рассматривается абстрактная игровая задача управления и ее релаксации, связанные с ослаблением ограничений на выбор программных стратегий. В последнем случае реализуется серия задач на максимин, для которых множества допустимых стратегий каждого из участников образуют направленную систему. Устанавливается, что значения реализуемого (при каждом конкретном варианте ослабления условий) максимина обладают свойством сходимости и указывается представление обобщенного предела упомянутых значений.

Ключевые слова: максимин, множество притяжения, ограничения асимптотического характера.

Введение

Основные сокращения: МП (множество притяжения), ОЗ (обобщенная задача), ОУ (обобщенное управление), п/м (подмножество), ТП (топологическое пространство), ЦК (целевой кортеж).

Во многих игровых задачах управления с ограничениями отсутствует свойство устойчивости по результату при ослаблении упомянутых ограничений. В то же время с точки зрения приложений естественно допускать возможность исчезающе малого нарушения исходной системы условий. Возникает вопрос об асимптотике значений соответствующих игровых задач с ослабленными ограничениями. Для его решения в настоящей работе привлекается (при некоторых условиях) конструкция асимптотического анализа, использующая МП. Существенным обстоятельством оказывается при этом возможность декомпозиции процесса построения «асимптотического значения», в рамках которой упомянутые МП конструируются для каждого из игроков в отдельности, после чего разыгрывается обычная задача на максимин при использовании этих МП в качестве ограничений на выбор стратегий. В свою очередь, для построения упомянутых МП можно использовать конструкции расширений, привлекая надлежащие обобщенные задачи (ОЗ). По существу, таким образом реализуется своеобразная декомпозиция процедуры расширения исходной игровой задачи.

В связи с построением расширений и релаксаций отметим исследования [1–6], имея в виду прежде всего задачи управления, включая игровые постановки (см. [1], [4–6]). Особо отметим конструкции аппроксимационных и конструктивных движений в задачах теории дифференциальных игр, используемых в рамках позиционной формализации Н. Н. Красовского. При этом следует отметить, что упомянутые аппроксимационные движения, формируемые стратегиями, экстремальными к стабильным мостам (см. [4]), развиваются (во времени) вблизи упомянутых мостов, упирающихся в соответствующие целевые множества; конструктивные (предельные) движения, напротив, развиваются (при действии экстремальных стратегий) в самих мостах. Сохранение реализуемых траекторий в мостах имеет, следовательно, асимптотический характер.

§ 1. Общие обозначения и определения

Используем кванторы и пропозициональные связки для сокращенной записи высказываний; def заменяет фразу «по определению», $\triangleq$ — равенство по определению. Принимаем аксиому

[1]Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Математическая теория управления» и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 09-01-00436, 08-08-00981).

выбора. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Через $\{x\}$, где x — некоторый объект, обозначаем одноэлементное множество, содержащее x.

Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества X. Через B^A обозначаем, следуя [7], множество всех отображений из множества A в множество B. Если A и B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то

$$f^1(C) \overset{\triangle}{=} \{f(x) :\ x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$$

есть образ множества C при действии f. Как обычно при всяком выборе множеств A, B и C, функции $f \in C^{A\times B}$, а также точек $a \in A$ и $b \in B$ имеем $f(a,b) \overset{\triangle}{=} f((a,b)) \in C$. Если $\mathcal{X}$ — непустое семейство, а H — множество, то

$$\mathcal{X}|_H \overset{\triangle}{=} \{X \cap H :\ X \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(H)) \tag{1.1}$$

есть след семейства $\mathcal{X}$ на множество H.

Элементы топологии. Если (X,τ) есть ТП и $A \in \mathcal{P}(X)$, то:

1) $\mathrm{cl}(A,\tau)$ есть def замыкание множества A в ТП (X,τ);

2) $\tau|_A$ (см. (1.1)) есть топология множества A, индуцированная из (X,τ), а ТП $(A,\tau|_A)$ — подпространство исходного ТП (X,τ);

3) в терминах семейства $\mathcal{N}^0_\tau[A] \overset{\triangle}{=} \{G \in \tau \mid A \subset G\}$ определяется семейство

$$\mathcal{N}_\tau[A] \overset{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{P}(X) \mid \exists\, G \in \mathcal{N}^0_\tau[A] :\ G \subset H\}$$

всех окрестностей A в ТП (X,τ).

Если (X,τ) — ТП и $x \in X$, то полагаем, что $\mathcal{N}^0_\tau(x) \overset{\triangle}{=} \mathcal{N}^0_\tau[\{x\}]$ и $\mathcal{N}_\tau(x) \overset{\triangle}{=} \mathcal{N}_\tau[\{x\}]$ (фильтр окрестностей точки в ТП (X,τ)). Если (X,τ) — ТП, то через $(\tau-\mathrm{comp})[X]$ обозначаем семейство всех непустых компактных [9, с. 196, 197] в (X,τ) п/м множества X. Компактом, следуя традиции [9, с. 208], называем компактное хаусдофово ТП.

Если (A,τ_1) и (B,τ_2) — два ТП, то через $C(A,\tau_1,B,\tau_2)$ обозначаем множество всех (τ_1,τ_2)-непрерывных отображений из множества B^A.

По ряду причин в дальнейшем важную роль играют метризуемые ТП. Через $(\mathrm{Dist})[X]$ обозначаем множество всех метрик множества X, $X \neq \varnothing$; если $\rho \in (\mathrm{Dist})[X]$, то $\tau^0_\rho[X]$ есть def топология X, порожденная (индуцированная) метрикой ρ. Напомним, что ТП (X,τ), $X \neq \varnothing$, называется метризуемым, если $\exists\, \rho \in (\mathrm{Dist})[X] :\ \tau = \tau^0_\rho[X]$. Используем далее индексную форму записи функций и, в частности, последовательностей, то есть функций с областью определения в виде натурального ряда $\mathbb{N} \overset{\triangle}{=} \{1;2;\ldots\}$;

$$\mathbf{N} \overset{\triangle}{=} \Big\{(k_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid k_s < k_{s+1}\ \ \forall\, s \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Полагаем как обычно, что $\overline{1,m} \overset{\triangle}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid i \leqslant m\}$ $\forall\, m \in \mathbb{N}$. Напомним, что при всяком выборе непустого множества X и метрики $\rho \in (\mathrm{Dist})[X]$ $(\tau^0_\rho[X]-\mathrm{comp})[X]$ есть семейство всех множеств $K \in \mathcal{P}'(X)$, для каждого из которых

$$\forall\, (x_i)_{i\in\mathcal{N}} \in K^{\mathbb{N}}\ \exists\, \alpha \in \mathbf{N}\ \exists\, x \in K :\ (\rho(x_{\alpha(i)},x))_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$$

(секвенциальная компактность в себе); если $H \in \mathcal{P}'(X)$ и $\varepsilon \in]0,\infty[$, то полагаем, что

$$\mathcal{O}_\varepsilon[H|X;\rho] \overset{\triangle}{=} \{x' \in X \mid \exists\, x \in H :\ \rho(x,x') < \varepsilon\}. \tag{1.2}$$

В дальнейшем $\mathbb{R}$ — вещественная прямая с обычной топологией $\tau_{\mathbb{R}}$, порожденной метрикой-модулем. Если (X,τ) — ТП, то $\mathbb{C}(X,\tau) \overset{\triangle}{=} C(X,\tau,\mathbb{R},\tau_{\mathbb{R}})$ есть множество всех τ-непрерывных вещественнозначных (в/з) функций на X; если $f \in \mathbb{C}(X,\tau)$ и $K \in (\tau-\mathrm{comp})[X]$, то (согласно теореме Вейерштрасса) функция–сужение $(f|K)$ ограничена и достигает максимума и минимума, что используется ниже без дополнительных пояснений.

Множества притяжения. Используем обозначения, связанные с направленностями, принятые в [10, с. 189] (в частности, определяем направленности в виде триплетов), и следуем определению множества притяжения (МП), принятому в [10, с. 189] (см., в частности, [10, (3.1)]): если A — непустое множество, (X,τ) — ТП, $r \in X^A$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$, то $(\mathbf{as})[X;\tau;r;\mathcal{A}]$ есть def множество всех $x \in X$, для каждого из которых существует такая направленность $(D,\preceq,f)$ в множестве A, что

$$(\mathcal{A} \subset (A-\mathrm{ass})\,[D;\preceq;f]) \ \& \ \Big((D,\preceq,r\circ f) \xrightarrow{\tau} x\Big),$$

где $(A{-}\mathrm{ass})[D;\preceq;f]$ есть фильтр множества A, ассоциированный [10, (2.2)] с направленностью $(D,\preceq,f)$, а $\circ$ — символ суперпозиции.

Если X — множество, то через $\beta[X]$ (через $\beta_0[X]$) обозначаем множество всех $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$ (всех $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(X))$), для каждого из которых

$$\forall\, B_1 \in \mathcal{B}\ \forall\, B_2 \in \mathcal{B}\ \exists\, B_3 \in \mathcal{B}: \ B_3 \subset B_1 \cap B_2.$$

Семейства из $\beta_0[X]$ — суть базы фильтров X и только они. Если A — непустое множество, (X,τ) — ТП, $r \in X^A$ и $\mathcal{A} \in \beta[A]$, то [10, с. 190]

$$(\mathbf{as})[X;\tau;r;\mathcal{A}] = \bigcap_{S\in\mathcal{A}} \mathrm{cl}\left(r^1(S),\tau\right). \tag{1.3}$$

В связи с упомянутым ранее более общим представлением отметим обсуждение в [10, с. 189, 208], где, кстати, указан и вариант сведения к случаю, обслуживаемому соотношением (1.3).

§ 2. Абстрактная игровая задача с ограничениями асимптотического характера: подготовительные конструкции

Рассмотрим одну задачу на максимин, в которой функционал платы определяется в терминах значений непрерывной функции на произведении метризуемых компактов, однако при определении значений упомянутого функционала используются конструкции, имеющие смысл суперпозиций с отображениями, определенными на множествах произвольной природы. Предполагаются заданными ограничения асимптотического характера, определяемые посредством непустых направленных семейств.

Итак, фиксируем непустые множества $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$, а также семейства

$$(\mathcal{U} \in \beta[\mathbb{U}])\ \&\ (\mathcal{V} \in \beta[\mathbb{V}]). \tag{2.1}$$

Элементы множеств $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ условимся называть управлениями игроков I и II соответственно (использование термина «управление» связано с некоторыми мотивирующими примерами (см. [11]); по сути дела речь идет о традиционном в теории игр понятии «стратегия»). Кроме того, фиксируем непустые множества U и V, а также метрики $\rho_1 \in (\mathrm{Dist})[U]$ и $\rho_2 \in (\mathrm{Dist})[V]$. Постулируем, что каждое из ТП $\left(U,\tau^0_{\rho_1}[U]\right)$, $\left(V,\tau^0_{\rho_2}[V]\right)$ является компактом:

$$\left(U \in (\tau^0_{\rho_1}[U]-\mathrm{comp})[U]\right)\ \&\ \left(V \in (\tau^0_{\rho_2}[V]-\mathrm{comp})[V]\right). \tag{2.2}$$

Полагаем, наконец, заданными отображения $g \in U^{\mathbb{U}}$, $h \in V^{\mathbb{V}}$ и

$$\mathbf{f} \in \mathbb{C}\left(U\times V, \tau^0_{\rho_1}[U]\otimes\tau^0_{\rho_2}[V]\right), \tag{2.3}$$

где $\tau^0_{\rho_1}[U]\otimes\tau^0_{\rho_2}[V]$ — топология множества $U\times V$, отвечающая произведению ТП $\left(U,\tau^0_{\rho_1}[U]\right)$ и $\left(V,\tau^0_{\rho_2}[V]\right)$. Разумеется,

$$\left(U\times V, \tau^0_{\rho_1}[U]\otimes\tau^0_{\rho_2}[V]\right) \tag{2.4}$$

есть метризуемый компакт; соответствующая (компактная) метрика $\rho_3 \in (\mathrm{Dist})[U \times V]$, порождающая топологию $\tau^0_{\rho_1}[U] \otimes \tau^0_{\rho_2}[V]$ определяется правилом: $\forall u_1 \in U\ \forall v_1 \in V\ \forall u_2 \in U\ \forall v_2 \in V$

$$\rho_3((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = \sup(\{\rho_1(u_1, u_2); \rho_2(v_1, v_2)\}) \tag{2.5}$$

(ограничимся данным способом метризации ТП (2.4)). Разумеется, функция $\mathbf{f}$ равномерно непрерывна и ограничена на метрическом компакте $(U \times V, \rho_3)$.

Проблема асимптотической совместности. Введем в рассмотрение следующие МП:

$$\Big(\mathbb{G}_1 \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{as})\left[U; \tau^0_{\rho_1}[U]; g; \mathcal{U}\right] \in \mathcal{P}(U)\Big)\ \&\ \Big(\mathbb{G}_2 \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{as})\left[V; \tau^0_{\rho_2}[V]; h; \mathcal{V}\right] \in \mathcal{P}(V)\Big). \tag{2.6}$$

Напомним, что эквивалентны условия: $\mathcal{U} \in \beta_0[\mathbb{U}]$ и $\varnothing \notin \mathcal{U}$. Аналогичным образом, $\mathcal{V} \in \beta_0[\mathbb{V}]$ тогда и только тогда, когда $\varnothing \notin \mathcal{V}$.

Предложение 1. *Эквивалентны условия:* 1') $\mathbb{G}_1 \neq \varnothing$ *и* 2') $\mathcal{U} \in \beta_0[\mathbb{U}]$.

Доказательство соответствует подобным обоснованиям в [12, 16], но в целях полноты изложения приведем все же его схему. Поскольку $g^1(\varnothing) = \varnothing$ и $\mathrm{cl}\left(\varnothing, \tau^0_{\rho_1}[U]\right) = \varnothing$, то (см. (1.3)) 1') $\Longrightarrow$ 2').

Пусть истинно 2'). Тогда $S \neq \varnothing\ \ \forall S \in \mathcal{U}$. По свойствам операторов замыкания и взятия образа имеем свойство

$$\mathcal{F} \stackrel{\triangle}{=} \left\{\mathrm{cl}\left(g^1(S), \tau^0_{\rho_1}[U]\right) :\ S \in \mathcal{U}\right\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(U)); \tag{2.7}$$

По свойствам $\mathcal{U}$ имеем из (2.7), что

$$\forall F_1 \in \mathcal{F}\ \forall F_2 \in \mathcal{F}\ \exists F_3 \in \mathcal{F} :\ F_3 \subset F_1 \cap F_2 \tag{2.8}$$

(используем изотонность операций взятия образа и замыкания). Из (2.7), (2.8) следует, что $\mathcal{F} \in \beta_0[U]$. Тогда (см. [12, (3.3.8),(3.3.16)]) при всяком выборе $m \in \mathbb{N}$ и кортежа $(F_i)_{i \in \overline{1,m}} : \overline{1,m} \longrightarrow \mathcal{F}$ существует $F \in \mathcal{F}$, для которого

$$F \subset \bigcap_{i=1}^{m} F_i. \tag{2.9}$$

С учетом (2.7) и (2.9) получаем, что $\mathcal{F}$ — непустое центрированное семейство замкнутых в топологии $\tau^0_{\rho_1}[U]$ п/м U. Коль скоро ТП $\left(U, \tau^0_{\rho_1}[U]\right)$ компактно (см. (2.2)), то

$$\bigcap_{S \in \mathcal{U}} \mathrm{cl}\left(g^1(S), \tau^0_{\rho_1}[U]\right) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \varnothing; \tag{2.10}$$

см. [9], [13, (2.2.21)]. С учетом (2.6) и (2.10) получаем свойство 1'). Итак, 2') $\Longrightarrow$ 1'). $\square$

Предложение 2. *Эквивалентны условия:* 1") $\mathbb{G}_2 \neq \varnothing$ *и* 2") $\mathcal{V} \in \beta_0[\mathbb{V}]$.

Доказательство аналогично. В дальнейшем предполагаем до тех пор, пока не оговорено противное, что

$$(\mathbb{G}_1 \neq \varnothing)\ \&\ (\mathbb{G}_2 \neq \varnothing). \tag{2.11}$$

Из предложений 1, 2 и из (2.11) следует, что (при сделанном предположении) $\mathcal{U} \in \beta_0[\mathbb{U}]$ и $\mathcal{V} \in \beta_0[\mathbb{V}]$. Иными словами, имеем (при условии (2.11), что в дальнейшем специально не оговаривается)

$$(\varnothing \notin \mathcal{U})\ \&\ (\varnothing \notin \mathcal{V}). \tag{2.12}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае (см. (2.11))

$$\begin{gathered}\left(\mathrm{cl}\left(g^1(S), \tau^0_{\rho_1}[U]\right) \in (\tau^0_{\rho_1}[U] - \mathrm{comp})[U]\ \ \forall S \in \mathcal{U}\right)\ \&\\ \&\ \left(\mathrm{cl}\left(h^1(T), \tau^0_{\rho_2}[V]\right) \in \left(\tau^0_{\rho_2}[V] - \mathrm{comp}\right)[V]\ \ \forall T \in \mathcal{V}\right)\end{gathered} \tag{2.13}$$

(замкнутое п/м компакта компактно). Из (2.3) имеем, что $\forall\, y \in V$

$$\mathbf{f}(\cdot, y) \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{f}(x,y))_{x\in U} \in \mathbb{C}\left(U, \tau^0_{\rho_1}[U]\right). \tag{2.14}$$

С учетом (2.13) и (2.14) имеем, что определены значения

$$\min_{x\in \mathrm{cl}\left(g^1(S), \tau^0_{\rho_1}[U]\right)} \mathbf{f}(x,y) \in \mathbb{R} \ \ \forall\, S \in \mathcal{U}\ \forall\, y \in V. \tag{2.15}$$

Если в (2.15) зафиксировать S, то реализуется зависимость с областью определения V; в силу ограниченности $\mathbf{f}$, следующей из (2.3) в силу компактности ТП (2.4), имеем очевидное свойство ограниченности упомянутой зависимости. Более того, данная зависимость непрерывна

$$\mathbb{F}_S \stackrel{\triangle}{=} \left(\min_{x\in \mathrm{cl}\left(g^1(S), \tau^0_{\rho_1}[U]\right)} \mathbf{f}(x,y)\right)_{y\in V} \in \mathbb{C}\left(V, \tau^0_{\rho_2}[V]\right) \ \ \forall\, S \in \mathcal{U}. \tag{2.16}$$

Замечание 1. Свойство (2.16) практически очевидно (и хорошо известно), но мы рассмотрим все же схему доказательства, фиксируя $S \in \mathcal{U}$. Пусть $\varepsilon \in]0,\infty[$. С учетом уже упоминавшейся равномерной непрерывности $\mathbf{f}$ подберем $\delta_\varepsilon \in]0,\infty[$ так, что $\forall\, z_1 \in U\times V\ \forall\, z_2 \in U \times V$

$$(\rho_3(z_1,z_2) < \delta_\varepsilon) \Longrightarrow (|\mathbf{f}(z_1) - \mathbf{f}(z_2)| < \varepsilon).$$

По определению ρ_3 (2.5) имеем тогда $\forall\, x_1 \in U\ \forall\, y_1 \in V\ \forall\, x_2 \in U\ \forall\, y_2 \in V$

$$((\rho_1(x_1,x_2) < \delta_\varepsilon)\ \&\ (\rho_2(y_1,y_2) < \delta_\varepsilon)) \Longrightarrow (|\mathbf{f}(x_1,y_1) - \mathbf{f}(x_2,y_2)| < \varepsilon). \tag{2.17}$$

Пусть $y' \in V$ и $y'' \in V$ таковы, что $\rho_2(y',y'') < \delta_\varepsilon$. С учетом (2.16) подберем $x' \in \mathrm{cl}\left(g^1(S), \tau^0_{\rho_1}[U]\right)$ и $x'' \in \mathrm{cl}\left(g^1(S), \tau^0_{\rho_1}[U]\right)$ так, что

$$\left(\mathbb{F}_S(y') = \mathbf{f}(x',y')\right)\ \&\ \left(\mathbb{F}_S(y'') = \mathbf{f}(x'',y'')\right). \tag{2.18}$$

Согласно (2.16) $\mathbb{F}_S(y') \leqslant \mathbf{f}(x'',y')$ и $\mathbb{F}_S(y'') \leqslant \mathbf{f}(x',y'')$. Тогда (см. (2.18))

$$\mathbb{F}_S(y') - \mathbb{F}_S(y'') \leqslant \mathbf{f}(x'',y') - \mathbf{f}(x'',y'') \leqslant |\mathbf{f}(x'',y') - \mathbf{f}(x'',y'')|, \tag{2.19}$$

$$\mathbb{F}_S(y'') - \mathbb{F}_S(y') \leqslant \mathbf{f}(x',y'') - \mathbf{f}(x',y') \leqslant |\mathbf{f}(x',y') - \mathbf{f}(x',y'')|, \tag{2.20}$$

где согласно (2.17) справедливы неравенства

$$\left(\big|\mathbf{f}(x'',y') - \mathbf{f}(x'',y'')\big| < \varepsilon\right)\ \&\ \left(\big|\mathbf{f}(x',y') - \mathbf{f}(x',y'')\big| < \varepsilon\right)$$

(напомним, что $\rho_2(y',y'') < \delta_\varepsilon$). С учетом (2.19) и (2.20) имеем очевидное неравенство

$$|\,\mathbb{F}_S(y') - \mathbb{F}_S(y'')| < \varepsilon.$$

Поскольку выбор y', y'' был произвольным, установлена равномерная непрерывность $\mathbb{F}_S$, откуда следует (2.16). $\square$

Из (2.13) и (2.16) имеем, в частности, что $\forall\, S \in \mathcal{U}\ \forall\, T \in \mathcal{V}$

$$\max_{y\in \mathrm{cl}\left(h^1(T), \tau^0_{\rho_2}[V]\right)} \mathbb{F}_S(y) = \max_{y\in \mathrm{cl}\left(h^1(T), \tau^0_{\rho_2}[V]\right)}\ \min_{x\in \mathrm{cl}\left(g^1(S), \tau^0_{\rho_1}[U]\right)} \mathbf{f}(x,y) \in \mathbb{R}. \tag{2.21}$$

Отметим еще одно очевидное и хорошо известное свойство, учитывая, что при $S \in \mathcal{U}$ непременно $S \in \mathcal{P}'(\mathbb{U})$ и, как следствие, $g^1(S) \in \mathcal{P}'(U)$, откуда имеем, что при всяком $y \in V$ $\left\{\mathbf{f}(x,y):\ x \in g^1(S)\right\}$ есть непустое ограниченное п/м $\mathbb{R}$, обладающее (конечной) точной нижней гранью. С учетом (2.14) имеем $\forall\, S \in \mathcal{U}\ \forall\, y \in V$

$$\inf_{u\in S} \mathbf{f}(g(u),y) = \inf_{x\in g^1(S)} \mathbf{f}(x,y) = \min_{x\in \mathrm{cl}\left(g^1(S), \tau^0_{\rho_1}[U]\right)} \mathbf{f}(x,y) = \mathbb{F}_S(y). \tag{2.22}$$

Замечание 2. Равенство (2.22) — простое следствие непрерывности $\mathbf{f}$. В самом деле, пусть $S \in \mathcal{U}$ и $y \in V$. Поскольку $g^1(S) \subset \mathrm{cl}\left(g^1(S), \tau^0_{\rho_1}[U]\right)$, справедливо неравенство

$$\min_{x \in \mathrm{cl}\left(g^1(S), \tau^0_{\rho_1}[U]\right)} \mathbf{f}(x, y) \leqslant \inf_{x \in g^1(S)} \mathbf{f}(x, y). \tag{2.23}$$

Для доказательства требуемого равенства выберем

$$x_0 \in \mathrm{cl}\left(g^1(S), \tau^0_{\rho_1}[U]\right), \tag{2.24}$$

для которого имеет место свойство

$$\mathbf{f}(x_0, y) = \min_{x \in \mathrm{cl}\left(g^1(S), \tau^0_{\rho_1}[U]\right)} \mathbf{f}(x, y). \tag{2.25}$$

Из (2.24) по определению топологии $\tau^0_{\rho_1}[U]$ имеем, что

$$\forall\, \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists\, x \in g^1(S):\ \rho_1(x, x_0) < \varepsilon. \tag{2.26}$$

Пусть $\kappa \in]0, \infty[$. С учетом равномерной непрерывности $\mathbf{f}$ подберем $\delta_1 \in]0, \infty[$ такое, что $\forall\, z_1 \in U \times V\ \forall\, z_2 \in U \times V$

$$(\rho_3(z_1, z_2) < \delta_1) \Longrightarrow (|\mathbf{f}(z_1) - \mathbf{f}(z_2)| < \kappa).$$

По определению ρ_3 имеем, следовательно, что $\forall\, x_1 \in U\ \forall\, y_1 \in V\ \forall\, x_2 \in U\ \forall\, y_2 \in V$

$$((\rho_1(x_1, x_2) < \delta_1)\ \&\ (\rho_2(y_1, y_2) < \delta_1)) \Longrightarrow (|\mathbf{f}(x_1, y_1) - \mathbf{f}(x_2, y_2)| < \kappa). \tag{2.27}$$

Подберем с учетом (2.26) элемент $x^0 \in g^1(S)$ такой, что

$$\rho_1(x_0, x^0) < \delta_1. \tag{2.28}$$

Из (2.27), (2.28) следует, в частности, неравенство

$$\left|\mathbf{f}(x_0, y) - \mathbf{f}(x^0, y)\right| < \kappa. \tag{2.29}$$

Тогда согласно (2.29) имеем очевидную цепочку неравенств

$$\inf_{x \in g^1(S)} \mathbf{f}(x, y) \leqslant \mathbf{f}(x^0, y) < \mathbf{f}(x_0, y) + \kappa,$$

откуда согласно (2.25) вытекает неравенство

$$\inf_{x \in g^1(S)} \mathbf{f}(x, y) < \min_{x \in \mathrm{cl}\left(g^1(S), \tau^0_{\rho_1}[U]\right)} \mathbf{f}(x, y) + \kappa. \tag{2.30}$$

Поскольку выбор κ, $\kappa > 0$, был произвольным, установлено неравенство

$$\inf_{x \in g^1(S)} \mathbf{f}(x, y) \leqslant \min_{x \in \mathrm{cl}\left(g^1(S), \tau^0_{\rho_1}[U]\right)} \mathbf{f}(x, y).$$

С учетом (2.23) получаем требуемую цепочку равенств

$$\inf_{u \in S} \mathbf{f}(g(u), y) = \inf_{x \in g^1(S)} \mathbf{f}(x, y) = \min_{x \in \mathrm{cl}\left(g^1(S), \tau^0_{\rho_1}[U]\right)} \mathbf{f}(x, y). \qquad \square$$

Из (2.16) и (2.22) получаем с очевидностью, что

$$\mathbb{F}_S = \left(\inf_{u\in S} \mathbf{f}(g(u), y)\right)_{y\in V} \in \mathbb{C}\left(V, \tau^0_{\rho_2}[V]\right) \quad \forall\, S \in \mathcal{U}. \tag{2.31}$$

Согласно (2.1) и (2.12) имеем при $S \in \mathcal{U}$ и $T \in \mathcal{V}$, что

$$\left\{\mathbb{F}_S(y):\ y \in h^1(T)\right\} = \left\{\inf_{u\in S} \mathbf{f}(g(u), y):\ y \in h^1(T)\right\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}); \tag{2.32}$$

более того, из (2.31) и компактности ТП $\left(V, \tau^0_{\rho_2}[V]\right)$ следует свойство ограниченности множества (2.32), так как функция $\mathbb{F}_S$ непрерывна, выполнено (2.2) и $h^1(T) \subset V$, а тогда определено значение

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}(S,T) \overset{\triangle}{=} \sup_{v\in T}\ \inf_{u\in S} \mathbf{f}(g(u), h(v)) = \sup_{y\in h^1(T)}\ \inf_{u\in S} \mathbf{f}(g(u), y) = \\ = \sup_{y\in h^1(T)} \mathbb{F}_S(y) = \sup\left(\left\{\mathbb{F}_S(y):\ y \in h^1(T)\right\}\right) \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2.33}$$

Итак, $\mathfrak{V}(S,T) \in \mathbb{R} \quad \forall\, S \in \mathcal{U}\ \forall\, T \in \mathcal{V}$. Значения (2.33) рассматриваем как реализуемые экстремумы, а точнее, как реализуемые «максимины». С учетом (2.13), (2.16) и (2.33) отметим, что

$$\mathfrak{V}(S,T) = \max_{y\in \mathrm{cl}\left(h^1(T), \tau^0_{\rho_2}[V]\right)} \mathbb{F}_S(y) \quad \forall\, S \in \mathcal{U}\ \forall\, T \in \mathcal{V}. \tag{2.34}$$

Замечание 3. Доказательство (2.34) подобно рассуждению, приведенному в замечании 2. Фиксируем $S \in \mathcal{U}$ и $T \in \mathcal{V}$; поскольку $h^1(T) \subset \mathrm{cl}\left(h^1(T), \tau^0_{\rho_2}[V]\right)$, имеем для значения

$$W \overset{\triangle}{=} \max_{y\in \mathrm{cl}\left(h^1(T), \tau^0_{\rho_2}[V]\right)} \mathbb{F}_S(y) \in \mathbb{R} \tag{2.35}$$

следующее очевидное неравенство (см. (2.33)):

$$\mathfrak{V}(S,T) \leqslant W. \tag{2.36}$$

С учетом (2.21), (2.35) подберем $y_0 \in \mathrm{cl}\left(h^1(T), \tau^0_{\rho_2}[V]\right)$ так, что при этом

$$\mathbb{F}_S(y_0) = W. \tag{2.37}$$

Пусть $\kappa \in]0, \infty[$. С учетом непрерывности $\mathbb{F}_S$ в точке y_0 подберем число $\delta_0 \in]0, \infty[$ такое, что $\forall\, y \in V$

$$(\rho_2(y, y_0) < \delta_0) \Longrightarrow (|\,\mathbb{F}_S(y) - \mathbb{F}_S(y_0)| < \kappa). \tag{2.38}$$

По выбору y_0 имеем для некоторого $y^0 \in h^1(T)$ неравенство

$$\rho_2(y^0, y_0) < \delta_0. \tag{2.39}$$

Поскольку $y^0 \in V$, из (2.38), (2.39) имеем неравенство $|\,\mathbb{F}_S(y^0) - \mathbb{F}_S(y_0)| < \kappa$, откуда согласно (2.37) $|\,\mathbb{F}_S(y^0) - W| < \kappa$. В частности,

$$W < \mathbb{F}_S(y^0) + \kappa. \tag{2.40}$$

Тогда согласно (2.33), (2.40) имеем цепочку неравенств

$$W - \kappa < \mathbb{F}_S(y^0) \leqslant \sup_{y\in h^1(T)} \mathbb{F}_S(y) = \mathfrak{V}(S,T).$$

Поскольку выбор κ был произвольным, установлено неравенство $W \leqslant \mathfrak{V}(S,T)$. Теперь следует учесть (2.36). $\square$

§ 3. Абстрактная игровая задача с ограничениями асимптотического характера: асимптотика максимина

Напомним, что предполагаются выполненными условия (2.11); как следствие справедливо (2.12) и определены значения (2.33). Напомним также, что согласно (2.6) и (2.12) $\mathbb{G}_1$ и $\mathbb{G}_2$ — суть непустые замкнутые множества в компактах $\big(U, \tau^0_{\rho_1}[U]\big)$ и $\big(V, \tau^0_{\rho_2}[V]\big)$. Как следствие,

$$\big(\mathbb{G}_1 \in (\tau^0_{\rho_1}[U] - \mathrm{comp})[U]\big) \ \& \ \big(\mathbb{G}_2 \in (\tau^0_{\rho_2}[V] - \mathrm{comp})[V]\big). \tag{3.1}$$

С учетом (2.14) и (3.1) определяем значения

$$\min_{x \in \mathbb{G}_1} \mathbf{f}(x, y) \in \mathbb{R} \ \ \forall\, y \in V. \tag{3.2}$$

Используя (3.2), введем в рассмотрение функцию

$$\mathbf{F} \stackrel{\triangle}{=} \left(\min_{x \in \mathbb{G}_1} \mathbf{f}(x, y)\right)_{y \in V} \in \mathbb{R}^V. \tag{3.3}$$

С учетом равномерной непрерывности функции $\mathbf{f}$ имеем, что

$$\mathbf{F} \in \mathbb{C}\left(V, \tau^0_{\rho_2}[V]\right). \tag{3.4}$$

Замечание 4. Свойство (3.4) очевидно. Естественно установить сразу равномерную непрерывность $\mathbf{F}$. Пусть $\kappa \in]0, \infty[$. Используя равномерную непрерывность $\mathbf{f}$ на $(U \times V, \rho_3)$, подберем $\delta_\kappa \in]0, \infty[$ такое, что $\forall\, z_1 \in U \times V \ \forall\, z_2 \in U \times V$

$$(\rho_3(z_1, z_2) < \delta_\kappa) \Longrightarrow (|\mathbf{f}(z_1) - \mathbf{f}(z_2)| < \kappa). \tag{3.5}$$

С учетом (2.5) и (3.5) получаем, что $\forall\, x_1 \in U \ \forall\, y_1 \in V \ \forall\, x_2 \in U \ \forall\, y_2 \in V$

$$((\rho_1(x_1, x_2) < \delta_\kappa) \ \& \ (\rho_2(y_1, y_2) < \delta_\kappa)) \Longrightarrow (|\mathbf{f}(x_1, y_1) - \mathbf{f}(x_2, y_2)| < \kappa). \tag{3.6}$$

Выберем произвольно $y' \in V$ и $y'' \in V$, для которых $\rho_2(y', y'') < \delta_\kappa$. Тогда согласно (3.6)

$$|\mathbf{f}(x, y') - \mathbf{f}(x, y'')| < \kappa \ \ \forall\, x \in U. \tag{3.7}$$

С учетом (3.3) выберем $x' \in \mathbb{G}_1$ и $x'' \in \mathbb{G}_1$ так, что при этом

$$\big(\mathbf{F}(y') = \mathbf{f}(x', y')\big) \ \& \ \big(\mathbf{F}(y'') = \mathbf{f}(x'', y'')\big). \tag{3.8}$$

Тогда $\mathbf{F}(y') \leqslant \mathbf{f}(x'', y')$ и $\mathbf{F}(y'') \leqslant \mathbf{f}(x', y'')$; см. (3.3). Тогда согласно (3.8)

$$\mathbf{F}(y') - \mathbf{F}(y'') \leqslant \mathbf{f}(x'', y') - \mathbf{f}(x'', y''), \tag{3.9}$$

$$\mathbf{F}(y'') - \mathbf{F}(y') \leqslant \mathbf{f}(x', y'') - \mathbf{f}(x', y'). \tag{3.10}$$

Из (3.7), (3.9) и (3.10) следует неравенство $|\,\mathbf{F}(y') - \mathbf{F}(y'')| < \kappa$. Итак, установлена следующая импликация

$$(\rho_2(y', y'') < \delta_\kappa) \Longrightarrow \big(\big|\,\mathbf{F}(y') - \mathbf{F}(y'')\big| < \kappa\big). \tag{3.11}$$

Поскольку выбор y' и y'' был произвольным, установлено, что $\forall\, y_1 \in V \ \forall\, y_2 \in V$

$$(\rho_2(y_1, y_2) < \delta_\kappa) \Longrightarrow (|\,\mathbf{F}(y_1) - \mathbf{F}(y_2)| < \kappa). \tag{3.12}$$

Поскольку выбор κ, $\kappa > 0$, был произвольным, свойство равномерной непрерывности $\mathbf{F}$ (3.3) установлено, откуда следует (3.4). $\square$

С учетом (3.1) и (3.4) определено значение (обобщенный экстремум)

$$\mathbf{V} \stackrel{\triangle}{=} \max_{y\in\mathbb{G}_2} \mathbf{F}(y) = \max_{y\in\mathbb{G}_2} \min_{x\in\mathbb{G}_1} \mathbf{f}(x,y) \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

Предложение 3. *Если* $\varepsilon \in]0,\infty[,$ *то непременно*

$$\exists\, S \in \mathcal{U}:\ \mathrm{cl}\left(g^1(S), \tau^0_{\rho_1}[U]\right) \subset \mathcal{O}_\varepsilon[\mathbb{G}_1|U;\rho_1].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (1.3), (2.1) и (2.6) имеем равенство

$$\mathbb{G}_1 = \bigcap_{S\in\mathcal{U}} \mathrm{cl}\left(g^1(S), \tau^0_{\rho_1}[U]\right), \tag{3.14}$$

причем справедливо (2.2), означающее, что $\left(U, \tau^0_{\rho_1}[U]\right)$ — непустой компакт. При этом

$$\mathcal{F} \stackrel{\triangle}{=} \left\{\mathrm{cl}\left(g^1(S), \tau^0_{\rho_1}[U]\right):\ S \in \mathcal{U}\right\} \tag{3.15}$$

есть непустое семейство замкнутых в ТП $(U, \tau^0_{\rho_1}[U])$ множеств; из (2.1) по свойству изотонности операций замыкания и взятия образа следует, что $\forall\, F_1 \in \mathcal{F}\ \forall\, F_2 \in \mathcal{F}\ \exists\, F_3 \in \mathcal{F}:\ F_3 \subset F_1 \cap F_2$. Тогда $\mathcal{F} \in \beta[U],$ а тогда (см. [9, с. 197]) $\forall\, G \in \tau^0_{\rho_1}[U]$

$$\left(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \subset G\right) \Longrightarrow (\exists\ \tilde{\mathbb{F}} \in \mathcal{F}:\ \tilde{\mathbb{F}} \subset G).$$

Из (3.14) и (3.15) имеем следующее равенство: $\mathbb{G}_1 = \bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} F,$ а тогда $\forall\, G \in \tau^0_{\rho_1}[U]$

$$(\mathbb{G}_1 \subset G) \Longrightarrow (\exists\, F \in \mathcal{F}:\ F \subset G). \tag{3.16}$$

Фиксируем $\kappa \in]0,\infty[.$ Тогда множество

$$\mathcal{O}_\kappa[\mathbb{G}_1|U;\rho_1] = \{x' \in U \mid \exists\, x \in \mathbb{G}_1:\ \rho_1(x,x') < \kappa\} \in \mathcal{P}(U)$$

есть объединение всевозможных открытых шаров радиуса κ с центрами из $\mathbb{G}_1$,

$$\mathcal{O}_\kappa[\mathbb{G}_1|U;\rho_1] \in \tau^0_{\rho_1}[U]$$

и при этом $\mathbb{G}_1 \subset \mathcal{O}_\kappa[\mathbb{G}_1|U;\rho_1]$. Тогда согласно (3.16) для некоторого $\tilde{F}_\kappa \in \mathcal{F}$ имеет место вложение

$$\tilde{F}_\kappa \subset \mathcal{O}_\kappa[\mathbb{G}_1|U;\rho_1].$$

С учетом (3.15) имеем, что $\exists\, S \in \mathcal{U}:\ \mathrm{cl}\left(g^1(S), \tau^0_{\rho_1}[U]\right) \subset \mathcal{O}_\kappa[\mathbb{G}_1|U;\rho_1]$. Поскольку выбор κ был произвольным, предложение доказано. □

Предложение 4. *Если* $\delta \in]0,\infty[,$ *то непременно*

$$\exists\, T \in \mathcal{V}:\ \mathrm{cl}\left(h^1(T), \tau^0_{\rho_2}[V]\right) \subset \mathcal{O}_\delta[\mathbb{G}_2|V;\rho_2].$$

Доказательство аналогично обоснованию предложения 3. Напомним, что согласно (1.3), (2.1) и (2.6)

$$\left(\mathbb{G}_1 = \bigcap_{S\in\mathcal{U}} \mathrm{cl}\left(g^1(S), \tau^0_{\rho_1}[U]\right)\right)\ \&\ \left(\mathbb{G}_2 = \bigcap_{T\in\mathcal{V}} \mathrm{cl}\left(h^1(T), \tau^0_{\rho_2}[V]\right)\right). \tag{3.17}$$

Теорема 1. *Имеет место следующее аппроксимативное представление* $\mathbf{V}$:

$$\forall\, \zeta \in]0,\infty[\ \exists\, S_\zeta \in \mathcal{U}\ \exists\, T_\zeta \in \mathcal{V}:$$
$$|\mathfrak{V}(S,T) - \mathbf{V}| < \zeta\ \ \forall\, S \in \mathcal{U} \cap \mathcal{P}(S_\zeta)\ \forall\, T \in \mathcal{V} \cap \mathcal{P}(T_\zeta).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\zeta \in]0,\infty[$. С учетом равномерной непрерывности $\mathbf{f}$ на $(U\times V,\rho_3)$ имеем при некотором $\theta\in]0,\infty[$, что $\forall\, z_1\in U\times V\ \forall\, z_2\in U\times V$

$$(\rho_3(z_1,z_2)<\theta)\Longrightarrow(|\mathbf{f}(z_1)-\mathbf{f}(z_2)|<\zeta).$$

С учетом (2.5) получаем, как следствие, что $\forall\, x_1\in U\ \forall\, y_1\in V\ \forall\, x_2\in U\ \forall\, y_2\in V$

$$((\rho_1(x_1,x_2)<\theta)\ \&\ (\rho_2(y_1,y_2)<\theta))\Longrightarrow(|\mathbf{f}(x_1,y_1)-\mathbf{f}(x_2,y_2)|<\zeta)\,. \tag{3.18}$$

С учетом предложения 3 подберем множество $S_*\in\mathcal{U}$ такое, что

$$\mathrm{cl}\left(g^1(S_*),\tau^0_{\rho_1}[U]\right)\subset\mathcal{O}_\theta[\mathbb{G}_1|U;\rho_1]. \tag{3.19}$$

Используя предложение 4, подберем также множество $T_*\in\mathcal{V}$ такое, что

$$\mathrm{cl}\left(h^1(T_*),\tau^0_{\rho_2}[V]\right)\subset\mathcal{O}_\theta[\mathbb{G}_2|V;\rho_2]. \tag{3.20}$$

Пусть теперь выбраны произвольно множества

$$(S^*\in\mathcal{U}\cap\mathcal{P}(S_*))\ \&\ (T^*\in\mathcal{V}\cap\mathcal{P}(T_*)). \tag{3.21}$$

Тогда $S^*\in\mathcal{U}$, $T^*\in\mathcal{V}$ и при этом (см. (3.21))

$$(S^*\subset S_*)\ \&\ (T^*\subset T_*). \tag{3.22}$$

Из (3.22) следуют, конечно, очевидные вложения

$$\mathrm{cl}\left(g^1(S^*),\tau^0_{\rho_1}[U]\right)\subset\mathrm{cl}\left(g^1(S_*),\tau^0_{\rho_1}[U]\right), \tag{3.23}$$

$$\mathrm{cl}\left(h^1(T^*),\tau^0_{\rho_2}[V]\right)\subset\mathrm{cl}\left(h^1(T_*),\tau^0_{\rho_2}[V]\right); \tag{3.24}$$

в (3.23) и (3.24) учитываем свойства изотонности операторов взятия образа и замыкания. Тогда из (3.17), (3.19) и (3.23) имеем цепочку вложений

$$\mathbb{G}_1\subset\mathrm{cl}\left(g^1(S^*),\tau^0_{\rho_1}[U]\right)\subset\mathcal{O}_\theta[\mathbb{G}_1|U;\rho_1]. \tag{3.25}$$

Аналогичным образом из (3.17), (3.20) и (3.24) вытекает, что

$$\mathbb{G}_2\subset\mathrm{cl}\left(h^1(T^*),\tau^0_{\rho_2}[V]\right)\subset\mathcal{O}_\theta[\mathbb{G}_2|V;\rho_2]. \tag{3.26}$$

Напомним, что (см. (3.1), (2.13)) справедливы свойства компактности:

$$\begin{gathered}(\mathrm{cl}\left(g^1(S^*),\tau^0_{\rho_1}[U]\right)\in\left(\tau^0_{\rho_1}[U]-\mathrm{comp}\right)[U])\ \&\\ \&\ (\mathrm{cl}\left(h^1(T^*),\tau^0_{\rho_2}[V]\right)\in\left(\tau^0_{\rho_2}[V]-\mathrm{comp}\right)[V])\ \&\\ \&\ \left(\mathbb{G}_1\in\left(\tau^0_{\rho_1}[U]-\mathrm{comp}\right)[U]\right)\ \&\ \left(\mathbb{G}_2\in\left(\tau^0_{\rho_2}[V]-\mathrm{comp}\right)[V]\right).\end{gathered} \tag{3.27}$$

Согласно (2.16) получаем по выбору множества S^*, что

$$\mathbb{F}_{S^*}(y)=\min_{x\in\mathrm{cl}\left(g^1(S^*),\tau^0_{\rho_1}[U]\right)}\mathbf{f}(x,y)\ \ \forall\, y\in V; \tag{3.28}$$

при этом согласно (2.16) имеем свойство непрерывности

$$\mathbb{F}_{S^*}\in\mathbb{C}\left(V,\tau^0_{\rho_2}[V]\right). \tag{3.29}$$

С учетом (2.34), (3.27) и (3.29) получаем равенство

$$\mathfrak{V}(S^*,T^*)=\max_{y\in\mathrm{cl}\left(h^1(T^*),\tau^0_{\rho_2}[V]\right)}\mathbb{F}_{S^*}(y). \tag{3.30}$$

Тогда из (3.28), (3.30) вытекает, что

$$\mathfrak{V}(S^*, T^*) = \max_{y \in \mathrm{cl}\left(h^1(T^*), \tau^0_{\rho_2}[V]\right)} \min_{x \in \mathrm{cl}\left(g^1(S^*), \tau^0_{\rho_1}[U]\right)} \mathbf{f}(x, y) \in \mathbb{R} \tag{3.31}$$

(напомним, что $\mathfrak{V}(S^*, T^*)$ определено в (2.33)). Из (3.25), (3.28) имеем систему неравенств

$$\mathbb{F}_{S^*}(y) \leqslant \min_{x \in \mathbb{G}_1} \mathbf{f}(x, y) \ \ \forall\, y \in V.$$

Поэтому с учетом (3.3) получаем неравенства

$$\mathbb{F}_{S^*}(y) \leqslant \mathbf{F}(y) \ \ \forall\, y \in V. \tag{3.32}$$

Из (3.32) получаем, в частности, очевидное следствие

$$\mathbb{F}_{S^*}(y) \leqslant \mathbf{F}(y) \ \ \forall\, y \in \mathbb{G}_2. \tag{3.33}$$

Комбинируя (2.11), (3.13) и (3.33), приходим к системе неравенств

$$\mathbb{F}_{S^*}(y) \leqslant \mathbf{V} \ \ \forall\, y \in \mathbb{G}_2. \tag{3.34}$$

Пусть (см. (3.30)) $y^* \in \mathrm{cl}(h^1(T^*), \tau^0_{\rho_2}[V])$ обладает свойством

$$\mathfrak{V}(S^*, T^*) = \mathbb{F}_{S^*}(y^*). \tag{3.35}$$

Тогда согласно (3.26) $y^* \in \mathcal{O}_\theta[\mathbb{G}_2|V; \rho_2]$. Поэтому $y^* \in V$ и при этом для некоторого

$$y_* \in \mathbb{G}_2 \tag{3.36}$$

справедливо следующее неравенство

$$\rho_2(y_*, y^*) < \theta. \tag{3.37}$$

Тогда согласно (3.18) и (3.37) получаем с очевидностью систему неравенств

$$|\mathbf{f}(x, y_*) - \mathbf{f}(x, y^*)| < \zeta \ \ \forall\, x \in U. \tag{3.38}$$

С другой стороны, из (3.34) и (3.36) вытекает неравенство

$$\mathbb{F}_{S^*}(y_*) \leqslant \mathbf{V}, \tag{3.39}$$

причем согласно (2.16) справедливы следующие два равенства

$$\mathbb{F}_{S^*}(y_*) = \min_{x \in \mathrm{cl}\left(g^1(S^*), \tau^0_{\rho_1}[U]\right)} \mathbf{f}(x, y_*), \tag{3.40}$$

$$\mathbb{F}_{S^*}(y^*) = \min_{x \in \mathrm{cl}\left(g^1(S^*), \tau^0_{\rho_1}[U]\right)} \mathbf{f}(x, y^*). \tag{3.41}$$

Пусть теперь $x_* \in \mathrm{cl}\left(g^1(S^*), \tau^0_{\rho_1}[U]\right)$ обладает свойством:

$$\mathbb{F}_{S^*}(y_*) = \mathbf{f}(x_*, y_*). \tag{3.42}$$

Отметим, что согласно (3.38) справедливо неравенство

$$|\mathbf{f}(x_*, y_*) - \mathbf{f}(x_*, y^*)| < \zeta. \tag{3.43}$$

С другой стороны, из (3.39) и (3.42) следует с очевидностью, что

$$\mathbf{f}(x_*, y_*) \leqslant \mathbf{V}. \tag{3.44}$$

С учетом (3.43) и (3.44) получаем неравенство

$$\mathbf{f}(x_*, y^*) < \mathbf{V} + \zeta. \tag{3.45}$$

При этом согласно (2.16) имеем по выбору x_*, что $\mathbb{F}_{S^*}(y^*) \leqslant \mathbf{f}(x_*, y^*)$, а тогда из (3.45) вытекает следующее неравенство:

$$\mathbb{F}_{S^*}(y^*) < \mathbf{V} + \zeta. \tag{3.46}$$

Поэтому с учетом (3.35) и (3.46) имеем оценку

$$\mathfrak{V}(S^*, T^*) < \mathbf{V} + \zeta. \tag{3.47}$$

Выберем $y_0 \in \mathbb{G}_2$ так, что

$$\mathbf{V} = \mathbf{F}(y_0). \tag{3.48}$$

Тогда (см. (3.3), (3.48)) получаем равенство

$$\mathbf{V} = \min_{x \in \mathbb{G}_1} \mathbf{f}(x, y_0). \tag{3.49}$$

С другой стороны, имеем следующее равенство (см. (2.16)):

$$\mathbb{F}_{S^*}(y_0) = \min_{x \in \mathrm{cl}\left(g^1(S^*), \tau^0_{\rho_1}[U]\right)} \mathbf{f}(x, y_0). \tag{3.50}$$

С учетом (3.50) выбираем (экстремальный) элемент

$$x_0 \in \mathrm{cl}\left(g^1(S^*), \tau^0_{\rho_1}[U]\right), \tag{3.51}$$

для которого справедливо следующее равенство:

$$\mathbb{F}_{S^*}(y_0) = \mathbf{f}(x_0, y_0). \tag{3.52}$$

Тогда согласно (3.25) и (3.51) справедливо включение

$$x_0 \in \mathcal{O}_\theta[\mathbb{G}_1 | U; \rho_1]. \tag{3.53}$$

Из (1.2) и (3.53) следует, что $x_0 \in U$ и при этом для некоторого

$$x^0 \in \mathbb{G}_1 \tag{3.54}$$

справедливо следующее неравенство

$$\rho_1(x^0, x_0) = \rho(x_0, x^0) < \theta. \tag{3.55}$$

Согласно (3.18) и (3.55) имеем, как следствие, что

$$|\mathbf{f}(x_0, y) - \mathbf{f}(x^0, y)| < \zeta \ \ \forall\, y \in V. \tag{3.56}$$

В частности, имеем из (3.56) очевидное неравенство

$$|\mathbf{f}(x_0, y_0) - \mathbf{f}(x^0, y_0)| < \zeta. \tag{3.57}$$

Поскольку согласно (3.49) и (3.54) $\mathbf{V} \leqslant \mathbf{f}(x^0, y_0)$, получаем с учетом (3.57) следующую оценку:

$$\mathbf{V} < \mathbf{f}(x_0, y_0) + \zeta. \tag{3.58}$$

Как следствие, имеем из (3.52) и (3.58) очевидное неравенство

$$\mathbf{V} < \mathbb{F}_{S^*}(y_0) + \zeta. \tag{3.59}$$

Из (3.26) следует, что $y_0 \in \mathrm{cl}\left(h^1(T^*), \tau^0_{\rho_2}[V]\right)$, а потому согласно (2.34)

$$\mathbb{F}_{S^*}(y_0) \leqslant \mathfrak{V}(S^*, T^*). \tag{3.60}$$

Из (3.59) и (3.60) получаем неравенство $\mathbf{V} < \mathfrak{V}(S^*, T^*) + \zeta$, откуда с учетом (3.47) следует окончательно, что

$$|\mathfrak{V}(S^*, T^*) - \mathbf{V}| < \zeta. \tag{3.61}$$

Поскольку выбор S^* и T^* был произвольным, установлено (см. (3.21)) свойство:

$$|\mathfrak{V}(S, T) - \mathbf{V}| < \zeta \ \ \forall\, S \in \mathcal{U} \cap \mathcal{P}(S_*) \,\forall\, T \in \mathcal{V} \cap \mathcal{P}(T_*). \tag{3.62}$$

Итак, множества $S_* \in \mathcal{U}$ и $T_* \in \mathcal{V}$ реализуют (3.62). Следовательно, $\exists\, S_\zeta \in \mathcal{U}\ \exists\, T_\zeta \in \mathcal{V}$:

$$|\mathfrak{V}(S, T) - \mathbf{V}| < \zeta \ \ \forall\, S \in \mathcal{U} \cap \mathcal{P}(S_\zeta) \,\forall\, T \in \mathcal{V} \cap \mathcal{P}(T_\zeta).$$

Поскольку выбор ζ, $\zeta > 0$ был произвольным, теорема доказана. $\square$

Из теоремы 1 легко извлекается следствие, характеризующее $\mathbf{V}$ как обобщенный предел в/з направленности. В самом деле, на декартовом произведении $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ семейств $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ (в случае, рассматриваемом в теореме 1, каждое из этих семейств — база фильтра) определяем бинарное отношение $\sqsubseteq$ по правилу: полагаем, что $\forall\, A_1 \in \mathcal{U}\ \forall\, B_1 \in\ \mathcal{V}\ \forall\, A_2 \in \mathcal{U}\ \forall\, B_2 \in \mathcal{V}$

$$((A_1, B_1) \sqsubseteq (A_2, B_2)) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} ((A_2 \subset A_1)\ \&\ (B_2 \subset B_1)). \tag{3.63}$$

С учетом (2.1) и (3.63) получаем, что $\sqsubseteq$ — направление на $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$, а

$$(\mathcal{U} \times \mathcal{V}, \sqsubseteq)$$

есть непустое направленное множество. Введем, наконец, функционал $\mathbf{v} : \ \mathcal{U} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ посредством правила:

$$\mathbf{v}(S, T) \overset{\triangle}{=} \mathfrak{V}(S, T) \ \ \forall\, S \in \mathcal{U}\, \forall\, T \in \mathcal{V}.$$

Тогда $(\mathcal{U} \times \mathcal{V}, \sqsubseteq, \mathbf{v})$ есть направленность в $\mathbb{R}$, причем согласно теореме 1 имеет место сходимость по Мору–Смиту:

$$(\mathcal{U} \times \mathcal{V}, \sqsubseteq, \mathbf{v}) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}} \mathbf{V}. \tag{3.64}$$

Теорема 1 и (3.64) характеризуют $\mathbf{V}$ как обобщенный предел реализуемых максиминов, определяя тем самым асимптотику последних исчерпывающим образом.

§ 4. Конструкции расширений

Теорема 1 позволяет использовать для целей исследования асимптотики реализуемого максимина средства, которые применялись при изучении МП в [10, 12, 16]. Речь идет о построении ОЗ с использованием компактификаций пространств обычных решений. Будем существенно использовать предложение 5.2.1 монографии [12].

Всякий кортеж (X, H, τ, f), где X — непустое множество, (H, τ) — непустое хаусдорфово ТП и $f \in H^X$, условимся называть целевым. Если (X, H, τ, f) есть целевой кортеж (ЦК) и $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$, то (см. раздел 1) определено МП $(\mathbf{as})[H; \tau; f; \mathcal{X}]$, для которого при $\mathcal{X} \in \beta[X]$ можно использовать представление, подобное (1.3). Для целей изучения данного МП в [12, с. 147] предлагается конструкция расширения с использованием компактного ТП, которую будем называть компактификатором.

Итак, для всякого ЦК (X, H, τ, f) называем (X, H, τ, f)-компактификатором произвольный кортеж $(\mathbf{K}, \mathbf{t}, \mathbf{m}, \mathbf{g})$, для которого $(\mathbf{K}, \mathbf{t})$ — компактное ТП, $\mathbf{K} \neq \varnothing$, $\mathbf{m} \in \mathbf{K}^X$, $\mathbf{g} \in C(\mathbf{K}, \mathbf{t}, H, \tau)$ и $f = \mathbf{g} \circ \mathbf{m}$. Отметим, что не всякий ЦК обладает компактификатором (см. [12, с. 156]), однако $\left(\mathbb{U}, U, \tau^0_{\rho_1}[U], g\right)$ и $\left(\mathbb{V}, V, \tau^0_{\rho_2}[V], h\right)$ — суть ЦК, обладающие компактификаторами, то есть компактифицируемые ЦК. Для проверки данного свойства введем тождественные отображения

$$\left(\mathbf{i}_1 \in C\left(U, \tau^0_{\rho_1}[U], U, \tau^0_{\rho_1}[U]\right)\right) \ \& \ \left(\mathbf{i}_2 \in C\left(V, \tau^0_{\rho_2}[V], V, \tau^0_{\rho_2}[V]\right)\right)$$

посредством условий $\left(\mathbf{i}_1(x) \triangleq x \ \ \forall x \in U\right)$ & $\left(\mathbf{i}_2(y) \triangleq y \ \ \forall y \in V\right)$. При этом $\mathbf{i}_1 \circ g = g$ и $\mathbf{i}_2 \circ h = h$. В итоге (см. (2.2)) $\left(U, \tau^0_{\rho_1}[U], g, \mathbf{i}_1\right)$ есть $\left(\mathbb{U}, U, \tau^0_{\rho_1}[U], g\right)$-компактификатор, а $\left(V, \tau^0_{\rho_2}[V], h, \mathbf{i}_2\right)$ есть $\left(\mathbb{V}, V, \tau^0_{\rho_2}[V], h\right)$-компактификатор. Итак, ЦК $\left(\mathbb{U}, U, \tau^0_{\rho_1}[U], g\right)$ и $\left(\mathbb{V}, V, \tau^0_{\rho_2}[V], h\right)$ компактифицируемы. Разумеется, среди всевозможных компактификаторов следует выбирать по возможности более полезные, что и было сделано в [11] (при этом удалось получить ряд конкретных свойств, связанных с $\mathbf{V}$; в частности, были получены условия устойчивости «по максимину»). Сейчас ограничимся общими положениями, использующими следующий достаточно простой факт (см. [12, с. 147]): если (X, H, τ, f) есть ЦК, а $(\mathbf{K}, \mathbf{t}, \mathbf{m}, \mathbf{g})$ является (X, H, τ, f)-компактификатором, то (см. (1.3))

$$(\mathbf{as})[H; \tau; f; \mathcal{H}] = \mathbf{g}^1\left((\mathbf{as})\left[\mathbf{K}; \mathbf{t}; \mathbf{m}; \mathcal{H}\right]\right) \ \ \forall \mathcal{H} \in \beta[X]. \tag{4.1}$$

С учетом (4.1) теорему 1 можно дополнить. В этой связи откажемся сейчас от предположения (2.11) с тем, чтобы коснуться вопросов асимптотической совместности. Итак, пусть $(P, \mathbf{t}_1, \mathbf{m}_1, \varphi)$ есть $(\mathbb{U}, U, \tau^0_{\rho_1}[U], g)$-компактификатор, а $(Q, \mathbf{t}_2, \mathbf{m}_2, \psi)$ есть $(\mathbb{V}, V, \tau^0_{\rho_2}[V], h)$-компактификатор. Тогда МП

$$\mathbb{P} \triangleq (\mathbf{as})[P; \mathbf{t}_1; \mathbf{m}_1; \mathcal{U}] \in \mathcal{P}(P)$$

согласно (2.6) и (4.1) реализует равенство

$$\mathbb{G}_1 = \varphi^1(\mathbb{P}). \tag{4.2}$$

Аналогичным образом, МП $\mathbb{Q} \triangleq (\mathbf{as})[Q; \mathbf{t}_2; \mathbf{m}_2; \mathcal{V}] \in \mathcal{P}(Q)$ реализует множество $\mathbb{G}_2$ (2.6) посредством представления

$$\mathbb{G}_2 = \psi^1(\mathbb{Q}). \tag{4.3}$$

Из (4.2) и (4.3) извлекаются очевидные свойства эквивалентности:

$$(\mathbb{G}_1 \neq \varnothing) \Longleftrightarrow (\mathbb{P} \neq \varnothing); \ \ (\mathbb{G}_2 \neq \varnothing) \Longleftrightarrow (\mathbb{Q} \neq \varnothing).$$

С учетом предложений 1 и 2 получаем теперь, что

$$(\mathbb{P} \neq \varnothing) \Longleftrightarrow (\mathcal{U} \in \beta_0[\mathbb{U}]); \ \ (\mathbb{Q} \neq \varnothing) \Longleftrightarrow (\mathcal{V} \in \beta_0[\mathbb{V}]).$$

Итак, вышеупомянутые свойства асимптотической совместности получают свое исчерпывающее описание в терминах вспомогательных МП $\mathbb{P}$ и $\mathbb{Q}$. С учетом этих положений всюду в дальнейшем постулируем, что

$$(\mathbb{P} \neq \varnothing) \ \& \ (\mathbb{Q} \neq \varnothing),$$

получая, как следствие, свойства (2.11) и (2.12). Отметим, что в рассматриваемом случае согласно (1.3)

$$(\mathbb{P} \in (\mathbf{t}_1 - \mathrm{comp})[P]) \ \& \ (\mathbb{Q} \in (\mathbf{t}_2 - \mathrm{comp})[Q]).$$

С учетом (3.1), (4.2) и (4.3) имеем тогда следующие свойства компактности:

$$\left(\varphi^1(\mathbb{P}) \in (\tau^0_{\rho_1}[U] - \mathrm{comp})[U]\right) \ \& \ \left(\psi^1(\mathbb{Q}) \in (\tau^0_{\rho_2}[V] - \mathrm{comp})[V]\right). \tag{4.4}$$

Введем в рассмотрение отображение $\tilde{\mathbf{f}}$, определяемое правилом

$$(p, q) \longmapsto \mathbf{f}(\varphi(p), \psi(q)) : \ P \times Q \longrightarrow \mathbb{R};$$

разумеется, $\tilde{\mathbf{f}} \in \mathbb{C}(P \times Q, \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2)$, где $\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2$ — топология $P \times Q$, соответствующая произведению ТП $(P, \mathbf{t}_1)$ и $(Q, \mathbf{t}_2)$. Упомянутое свойство непрерывности $\tilde{\mathbf{f}}$ наследуется от аналогичных свойств функций $\mathbf{f}$, φ и ψ; с учетом (4.4) определен обобщенный максимин

$$\max_{q \in \mathbb{Q}} \min_{p \in \mathbb{P}} \tilde{\mathbf{f}}(p, q) = \max_{y \in \psi^1(\mathbb{Q})} \min_{x \in \varphi^1(\mathbb{P})} \mathbf{f}(x, y) \in \mathbb{R}.$$

Из (3.13), (4.2), (4.3) и теоремы 1 вытекает следующее

Предложение 5. *Обобщенный и асимптотический максимины совпадают*

$$\mathbf{V} = \max_{q \in \mathbb{Q}} \min_{p \in \mathbb{P}} \tilde{\mathbf{f}}(p, q). \tag{4.5}$$

Доказательство очевидно. Роль (4.5) определяется, в частности, тем полезным свойством, что в целом ряде практически интересных случаев вспомогательные МП $\mathbb{P}$ и $\mathbb{Q}$ оказываются одними и теми же при выборе различных вариантов семейств $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ в пределах некоторых диапазонов ограничений асимптотического характера. Такие случаи реализации МП подробно рассматривались в [12, гл. 3, 4], [14, 15], [16, гл. 4,5], [17]. Предложение 5 (и теорема 1) позволяют распространить упомянутые положения на случай игровых задач. Особо следует отметить свойство асимптотической нечувствительности МП при ослаблении части ограничений (здесь уместно выделить случай моментных ограничений), определяемой в терминах некоторых условий ступенчатозначности (см. [12, гл. 3,4], [16, 17] и др.). В случае игровой задачи, рассматриваемой в настоящей работе, упомянутые условия будут приводить к асимптотической нечувствительности обобщенного максимина при ослаблении соответствующей части ограничений. Соответствующие точные утверждения легко извлекаются из теоремы 1 и предложения 5 по существу так же, как в [11] на основе общих положений были получены условия устойчивости «по максимину» при ослаблении моментных ограничений; в данном случае для этого достаточно непосредственно «задействовать» условия асимптотической нечувствительности МП, приведенные в [12, 14–17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977. — 624 с.
2. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. — Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. — 229 с.
3. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 479 с.
4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
5. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. — М.: Наука, 1985. — 518 с.
6. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981. — 287 с.
7. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. — М.: Мир, 1970. — 416 с.
8. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. — М.: Наука, 1968. — 272 с.
9. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 751 с.
10. Ченцов А. Г. Расширения абстрактных задач о достижимости: несеквенциальная версия // Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург. — 2007. — Т. 13, № 2. — С. 184–217.
11. Ченцов А. Г., Шапарь Ю. В. Конечно-аддитивные меры и расширения игровых задач с ограничениями асимптотического характера // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2010. — Вып. 1. — С. 89–111.
12. Chentsov A. G. Asymptotic attainability. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1997. — 322 p.
13. Chentsov A. G., Morina S. I. Extensions and Relaxations. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 408 c.
14. Ченцов А. Г. Асимптотически достижимые элементы и их обобщенное представление // Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург. — 1995. — Т. 3. — С. 211–244.

15. Ченцов А. Г. Универсальная асимптотическая реализация интегральных ограничений и конструкции расширения в классе конечно-аддитивных мер // Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург. — 1998. — Т. 5. — С. 328–356.
16. Chentsov A.G. Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. — New York–London–Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. — 244 p.
17. Ченцов А. Г. Расширения в классе конечно-аддитивных мер и условия асимптотической нечувствительности при ослаблении части ограничений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — Вып. 1. — С. 131–152.

Поступила в редакцию 15.08.09

A. G. Chentsov

About presentation of maximin in the game problem with constraints of asymptotic character

The abstract game problem of control and its relaxations connected with a weakening of constraints on the choice of programmed strategies are considered. In this case, the series of maximin problems is realized; for this series, the sets of admissible strategies of participants form directed systems. It is established that realized maximins are convergent. The representation of the corresponding generalized limit is established.

Keywords: maximin, attraction set, constraints of asymptotic character.

Mathematical Subject Classifications: 28A33

Ченцов Александр Георгиевич, член-корреспондент РАН, заведующий отделом оптимального управления, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, E-mail: chentsov@imm.uran.ru