

УДК 515.122.536

© *Е. С. Бастрыков*

## О ЗАМЫКАНИЯХ СЧЁТНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ $BN$

Рассматривается компактификация  $BN$  счётного дискретного пространства  $N$ . В данной работе описаны свойства замыканий подмножеств  $BN$ , состоящих из различных классов точек. Показано существование точек, не принадлежащих классам, выделенным ранее.

*Ключевые слова:* бикompактное расширение, компактификация Стоуна–Чеха, пространство Стоуна булевой алгебры, центрированные системы множеств.

### Введение

Рассматриваемое нами пространство  $BN$  было построено М. Беллом [1] как компактификация счётного дискретного пространства  $N$ , чей нарост несепарабелен, но удовлетворяет условию Суслина. Это пространство основано на технике  $n$ -сцепленных систем, которая используется при построении классов слабых  $p$ -точек в одном из центральных пространств теории бикompактных расширений — пространстве Стоуна–Чеха  $\beta\omega$ . Пространство  $BN$  сразу нашло применение в теории  $\beta\omega$  для построения нового класса слабых  $p$ -точек [2]. Дальнейшее исследование пространства Белла приведены в [3–5]. В [5] описаны классы точек нароста  $BN \setminus N$  —  $u$ - и  $\ell$ -точки — и их свойства. Нами выделен ещё один класс точек нароста —  $\ell_{\pi|M}$ -точки.

В данной работе мы рассматриваем замыкания различных счётных подмножеств  $BN$  и их свойства, позволяющие ответить на некоторые вопросы, возникающие вследствие приведённой выше классификации точек нароста.

1. В  $\beta\omega$  нет точек со счётным характером. Есть ли в  $BN \setminus N$  точки со счётным характером? (Теорема 9).
2. Из результатов [5] следует, что классы  $u$ - и  $\ell$ -точек не пересекаются. В связи с выделением класса  $\ell_{\pi|M}$ -точек возникают вопросы:  
пересекаются ли классы  $u$ - и  $\ell$ -точек с классом  $\ell_{\pi|M}$ -точек? (Теорема 10);  
существуют ли в  $BN \setminus N$  точки не являющиеся ни  $u$ -, ни  $\ell$ - и ни  $\ell_{\pi|M}$ -точками? (Теорема 12 и её следствие).
3. Также в связи с выделением в  $BN$  различных классов точек нароста возникает необходимость рассмотреть замыкания подмножеств этих классов, а также подмножеств  $N$ , чьи замыкания содержат или не содержат точки различных классов. Что из себя представляют и из каких точек состоят замыкания счётных множеств, состоящих из различных классов точек? (Теоремы 11, 13 и их следствия).
4. Известным фактом является то, что в  $\beta\omega$  замыкание любого счётного подмножества  $\omega$  гомеоморфно  $\beta\omega$ . В случае пространства  $BN$  ситуация менее однозначна. В [3] было доказано, что замыкание любой строгой антицепи (определение 1) гомеоморфно  $\beta\omega$ . Более того, в [6] доказано, что замыкание некоторых антицепей и даже некоторых конечных объединений антицепей гомеоморфно  $\beta\omega$ . Существует ли антицепь в  $N$ , замыкание которой негомеоморфно  $\beta\omega$ ? (Примеры 1, 2).

Приведём конструкцию пространства  $BN$  [1].

$$P = \{f \in \omega^\omega : 0 \leq f(n) \leq n + 1 \text{ для всех } n \in \omega\},$$

$$N = \{f|_n : f \in P, n \subseteq \omega\}.$$

Здесь и далее через  $n$  обозначаем в зависимости от контекста и натуральное число, и подмножество натуральных чисел  $\{i \in \omega : i \leq n\}$ .

$$C_s = \{t \in N : t \text{ продолжает } s\} \quad \text{для } s \in N,$$

$$T = \{\pi \in N^\omega : \text{dom } \pi(n) = n + 1\},$$

$$C_\pi = \cup\{C_{\pi(n)} : n \in \omega\}.$$

Определим  $BN$  как пространство Стоуна булевой алгебры  $B$ , порождённой семейством

$$\{C_\pi : \pi \in T\} \cup \{N \setminus C_\pi : \pi \in T\}.$$

Отметим, что множество  $N$  частично упорядочено со следующим отношением порядка:  $t \geq s$ , если  $t$  продолжает  $s$ ,  $s, t \in N$ . Таким образом, на пространство  $N$  естественным образом переносятся понятия цепи и антицепи. В случае антицепи нас будут интересовать так называемые строгие антицепи, которые мы определим следующим образом:

**Определение 1.** Будем говорить, что антицепь  $A \subseteq N$  — *строгая* тогда и только тогда, когда для любых  $s, t \in A$ ,  $s \neq t$  выполнено  $\text{dom } s \neq \text{dom } t$ . (Для удобства будем обозначать строгую антицепь через образ  $\pi(M)$ , где  $\pi \in T$ ,  $M \subseteq \omega$ .)

Для  $\pi \in T$  и  $M \subseteq \omega$  обозначим:  $C_{\pi|M} = \cup\{C_{\pi(n)} : n \in M\}$ . Для  $A \subseteq N$  будем обозначать  $A^* = [A] \setminus A$  — *нарос* множества  $A$ .

В [3] были доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $\pi(M)$  — *строгая бесконечная антицепь*, тогда  $[\pi(M)]$  гомеоморфно  $\beta\omega$ .

**Теорема 2.** Пусть  $A = \{s_i : i \in \omega\}$  — *бесконечная цепь* в  $N$ , тогда  $|A^*| = 1$ .

Грызловым А. А. были получены следующие результаты [6].

**Теорема 3.** Если множество  $A \subseteq N$  такое, что  $|[A] \setminus A| = 1$ , тогда существует конечное множество  $K \subseteq A$  такое, что  $A \setminus K$  — *цепь*.

**Теорема 4.** Если замыкание  $[A]$  множества  $A \subseteq N$  — *копия*  $\beta\omega$ , тогда  $A$  — *объединение* конечного числа антицепей.

Приведём определения  $u$ - и  $\ell$ -точек [5].

**Определение 2.** Точку  $x \in BN \setminus N$  будем называть *u-точкой*, если  $x$  имеет базу в  $BN \setminus N$ , состоящую из множеств вида  $\{(C_{\pi|M})^*\}$ .

**Определение 3.** Точку  $x \in BN \setminus N$  будем называть *\ell-точкой*, если  $x$  имеет базу в  $BN \setminus N$ , состоящую из множеств вида  $\{(N \setminus \bigcup_{j \leq k} C_{\pi_j})^*\}$ .

В [4] доказана следующая теорема, характеризующая  $\ell$ -точки.

**Теорема 5.** Для точки  $x \in BN \setminus N$  следующие утверждения эквивалентны:

- (а) точка  $x$  есть предел некоторой бесконечной цепи  $\{s_k : k \in \omega\}$  элементов  $N$ ;
- (б)  $x$  —  $\ell$ -точка;

(с) из того, что  $x \in [C_{\pi|M}]$  для некоторых  $\pi \in T$ ,  $M \subseteq \omega$  следует, что найдётся  $i \in M$  такое, что  $x \in [C_{\pi(i)}]$ .

Следующая теорема доказана в [5].

**Теорема 6.** Пусть  $\{C_{s_i} : i \in \omega\}$  — семейство дизъюнктивных подмножеств  $BN$ ,  $x_i \in C_{s_i}$  —  $\ell$ -точки ( $i \in \omega$ ), и  $X = \{x_i : i \in \omega\}$ . Тогда  $[X] \setminus X$  гомеоморфно  $\beta N \setminus N$  и состоит из точек, не являющихся ни  $u$ -, ни  $\ell$ -точками.

Для бесконечной строгой антицепи  $\pi(M)$  определим

$$\theta_{\pi|M} = \{C_{\pi|M_i} : M_i = \{n \in M : n \geq i\}\},$$

$$\mu_{\pi|M} = \{N \setminus \bigcup_{j \leq k} C_{\pi_j}\} \cup \theta_{\pi|M}.$$

**Определение 4.** Точку  $x \in BN \setminus N$  будем называть  $\ell_{\pi|M}$ -точкой для  $C_{\pi|M}$ , если найдётся максимальная центрированная система  $\xi = \{U\}$  в семействе  $\mu_{\pi|M}$ , мажорирующая  $\theta_{\pi|M}$ , такая что  $x = \bigcap \{[U] : U \in \xi\}$ .

Основные свойства  $\ell_{\pi|M}$ -точек описываются в следующих теоремах.

**Теорема 7.** Пусть множество  $C_{\pi|M}$  — приведённое и  $|M| = \omega$ . Тогда

$$[\pi(M)] \setminus \pi(M) = \{x : x \text{ — } \ell_{\pi|M}\text{-точка для } C_{\pi|M}\}.$$

**Определение 5.** Пусть  $\pi(M)$  — строгой антицепь, тогда будем говорить, что  $C_{\pi'|M'}$  вписано в  $C_{\pi|M}$ , если для любого  $n' \in M'$  найдётся  $n \in M$  такое, что  $\pi(n) \leq \pi'(n')$  и  $\pi(n) \neq \pi'(n')$  (далее  $\pi(n) < \pi'(n')$ ).

**Теорема 8.** Пусть  $\pi(M)$  — бесконечная строгой антицепь, тогда

$$\bigcap \{[C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}] : C_{\pi'|M'} \text{ вписано в } C_{\pi|M}\} = [\pi(M)].$$

### § 1. Основной результат

Известным фактом является то, что в  $\beta\omega$  нет точек со счётным характером. Для пространства Белла ситуация аналогична.

**Теорема 9.** В  $BN \setminus N$  нет точек со счётным характером.

**Доказательство.** Предположим противное, пусть  $x \in BN \setminus N$  и  $\{U_i : i \in \omega\}$  — база точки  $x$ . Тогда легко построить последовательность точек из  $N$ , сходящуюся к  $x$ , и по теореме 3  $x$  —  $\ell$ -точка. Тогда существует база  $\{O_i : i \in \omega\}$  точки  $x$ , состоящая из множеств вида  $[N \setminus \bigcup_{j \leq k} C_{\pi_j}]$ .

Для каждого  $O_i$  найдётся  $s_i \in N$  такое, что  $x \notin [C_{s_i}] \subseteq O_i$ . Для полученного множества  $\{s_i : i \in \omega\}$  пусть  $s'_1 = s_1$ ,  $s'_i$  — продолжение  $s_i$ , такое что  $\text{dom } s'_i > \text{dom } s'_{i-1}$ . Рассмотрим  $\pi$  такое, что  $x \notin [C_\pi]$ , и построим  $\pi'$ :

$$\pi' = \begin{cases} s'_i, & \text{если } n = \text{dom } s'_i, \\ \pi(n), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что  $[N \setminus C_{\pi'}]$  — окрестность точки  $x$  и  $O_i \setminus [N \setminus C_{\pi'}] \neq \emptyset$  для всех  $i \in \omega$ , что противоречит тому, что  $\{O_i : i \in \omega\}$  — база точки  $x$ .

То, что классы  $u$ - и  $\ell$ -точек не пересекаются, непосредственно следует из теоремы 5, а именно из того факта, что, если  $\ell$ -точка  $x$  лежит в  $[C_{\pi|M}]$ , то найдётся  $n \in M$  такое, что  $x \in [C_{\pi(n)}]$ . Таким образом, если  $x$  к тому же и  $u$ -точка, тогда, по определению, есть база  $B = \{U\}$  точки  $x$ , состоящая из множеств вида  $[C_{\pi|M}]$ , но тогда  $\bigcap \{U : U \in B\} \supseteq F_f$ , где  $f$  такое, что  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ . Следующая теорема описывает взаимосвязь всех трёх полученных классов —  $u$ -,  $\ell$ - и  $\ell_{\pi|M}$ -точек.

**Теорема 10.** Пусть  $D = \pi_0(M_0)$  — строгая антицепь. Тогда  $[D] \setminus D$  не содержит ни  $u$ -, ни  $\ell$ -точек.

**Доказательство.** Предположим противное, пусть найдётся  $x \in [D] \setminus D$  —  $u$ -точка. Рассмотрим  $C_{\pi'|M'}$ , вписанное в  $C_{\pi_0|M_0}$ , тогда по теореме 8  $x \in [C_{\pi_0|M_0} \setminus C_{\pi'|M'}]$ . Но по определению  $u$ -точки существует база точки  $x$ , состоящая из множеств вида  $[C_{\pi|M}]$  и соответственно найдётся  $C_{\pi''|M''}$  такое, что  $x \in [C_{\pi''|M''}] \subseteq [C_{\pi_0|M_0} \setminus C_{\pi'|M'}]$ . Таким образом,  $C_{\pi''|M''}$  — вписано в  $C_{\pi_0|M_0}$ , а значит  $x \in [C_{\pi_0|M_0} \setminus C_{\pi''|M''}]$ . Противоречие.

Предположим, что  $x \in [D] \setminus D$  —  $\ell$ -точка. Найдётся  $n \in M_0$  такое, что  $x \in [C_{\pi_0(n)}]$ . Рассмотрим  $s$  — продолжение  $\pi_0(n)$ , лежащее в сходящейся к  $x$  цепи. Тогда, с одной стороны,  $x \notin [C_{\pi|M} \setminus C_s]$ , с другой стороны,  $C_s$  вписано в  $C_{\pi|M}$ , а значит  $[D] \setminus D \subseteq [C_{\pi|M} \setminus C_s]$ . Противоречие.

Для  $u$ -точек можно усилить этот результат.

**Определение 6.** Для  $A, B \subseteq N$  будем говорить, что множество  $A$  мажорируется множеством  $B$ , если для всех  $s \in A$  найдётся  $t \in B$  такое, что  $t \geq s$ .

**Теорема 11.** В замыкании любого подмножества  $N$ , мажорируемого строгой антицепью, нет  $u$ -точек.

**Доказательство.** Предположим противное. Пусть множество  $A \subseteq N$  мажорируется строгой антицепью  $\pi'(M')$  и  $x \in [A] \setminus A$  —  $u$ -точка. Тогда существует база точки  $x$ , состоящая из множеств вида  $[C_{\pi|M}]$ . Таким образом, для любой окрестности  $O_x$  точки  $x$  найдётся  $\pi \in T$  и  $M \subseteq \omega$  такие, что  $x \in [C_{\pi|M}] \subseteq O_x$ . Так как  $x \in [A] \setminus A$ , то  $|C_{\pi|M} \cap A| = \omega$ . Из вида множества  $C_{\pi|M}$  следует, что если  $s \in C_{\pi|M}$ , то для всех  $t \geq s$  выполняется  $t \in C_{\pi|M}$ , тогда  $|C_{\pi|M} \cap \pi'(M')| = \omega$ , то есть  $x \in [\pi'(M')]$ , что противоречит теореме 10.

**Следствие 1.** Замыкание объединения конечного числа антицепей из  $N$  не содержит  $u$ -точек.

**Доказательство.** Предположим противное. Пусть  $D = \cup\{D_i : i \leq k\}$ , где  $D_i$  — антицепь для всех  $i \leq k$ . И пусть  $x \in [D]$  —  $u$ -точка, тогда найдётся  $i \leq k$  такое, что  $x \in [D_i]$ .

Докажем, что любая антицепь мажорируется строгой антицепью. Пусть  $D' = \{t_i : i \in \omega\}$  — антицепь. Пусть  $t'_0 = t_0$ , а  $t'_i$  — продолжение  $t_i$  такое, что  $\text{dom } t'_i > \max(\text{dom } t_i, \text{dom } t'_{i-1})$ . Множество  $\tilde{D} = \{t'_i : i \in \omega\}$  является строгой антицепью, мажорирующей антицепь  $D'$ , и по теореме  $[D_i]$  не содержит  $u$ -точек. Противоречие.

**Замечание 1.** По теореме 4 и вышеуказанному следствию замыкание любого подмножества  $N$ , гомеоморфное  $\beta\omega$ , не содержит  $u$ -точек.

Следующая теорема отвечает на вопрос о существовании в  $BN \setminus N$  ни  $u$ -, ни  $\ell$ -, ни  $\ell_{\pi|M}$ -точек.

**Теорема 12.** Если  $A = \{x_i : i \in \omega\} \subseteq BN \setminus N$  состоит из  $\ell$ -точек, то  $[A]$  не содержит  $\ell_{\pi|M}$ -точек для всякой бесконечной строгой антицепи  $\pi(M)$ .

**Доказательство.** Предположим противное, пусть  $x \in [A]$  —  $\ell_{\pi|M}$ -точка для бесконечной строгой антицепи  $\pi(M)$ . Занумеруем все точки  $A$ , лежащие в  $[C_{\pi|M}]$ , получим  $\{x_{i_j} : j \in \omega\}$ . Рассмотрим  $x_{i_0}$ . Так как  $x_{i_0}$  —  $\ell$ -точка, лежащая в  $[C_{\pi|M}]$ , то по теореме 5 найдётся  $n_0 \in M$  такое, что  $x_{i_0} \in [C_{\pi(n_0)}]$ . Пусть  $s_0$  — элемент сходящейся к  $x_{i_0}$  цепи и  $\text{dom } s_0 > n_0$ . Для  $x_{i_j}$  аналогично найдётся  $n_j \in M$  такое, что  $x_{i_j} \in [C_{\pi(n_j)}]$ . Пусть  $s_j$  — элемент сходящейся к  $x_{i_j}$  цепи и  $\text{dom } s_j > \max\{\text{dom } s_{j-1}, n_j\}$ . Обозначим  $\{s_j : j \in \omega\} = \pi'(M')$ , при этом из построения очевидно, что  $C_{\pi'|M'}$  — вписано в  $C_{\pi|M}$ . Таким образом,  $x \in [C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}]$  и  $[C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}] \cap A = \emptyset$ , следовательно  $x \notin [A]$ .

Из доказанной теоремы и теоремы 6 вытекает следующее.

**Следствие 2.** В  $BN \setminus N$  есть точки, не являющиеся ни  $u$ -, ни  $\ell$ -, ни  $\ell_{\pi|M}$ -точками.

Следующая теорема и её следствия определяют класс множеств в  $BN \setminus N$ , из которых можно выделить подмножества, чьи замыкания гомеоморфны  $\beta\omega$ .

**Теорема 13.** Пусть  $A = \{x_i : x_i \in F_{f_i}, i \in \omega\} \subseteq BN \setminus N$  такое, что  $f_i \neq f_j$  ( $i \neq j$ ), то найдётся  $A' \subseteq A$  такое, что  $[A']$  гомеоморфно  $\beta\omega$ .

**Доказательство.** Пусть  $x \in [A] \setminus A$  и  $f \in P$  такое, что  $x \in F_f$ . Рассмотрим систему окрестностей  $\{[C_{f|n}] : n \in \omega\}$  точки  $x$ . Так как  $x \in [A] \setminus A$ , то для любого  $n \in \omega$  следует, что  $|[C_{f|n} \cap A]| = \omega$ . Но из строения множества  $A$  следует, что  $|F_f \cap A| = 1$ . Тогда найдётся бесконечное  $I \subseteq \omega$  такое, что  $|[C_{f|n} \setminus C_{f|n+1}] \cap A| \neq \emptyset$  для  $n \in I$ . Для каждого  $n \in I$  зафиксируем  $y_n \in A$  из  $[C_{f|n} \setminus C_{f|n+1}]$ . Таким образом, можно построить строгую антицепь  $\pi(M)$  такую, что  $y_n \in [C_{\pi(n)}]$ , из чего следует, что  $\{y_n : n \in \omega\}$  гомеоморфно  $\beta\omega$ .

**Следствие 3.** Из любого множества  $\ell$ -точек можно выделить подмножество, замыкание которого гомеоморфно  $\beta\omega$ .

Это следует из того факта, что для любого  $f \in P$  множество  $F_f$  содержит единственную  $\ell$ -точку.

**Следствие 4.** В  $BN \setminus N$  существует счётное множество  $\ell_{\pi|M}$ -точек, замыкание которого гомеоморфно  $\beta\omega$ .

**Доказательство.** Пусть  $f_i \in P$  различны для  $i \in \omega$ . Для каждого  $i \in \omega$  зафиксируем строгую антицепь  $\pi_i(M)$  ( $M = \omega \setminus \{0\}$ ) такую, что  $\pi_i(j) \in C_{f_{j-1}} \setminus C_{f_j}$  для  $j \in M$ . Очевидно, что  $[\pi_i(M)] \setminus \pi_i(M)$  целиком лежит в  $F_{f_i}$ . Зафиксируем  $x_i \in [\pi_i(M)] \setminus \pi_i(M)$ . По теореме 7  $x_i$  —  $\ell_{\pi|M}$ -точка для  $C_{\pi_i|M}$ . Пусть  $X = \{x_i : i \in \omega\}$ . По теореме 13 найдётся  $X'$  такое, что  $[X']$  гомеоморфно  $\beta\omega$ .

Далее рассмотрим два примера дискретных подмножеств  $N$ , чьи замыкания негомеоморфны  $\beta\omega$ . Для доказательства того, что замыкание счётного дискретного множества негомеоморфно  $\beta\omega$ , воспользуемся тем фактом, что для любых  $A, B \subseteq \omega$ , если  $A \cap B = \emptyset$ , то  $[A]_{\beta\omega} \cap [B]_{\beta\omega} = \emptyset$ .

Для  $s \in N$  обозначим:  $C'_s = \{t \in N : \text{dom } t = \text{dom } s + 1, t|_{\text{dom } s} = s\}$  (множество всех одноточечных продолжений  $s$ ).

**Пример 1.** Пусть  $f \in P$  и  $\{s_n = f|_{n+1} : n \in \omega\}$ . Пусть  $A_n, B_n \subseteq C'_{s_n} \setminus \{s_{n+1}\}$  такие, что  $A_n \cap B_n = \emptyset$  и  $|A_n| = |B_n| = [n/2]$  (где  $[n/2]$  — целая часть числа  $n/2$ ) для всех  $n \in \omega$ . Обозначим  $A = \cup\{A_n : n \in \omega\}$  и  $B = \cup\{B_n : n \in \omega\}$ .

Рассмотрим предел цепи  $\{s_n : n \in \omega\}$  — точку  $x$ . Пусть  $O_x = [C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{i \leq k} C_{\pi_i}]$  — некоторая окрестность точки  $x$ . Так как  $x$  — предел  $\{s_n : n \in \omega\}$ , то существует  $n_0 \in \omega$  такое, что для любого  $n > n_0$  точка  $s_n \in O_x$  и  $|A_n| > k, |B_n| > k$ . Множество  $\bigcup_{i \leq k} C_{\pi_i}$  содержит не более чем  $k$  точек из  $C'_{s_n}$ , следовательно  $O_x \cap A_n \neq \emptyset$  и  $O_x \cap B_n \neq \emptyset$ . Таким образом,  $x \in [A] \cap [B] \neq \emptyset$ , а следовательно,  $[A \cup B]$  негомеоморфно  $\beta N$ .

**Пример 2.** Аналогичным образом можно рассматривать антицепь.

Пусть  $\{\pi(n) : n \in \omega\}$  — строгая антицепь. Для каждого  $n \in \omega$  пусть  $A_n, B_n \subseteq C'_{\pi(n)}$  такие, что  $A_n \cap B_n = \emptyset$  и  $|A_n| = |B_n| = [n/2]$  ( $[n/2]$  — целая часть  $n/2$ ). Обозначим  $A = \cup\{A_n : n \in \omega\}$  и  $B = \cup\{B_n : n \in \omega\}$ .

Рассмотрим точку  $x \in \{\pi(n) : n \in \omega\}$ . Как было показано в [3], замыкание антицепи гомеоморфно  $\beta N$ . Таким образом, можно рассматривать  $x$  как свободный ультрафильтр на нашей антицепи. Рассмотрим произвольную окрестность  $O_x = [C_{\pi'|M'} \setminus \bigcup_{i \leq k} C_{\pi_i}]$  точки  $x$ . Так как  $x$  — свободный ультрафильтр на нашей антицепи, то

$$|O_x \cap \{\pi(n) : n \in \omega\}| = \omega.$$

Тогда найдётся бесконечно много  $n \in \omega$  таких, что  $\pi(n) \in O_x$  и  $|A_n| > k$ ,  $B_n > k$ . Множество  $\bigcup_{i \leq k} C_{\pi_i}$  содержит не более чем  $k$  точек из  $C'_{s_n}$ , следовательно  $O_x \cap A_n \neq \emptyset$  и  $O_x \cap B_n \neq \emptyset$ . Таким образом,  $x \in [A] \cap [B] \neq \emptyset$ , а следовательно,  $[A \cup B]$  негомеоморфно  $\beta N$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bell M. G. Compact ccc non-separable spaces of small weight // Topology Proceedings. 1980. Vol. 5. P. 11–25.  
<http://topo.math.auburn.edu/tp/reprints/v05/tp05002s.pdf>
2. Грызлов А. А. О бикompактных расширениях дискретных пространств // Фундаментальная и прикладная математика. 1996. Т. 2, № 3. С. 803–848.  
<http://www.math.msu.su/fpm/rus/96/963/96306t.htm>
3. Gryzlov A. A., Bastrykov E. S., Golovastov R. A. On Bell's compactification of  $N$  // Topology Proceedings. 2010. Jul. Vol. 35. P. 177–185.  
<http://topology.auburn.edu/tp/reprints/v35/>
4. Бастрыков Е. С. О некоторых точках расширения Белла счётного дискретного пространства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 4. С. 3–6.
5. Грызлов А. А., Бастрыков Е. С., Головастов Р. А. О точках одного бикompактного расширения  $N$  // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 10–17.
6. Gryzlov A. A. On convergent sequences and copies of  $\beta N$  in one compactification of  $N$  // The 11th Topological Symposium, International Conference on General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra. The Center for Theoretical Study and the Mathematical Institute of the Czech Academy of Sciences, 2011. Aug.

Поступила в редакцию 25.07.11

***E. S. Bastrykov***

**On closures of countable subsets of  $BN$**

We consider a compactification  $BN$  of a countable discrete space  $N$ . The paper describes some properties of the closures of subsets of  $BN$ , which consist of points belonging to different classes. We prove the existence of points which do not belong to the classes obtained before.

*Keywords:* compactification, Stone–Čech compactification, Stone space of Boolean algebra, centered system of sets.

Mathematical Subject Classifications: 54D35, 54D80, 54-06

Бастрыков Евгений Станиславович, аспирант, кафедра алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4).

E-mail: vporoshok@gmail.com

Bastrykov Evgenii Stanislavovich, post-graduate student, department of algebra and topology, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1 (build. 4), Izhevsk, 426034, Russia.