МАТЕМАТИКА 2011. Вып. 3

УДК 517.518

© *Н. В. Латыпова*

НЕЗАВИСИМОСТЬ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ МНОГОЧЛЕНАМИ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ ОТ УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

Рассматриваются два способа биркгофовой интерполяции функции двух переменных многочленами четвертой степени на треугольнике для метода конечных элементов. Оценки погрешности для предложенных элементов зависят только от диаметра разбиения и не зависят от углов триангуляции. Показана неулучшаемость полученных оценок.

Ключевые слова: погрешность интерполяции, кусочно–полиномиальная функция, триангуляция, метод конечных элементов.

Введение

Первоначально оценки погрешности аппроксимации функции и ее i-й производной имели вид CH^{n+1-i}, где H — диаметр триангуляции, n — степень интерполяционного многочлена и этот параметр также тесно связан с классом аппроксимируемых функций (классы $W^{n+1}M$, которые будут введены ниже). При этом вопрос о том, как константа C зависит от свойств триангуляции не рассматривался. Позже появилось условие наименьшего угла триангуляции (работы Синджа, Зламала, Женишека, Брэмбла и других). Наиболее общие результаты такого рода принадлежат Сьярле и Равьяру [1], у которых в двумерном случае в максимально общей ситуации оценки погрешности аппроксимации имели вид $CH^{n+1-i}(\sin\alpha)^{-i}$, где α — наименьший угол триангуляции, а константа C уже не зависит от триангуляции.

В некоторых случаях наименьший угол, фигурирующий в оценках Сьярле–Равьяра, можно заменить на средний (или наибольший, что с точностью до констант равносильно). При этом выясняется, что различные типы интерполяционных процессов (Лагранжа, Эрмита, Биркгофа) по-разному реагируют на характер вырождения триангуляции. Подобные оценки автоматически переносятся на оценки погрешности метода конечных элементов, с которым тесно связаны.

Так, в случае лагранжевой интерполяции оценка погрешности зависит от диаметра разбиения и синуса наибольшего угла триангуляции. При этом оценки ухудшаются, когда два угла стремятся к нулю. Здесь к настоящему моменту все выяснено благодаря работам Зламала, Ю. Н. Субботина, Жаме. Кроме того, Ю. Н. Субботин [2] показал неулучшаемость этих оценок на заданном классе. Неулучшаемость понимается в том смысле, что существует функция из заданного класса и существуют абсолютные положительные константы, не зависящие от триангуляции, такие, что для любого невырожденного треугольника справедливы оценки снизу.

Наиболее трудным является случай эрмитовой и биркгофовой интерполяции. Здесь некоторые результаты получены Д. О. Филлимоненковым, Ю. Н. Субботиным [3, 4], Н. В. Байдаковой [5, 6] и автором [7]–[10]. В работах [5, 7, 8] рассматриваются интерполяционные условия биркгофова типа для построения многочленов нечетных степеней $4k+1$ и $4k+3$, позволяющие заменить наименьший угол на наибольший для старших производных, но избавиться полностью от присутствия наименьшего угла в оценках погрешности производных не удается. В работах [4, 6] предложены два способа интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике, в оценках погрешности которых наименьший угол полностью заменяется на средний (наибольший).

В работе [10] предлагаются два способа интерполяции типа Биркгофа многочленами второй степени на треугольнике, оценки погрешности в одном из которых зависят только от наибольшей стороны треугольника и не зависят от угла. Показана неулучшаемость полученных оценок.

В настоящей работе предлагаются два способа интерполяции типа Биркгофа многочленами четвертой степени на треугольнике, оценки погрешности в которых зависят только от наибольшей стороны треугольника и не зависят от углов. Показана неулучшаемость полученных оценок. Отметим,что построенные кусочно–полиномиальные функции глобально не являются непрерывными. Подобные конечные элементы успешно использовались при решении задач о движении несжимаемой жидкости (уравнения Навье–Стокса). Например, использовались линейные по совокупности переменных полиномы, но с определящими параметрами не в вершинах треугольника, а в серединах его сторон, и это приводило к существенно лучшим результатам, так как при этом автоматически учитывалось трудное условие равенства нулю дивергенции.

§ 1. Постановка задачи

В силу локальности рассматриваемых интерполяционных условий, на которых интерполяционный многочлен четвертой степени будет определяться однозначно, ограничимся рассмотрением лишь одного треугольника. Пусть $\triangle$ — невырожденный треугольник в $\mathbb{R}^2$. При $i=1,2,3$ через a_i будем обозначать вершины треугольника $\triangle$, через n_i — единичную нормаль к стороне $[a_i, a_{i+1}]$, через b_i — середину стороны $[a_i, a_{i+1}]$, при этом полагают $a_4 = a_1$.

Далее без ограничения общности будем считать, что вершины $\triangle$ имеют следующие координаты: $a_1 = (b, 0)$, $a_2 = (-a, 0)$, $a_3 = (0, h)$, причем $0 < a \leqslant b$ и длина наибольшей стороны треугольника $\triangle$ равна $a+b = H$. Тогда середины сторон будут иметь координаты: $b_1 = \left(\dfrac{b-a}{2}, 0\right)$, $b_2 = \left(-\dfrac{a}{2}, \dfrac{h}{2}\right)$ и $b_3 = \left(\dfrac{b}{2}, \dfrac{h}{2}\right)$. Обозначим через $c_1 = \left(\dfrac{2b-a}{3}, 0\right)$ и $c_2 = \left(\dfrac{b-2a}{3}, 0\right)$ — точки, делящие наибольшую сторону на три части.

Обозначим через
$$D_\eta f(x,y) = \eta^{(1)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \eta^{(2)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$
производную по направлению $\eta = \left(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}\right)$, $\left(\eta^{(1)}\right)^2 + \left(\eta^{(2)}\right)^2 = 1$ и пусть
$$W^{s+1}M = \Big\{ f(x,y) : D^l_{\eta_1,\ldots,\eta_l} f(x,y) \in \mathbb{C}(\triangle) \quad (0 \leqslant l \leqslant s+1) \quad \text{и}$$
$$\forall\, (x,y) \in \triangle, \quad \forall\, \eta_1, \ldots, \eta_{s+1} \quad \left| D^{s+1}_{\eta_1,\ldots,\eta_{s+1}} f(x,y) \right| \leqslant M \Big\},$$
где $\mathbb{C}(\triangle)$ обозначает класс непрерывных функций на треугольнике $\triangle$.

Через $P_4(x,y) = P_4(f; x, y)$ будем обозначать многочлен, степень которого по совокупности переменных не превосходит четырех, удовлетворяющий следующим интерполяционным условиям:

$$f(a_i) = P_4(a_i) \quad (i = 1, 2); \tag{1}$$

$$\frac{\partial f(a_i)}{\partial x} = \frac{\partial P_4(a_i)}{\partial x} \quad (i = 1, 2); \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 f(a_i)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 P_4(a_i)}{\partial x^2} \quad (i = 2); \tag{3}$$

$$D^4_{n_1^4} f(b_1) = D^4_{n_1^4} P_4(b_1); \tag{4}$$

$$D^3_{n_1^3} f(c_i) = D^3_{n_1^3} P_4(c_i) \quad (i = 1, 2); \tag{5}$$

$$\frac{\partial f(a_i)}{\partial y}=\frac{\partial P_4(a_i)}{\partial y}\quad (i=3);\tag{6}$$

$$\frac{\partial^{k+2} f(a_3)}{\partial x^k\partial y^2}=\frac{\partial^{k+2} P_4(a_3)}{\partial x^k\partial y^2}\quad (k=0,1,2);\tag{7}$$

$$\frac{\partial^{k+1} f(a_3)}{\partial x^k\partial y}=\frac{\partial^{k+1} P_4(a_3)}{\partial x^k\partial y}\quad (k=1,2,3).\tag{8}$$

Положим $e(x,y)=f(x,y)-P_4(x,y)$; $\quad e_{i,j}(x,y)=\dfrac{\partial^{i+j}e(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}$; $\quad e_{i,j}=e_{i,j}(0,0)$.

§ 2. Оценки погрешности интерполяции

Получим оценки погрешности для предложенного способа интерполяции. По формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши имеем

$$\begin{aligned}e(x,y)=e_{0,0}+xe_{1,0}+\frac{x^2}{2!}e_{2,0}+\frac{x^3}{3!}e_{3,0}+\frac{x^4}{4!}e_{4,0}+y\left(e_{0,1}+xe_{1,1}+\frac{x^2}{2!}e_{2,1}+\frac{x^3}{3!}e_{3,1}\right)+\\+\frac{y^2}{2!}\left(e_{0,2}+xe_{1,2}+\frac{x^2}{2!}e_{2,2}\right)+\frac{y^3}{3!}\left(e_{0,3}+xe_{1,3}\right)+\frac{y^4}{4!}e_{0,4}+R(x,y),\end{aligned}\tag{9}$$

где $R(x,y)=\displaystyle\int_0^y\frac{(y-t)^4}{4!}\frac{\partial^5 f(0,t)}{\partial t^5}\,dt+\sum_{i=0}^{4}\frac{y^i}{i!}\int_0^x\frac{(x-u)^{4-i}}{(4-i)!}\frac{\partial^5 f(u,0)}{\partial u^{5-i}\partial y^i}\,du.$

Далее через K и k_{ij} будем обозначать положительные константы, не обязательно равные, не зависящие от функции f и геометрических характеристик треугольника.

Условия (1)–(2) при $i=1,2$ и (3) определяют одномерный многочлен Эрмита, используя остаточный член которого, получаем следующие оценки (см. [11, с. 91]):

$$|e_{0,0}|\leqslant k_{00}Ma^3b^2,\quad |e_{1,0}|\leqslant k_{10}Ma^2b^2,\quad |e_{2,0}|\leqslant k_{20}Mab^2,\quad |e_{3,0}|\leqslant k_{30}Mb^2,\quad |e_{4,0}|\leqslant k_{40}Mb.$$

Из условия (4) имеем $e_{0,4}\left(\dfrac{b-a}{2},0\right)=0$. Откуда $e_{0,4}=-\dfrac{\partial^4}{\partial y^4}R\left(\dfrac{b-a}{2},0\right)$, а значит,

$$|e_{0,4}|\leqslant k_{04}Mb.$$

Из условия (5) при $i=1,2$ получим:

$$\begin{cases}e_{0,3}+\dfrac{2b-a}{3}e_{1,3}=-\dfrac{\partial^3}{\partial y^3}R\left(\dfrac{2b-a}{3},0\right),\\ e_{0,3}+\dfrac{b-2a}{3}e_{1,3}=-\dfrac{\partial^3}{\partial y^3}R\left(\dfrac{b-2a}{3},0\right).\end{cases}$$

Откуда следует

$$\begin{aligned}e_{1,3}&=\frac{3}{b+a}\left[\frac{\partial^3}{\partial y^3}R\left(\frac{b-2a}{3},0\right)-\frac{\partial^3}{\partial y^3}R\left(\frac{2b-a}{3},0\right)\right],\\ e_{0,3}&=\frac{2b-a}{3}\frac{\partial^3}{\partial y^3}R\left(\frac{b-2a}{3},0\right)-\frac{b-2a}{3}\frac{\partial^3}{\partial y^3}R\left(\frac{2b-a}{3},0\right);\end{aligned}$$

здесь

$$|e_{0,3}|\leqslant k_{03}Mb^2,\quad |e_{1,3}|\leqslant k_{13}Mb.$$

Из условий (6) и (7) при $k=0$ получим:

$$\begin{cases} e_{0,1}+he_{0,2}+\dfrac{h^2}{2}e_{0,3}+\dfrac{h^3}{6}e_{0,4}=-\dfrac{\partial}{\partial y}R\left(0,h\right), \\ e_{0,2}+he_{0,3}+\dfrac{h^2}{2}e_{0,4}=-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}R\left(0,h\right). \end{cases}$$

Откуда

$$e_{0,2}=-he_{0,3}-\frac{h^2}{2}e_{0,4}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}R\left(0,h\right),$$
$$e_{0,1}=-he_{0,2}-\frac{h^2}{2}e_{0,3}-\frac{h^3}{6}e_{0,4}-\frac{\partial}{\partial y}R\left(0,h\right).$$

Далее, учитывая оценки, полученные выше для $e_{0,3}$ и $e_{0,4}$, имеем

$$|e_{0,2}|\leqslant k_{02}Mb^2h,\quad |e_{0,1}|\leqslant k_{01}Mb^2h^2.$$

Используя условия (8) при $k=1$ и (7) при $k=1$, получим:

$$\begin{cases} e_{1,1}+he_{1,2}+\dfrac{h^2}{2}e_{1,3}=-\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}R\left(0,h\right), \\ e_{1,2}+he_{1,3}=-\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}R\left(0,h\right). \end{cases}$$

Откуда

$$e_{1,2}=-he_{1,3}-\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}R\left(0,h\right),$$
$$e_{1,1}=-he_{1,2}-\frac{h^2}{2}e_{1,3}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}R\left(0,h\right).$$

Далее, учитывая оценку, полученную выше для $e_{1,3}$, имеем

$$|e_{1,2}|\leqslant k_{12}Mbh,\quad |e_{1,1}|\leqslant k_{11}Mbh^2.$$

Из условия (7) при $k=2$ получим:

$$e_{2,2}=-\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}R(0,h);$$

тогда

$$|e_{2,2}|\leqslant k_{22}Mh.$$

Используя условие (8) при $k=2$, имеем:

$$e_{2,1}=-he_{2,2}-\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}R(0,h);$$

откуда

$$|e_{2,1}|\leqslant k_{21}Mh^2.$$

Из условия (8) при $k=3$ получим:

$$e_{3,1}=-\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y}R(0,h);$$

тогда

$$|e_{3,1}|\leqslant k_{31}Mh.$$

Подставляя оценки для $e_{i,j}$ в разложение Тейлора (9) и вычисляя частные производные с первого по четвертый порядок по переменным x и y, получим справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Существуют такие абсолютные положительные константы $C_{i,j}$, что для любой функции $f \in W^5M$ и любого невырожденного треугольника $\triangle$ и для интерполяционного многочлена $P_4(x,y)$, заданного условиями (1)–(8), имеют место следующие оценки:*

$$\left\|\frac{\partial^s e(x,y)}{\partial x^{s-j}\partial y^j}\right\|_{\mathbb{C}(\triangle)} \leqslant C_{s-j,j}MH^{5-s} \quad (0 \leqslant j \leqslant 4, \quad j \leqslant s \leqslant 4). \tag{10}$$

Замечание 1. Если в условии (3) вместо $i = 2$ взять $i = 1$, то изменятся только оценки $e_{j,0}$:

$$|e_{0,0}| \leqslant k_{00}Ma^2b^3, \quad |e_{1,0}| \leqslant k_{10}Mab^3, \quad |e_{2,0}| \leqslant k_{20}Mb^3, \quad |e_{3,0}| \leqslant k_{30}Mb^2, \quad |e_{4,0}| \leqslant k_{40}Mb,$$

а остальные выкладки останутся без изменений. Следовательно, будут справедливы и оценки (10).

Замечание 2. Оценки, аналогичные (10), будут иметь место, если вместо условия (3) рассмотреть условие

$$f(c) = P_4(c), \tag{11}$$

где c— произвольная точка на наибольшей стороне, исключая вершины (например, можно взять точки b_1, c_1 или c_2).

Рассмотрим еще один способ интерполяции функции двух переменных многочленами четвертой степени по совокупности двух переменных на треугольнике.

Вместо условий интерполяции (8) при $k = 2, 3$ возьмем условие (6) не только при $i = 3$, но и при $i = 1, 2$, то есть имеем

$$\frac{\partial f(a_i)}{\partial y} = \frac{\partial P_4(a_i)}{\partial y} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{12}$$

а остальные условия оставим без изменений. Тогда получаются оценки, аналогичные (10).

Покажем это. Заметим, что все выкладки до оценки $|e_{2,2}|$ включительно остаются справедливыми. Два условия (12) при $i = 1, 2$ эквивалентны системе

$$\begin{cases} \dfrac{a^2}{2}e_{2,1} - \dfrac{a^3}{6}e_{3,1} = D_1, \quad \text{где } D_1 = -e_{0,1} + ae_{1,1} - \dfrac{\partial}{\partial y}R\left(-a, 0\right), \\ \dfrac{b^2}{2}e_{2,1} + \dfrac{b^3}{6}e_{3,1} = D_2, \quad \text{где } D_2 = -e_{0,1} - be_{1,1} - \dfrac{\partial}{\partial y}R\left(b, 0\right), \end{cases}$$

причем $|D_1| \leqslant KMa^4 + KMb^2h^2, \quad |D_2| \leqslant KMb^4$. Откуда, решая систему, получим:

$$e_{2,1} = \frac{12}{a^2b^2(b+a)}\left(\frac{b^3}{6}D_1 + \frac{a^3}{6}D_2\right), \quad e_{3,1} = \frac{12}{a^2b^2(b+a)}\left(-\frac{b^2}{2}D_1 + \frac{a^2}{2}D_2\right);$$

$$|e_{2,1}| \leqslant k_{21}M\left(ab + \frac{b^2h^2}{a^2}\right), \quad |e_{3,1}| \leqslant k_{31}Mb.$$

Подставляя оценки для $e_{i,j}$ в разложение Тейлора (9), получим оценки (10). Таким образом, результат можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 2. *Существуют такие абсолютные положительные константы $C_{i,j}$, что для любой функции $f \in W^5M$ и любого невырожденного треугольника $\triangle$ и для интерполяционного многочлена $P_4(x,y)$, заданного условиями (1)–(5), (7), (12) и (8) при $k = 1$, имеют место следующие оценки:*

$$\left\|\frac{\partial^s e(x,y)}{\partial x^{s-j}\partial y^j}\right\|_{\mathbb{C}(\triangle)} \leqslant C_{s-j,j}MH^{5-s} \quad (0 \leqslant j \leqslant 4, \quad j \leqslant s \leqslant 4).$$

§ 3. Неулучшаемость оценок

В этом параграфе покажем, что для рассмотренных способов интерполяции существуют такие константы $C^*_{i,j} > 0$ и функция $f^* \in W^5M$, что для $e(x,y) = f^*(x,y) - P_4(f^*;x,y)$ справедливы следующие неравенства:

$$\left\|\frac{\partial^s e(x,y)}{\partial x^{s-j}\partial y^j}\right\|_{\mathbb{C}(\triangle)} \geqslant C^*_{s-j,j}MH^{5-s} \quad (0 \leqslant j \leqslant 4, \quad j \leqslant s \leqslant 4). \tag{13}$$

Рассмотрим равнобедренный треугольник, положив $a = b = \dfrac{H}{2}$. В качестве функции для первого способа, определяемого интерполяционными условиями (1)–(8), возьмем

$$f^*_1(x,y) = M(b-x)^2(b+x)^3 + M(b+x)xy^3 + M(b-x)y^4 \tag{14}$$

и построим соответствующий интерполяционный многочлен

$$P_4(f^*_1;x,y) = p_{0,0} + p_{1,0}x + p_{2,0}x^2 + p_{3,0}x^3 + p_{4,0}x^4 + p_{0,1}y + p_{1,1}xy + p_{2,1}x^2y + p_{3,1}x^3y+$$

$$+p_{0,2}y^2 + p_{1,2}xy^2 + p_{2,2}x^2y^2 + p_{0,3}y^3 + p_{1,3}xy^3 + p_{0,4}y^4.$$

Коэффициенты $p_{i,j}$ найдем из условий интерполяции.

Из условий (1)–(2) при $i = 1,2$ и (3) имеем: однородную систему

$$\begin{cases} p_{0,0} + bp_{1,0} + b^2p_{2,0} + b^3p_{3,0} + b^4p_{4,0} = 0,\\ p_{0,0} - bp_{1,0} + b^2p_{2,0} - b^3p_{3,0} + b^4p_{4,0} = 0,\\ p_{1,0} + 2bp_{2,0} + 3b^2p_{3,0} + 4b^3p_{4,0} = 0,\\ p_{1,0} - 2bp_{2,0} + 3b^2p_{3,0} - 4b^3p_{4,0} = 0,\\ 2p_{2,0} - 6bp_{3,0} + 12b^2p_{4,0} = 0. \end{cases}$$

Определитель данной системы $\Delta = 64b^6$ отличен от нуля, следовательно, система имеет только нулевое решение:

$$p_{0,0} = p_{1,0} = p_{2,0} = p_{3,0} = p_{4,0} = 0. \tag{15}$$

Из условия (4), учитывая, что $b_1 = \dfrac{b-a}{2} = 0$, имеем:

$$p_{0,4} = Mb. \tag{16}$$

Из условия (5) при $i = 1,2$ получим:

$$\begin{cases} p_{0,3} + \dfrac{b}{3}p_{1,3} = \dfrac{4}{9}Mb^2,\\[2ex] p_{0,3} - \dfrac{b}{3}p_{1,3} = -\dfrac{2}{9}Mb^2. \end{cases}$$

Откуда следует

$$p_{0,3} = \frac{1}{9}Mb^2, \quad p_{1,3} = Mb. \tag{17}$$

Из условий (6) и (7) при $k = 0$ получим:

$$\begin{cases} p_{0,1} + 2hp_{0,2} + 3h^2p_{0,3} + 4h^3p_{0,4} = 4Mbh^3,\\ 2p_{0,2} + 6hp_{0,3} + 12h^2p_{0,4} = 12Mbh^2. \end{cases}$$

Откуда, учитывая (16)–(17), получаем:

$$p_{0,2} = -\frac{1}{3}Mb^2h, \quad p_{0,1} = \frac{1}{3}Mb^2h^2.$$

Используя условия (8) при $k = 1$ и (7) при $k = 1$, получим:

$$\begin{cases} p_{1,1} + 2hp_{1,2} + 3h^2p_{1,3} = 3Mbh^2 - 4Mh^3, \\ 2p_{1,2} + 6hp_{1,3} = 6Mbh - 12Mh^2. \end{cases}$$

Откуда, учитывая (17), имеем:

$$p_{1,2} = -6Mh^2, \quad p_{1,1} = 8Mh^3.$$

Из условия (7) при $k = 2$ получим:

$$p_{2,2} = 3Mh. \tag{18}$$

Используя условие (8) при $k = 2$, имеем:

$$2p_{2,1} + 4hp_{2,2} = 6Mh^2;$$

откуда, подставляя (18),

$$p_{2,1} = -3Mh^2.$$

Из условия (8) при $k = 3$ получим:

$$p_{3,1} = 0.$$

Подставим найденные коэффициенты в $P_4(f_1^*; x, y)$ и оценим значение функции $e(x, y)$ и её частных производных.

$$\|e(x,y)\| \geqslant |e\,(0,0)| = Mb^5 = \frac{1}{32}MH^5,$$
$$\left\|\frac{\partial e(x,y)}{\partial x}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial e}{\partial x}\,(0,0)\right| = Mb^4 = \frac{1}{16}MH^4,$$
$$\left\|\frac{\partial^2 e(x,y)}{\partial x^2}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}\,(0,0)\right| = 4Mb^3 = \frac{1}{2}MH^3,$$
$$\left\|\frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial x^3}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^3 e}{\partial x^3}\,(0,0)\right| = 12Mb^2 = 3MH^2,$$
$$\left\|\frac{\partial^4 e(x,y)}{\partial x^4}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^4 e}{\partial x^4}\,(0,0)\right| = 24Mb = 12MH,$$
$$\left\|\frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial y^3}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^3 e}{\partial y^3}\,(0,0)\right| = \frac{2}{3}Mb^2 = \frac{1}{6}MH^2,$$
$$\left\|\frac{\partial^4 e(x,y)}{\partial x \partial y^3}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^4 e}{\partial x \partial y^3}\left(\frac{b}{2}, 0\right)\right| = 6Mb = 3MH,$$
$$\left\|\frac{\partial^4 e(x,y)}{\partial y^4}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^4 e}{\partial y^4}\left(\frac{b}{2}, y\right)\right| = 12Mb = 6MH.$$

Заметим, что здесь отсутствуют оценки для $\left\|\dfrac{\partial^{k+1} e(x,y)}{\partial x^k \partial y}\right\|$ при $k = 0, 1, 2, 3$ и $\left\|\dfrac{\partial^{k+2} e(x,y)}{\partial x^k \partial y^2}\right\|$ при $k = 0, 1, 2$. Чтобы их получить, рассмотрим другую функцию:

$$f_2^*(x,y) = M(b-x)^2(b+x)^3 + M(b+x)^4y + M(b+x)^3y^2 \tag{19}$$

и построим соответствующий интерполяционный многочлен $P_4(f_2^*; x, y)$. Условия (1)–(3) и первое слагаемое функции $f_2^*(x, y)$, такое же как у функции $f_1^*(x, y)$, гарантируют нам выполнение (15).

Из условия (4) имеем

$$p_{0,4} = 0.$$

Из условия (5) при $i = 1, 2$ получим:

$$\begin{cases} p_{0,3} + \dfrac{b}{3} p_{1,3} = 0, \\ \\ p_{0,3} - \dfrac{b}{3} p_{1,3} = 0. \end{cases}$$

Откуда следует:

$$p_{0,3} = 0, \quad p_{1,3} = 0.$$

Из условий (6) и (7) при $k = 0$ получим:

$$\begin{cases} p_{0,1} + 2hp_{0,2} + 3h^2 p_{0,3} + 4h^3 p_{0,4} = Mb^4 + 2Mb^3 h, \\ 2p_{0,2} + 6hp_{0,3} + 12h^2 p_{0,4} = 2Mb^3. \end{cases}$$

Откуда, учитывая $p_{0,3} = p_{0,4} = 0$, получаем:

$$p_{0,2} = Mb^3, \quad p_{0,1} = Mb^4.$$

Используя условия (8) при $k = 1$ и (7) при $k = 1$, получим:

$$\begin{cases} p_{1,1} + 2hp_{1,2} + 3h^2 p_{1,3} = 4Mb^3 + 6Mb^2 h, \\ 2p_{1,2} + 6hp_{1,3} = 6Mb^2. \end{cases}$$

Откуда, учитывая $p_{1,3} = 0$, имеем:

$$p_{1,2} = 3Mb^2, \quad p_{1,1} = 4Mb^3.$$

Из условия (7) при $k = 2$ получим:

$$p_{2,2} = 3Mb.$$

Используя условие (8) при $k = 2$, имеем:

$$2p_{2,1} + 4hp_{2,2} = 12Mb^2 + 12Mbh;$$

откуда, подставляя значение $p_{2,2} = 3Mb$, получим:

$$p_{2,1} = 6Mb^2.$$

Из условия (8) при $k = 3$ получим:

$$p_{3,1} = 4Mb + 2Mh.$$

Подставим найденные коэффициенты в $P_4(f_2^*; x, y)$ и оценим недостающие значения частных производных функции $e(x, y)$. Итак,

$$\left\| \frac{\partial e(x,y)}{\partial y} \right\| \geqslant \left| \frac{\partial e}{\partial y} \left(-\frac{b}{2}, 0 \right) \right| = M \left| \frac{1}{16} b^4 + \frac{1}{4} b^3 h \right| > \frac{1}{16} Mb^4 = \frac{1}{256} MH^4,$$

$$\left\|\frac{\partial^2 e(x,y)}{\partial x\partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^2 e}{\partial x\partial y}\left(-\frac{3}{4}b,0\right)\right| = M\left|\frac{27}{16}b^3+\frac{27}{8}b^2h\right| > \frac{27}{16}Mb^3 = \frac{27}{128}MH^3,$$

$$\left\|\frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial x^2\partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^3 e}{\partial x^2\partial y}\left(-\frac{b}{2},y\right)\right| = M\left|3b^2+6bh\right| > 3Mb^2 = \frac{3}{4}MH^2,$$

$$\left\|\frac{\partial^4 e(x,y)}{\partial x^3\partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^4 e}{\partial x^3\partial y}\left(-\frac{b}{2},y\right)\right| = M\left|12b+12h\right| > 12Mb = 6MH,$$

$$\left\|\frac{\partial^2 e(x,y)}{\partial y^2}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^2 e}{\partial y^2}\left(-\frac{3}{4}b,y\right)\right| = \frac{1}{4}Mb^3 = \frac{1}{32}MH^3,$$

$$\left\|\frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial x\partial y^2}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^3 e}{\partial x\partial y^2}\left(-\frac{b}{2},y\right)\right| = \frac{3}{2}Mb^2 = \frac{3}{8}MH^2,$$

$$\left\|\frac{\partial^4 e(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^4 e}{\partial x^2\partial y^2}\left(\frac{b}{2},y\right)\right| = 6Mb = 3MH.$$

Объединяя полученные результаты, видим, что оценки снизу имеют вид (13) и совпадают с оценками сверху.

Получим оценки снизу для случая интерполяции, заданного условиями (1)–(5), (7), (12) и (8) при $k=1$. В качестве функций, на которых достигаются оценки, будем рассматривать те же самые функции вида (14) и (19). Тогда все выкладки до равенства (18) сохраняются.

Из условия (12) при $i=1,2$ имеем эквивалентную систему:

$$\begin{cases} p_{0,1}+bp_{1,1}+b^2p_{2,1}+b^3p_{3,1}=0,\\ p_{0,1}-bp_{1,1}+b^2p_{2,1}-b^3p_{3,1}=0. \end{cases}$$

Откуда, подставляя найденные значения $p_{0,1}$, $p_{1,1}$ для каждой функции $f_i^*(x,y)$ $(i=1,2)$ и решая систему, получим:
в случае функции $f_1^*(x,y)$

$$p_{2,1}=-\frac{1}{3}Mh^2,\quad p_{3,1}=-8M\frac{h^3}{b^2};$$

в случае функции $f_2^*(x,y)$

$$p_{2,1}=7Mb^2,\quad p_{3,1}=4Mb.$$

Тогда оценки для $\left\|\dfrac{\partial^k e(x,y)}{\partial x^k}\right\|$ при $k=0,1,2,3,4$; $\left\|\dfrac{\partial^{k+3} e(x,y)}{\partial x^k\partial y^3}\right\|$ при $k=0,1$; и $\left\|\dfrac{\partial^4 e(x,y)}{\partial y^4}\right\|$ в случае функции $f_1^*(x,y)$ аналогичны первому способу интерполяции. В случае функции $f_2^*(x,y)$ осталось получить оценки $\left\|\dfrac{\partial^{k+1} e(x,y)}{\partial x^k\partial y}\right\|$ при $k=0,1,2,3$ и $\left\|\dfrac{\partial^{k+2} e(x,y)}{\partial x^k\partial y^2}\right\|$ при $k=0,1,2$.

$$\left\|\frac{\partial e(x,y)}{\partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial e}{\partial y}\left(-\frac{b}{2},0\right)\right| = \frac{5}{16}Mb^4 = \frac{5}{256}MH^4,$$

$$\left\|\frac{\partial^2 e(x,y)}{\partial x\partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^2 e}{\partial x\partial y}\left(-\frac{b}{2},0\right)\right| = \frac{1}{2}Mb^3 = \frac{1}{16}MH^3,$$

$$\left\|\frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial x^2\partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^3 e}{\partial x^2\partial y}\left(\frac{b}{2},0\right)\right| = Mb^2 = \frac{1}{4}MH^2,$$

$$\left\|\frac{\partial^4 e(x,y)}{\partial x^3\partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^4 e}{\partial x^3\partial y}\left(\frac{b}{2},y\right)\right| = 12Mb = 6MH,$$

$$\left\|\frac{\partial^2 e(x,y)}{\partial y^2}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^2 e}{\partial y^2}\left(\frac{b}{2},y\right)\right| = \frac{1}{4}Mb^3 = \frac{1}{32}MH^3,$$

$$\left\|\frac{\partial^3 e(x,y)}{\partial x\partial y^2}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^3 e}{\partial x\partial y^2}\left(\frac{b}{2},y\right)\right| = \frac{3}{2}Mb^2 = \frac{3}{8}MH^2,$$

$$\left\| \frac{\partial^4 e(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} \right\| \geqslant \left| \frac{\partial^4 e}{\partial x^2 \partial y^2} \left(\frac{b}{2}, y \right) \right| = 6Mb = 3MH.$$

А значит, оценки снизу для второго способа интерполяции получены полностью и они также совпадают с оценками сверху.

§ 4. Основной результат

Результаты, полученные в параграфах 2 и 3, можно объединить и сформулировать в виде следующих теорем.

Теорема 3. *Существуют такие абсолютные положительные константы* $C_{i,j}$, *что для любой функции* $f \in W^5 M$ *и любого невырожденного треугольника* $\triangle$ *и для интерполяционного многочлена* $P_4(x,y)$, *заданного условиями* (1)–(8), *имеют место следующие оценки:*

$$\left\| \frac{\partial^s e(x,y)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} \right\|_{\mathbb{C}(\triangle)} \leqslant C_{s-j,j} M H^{5-s} \quad (0 \leqslant j \leqslant 4, \quad j \leqslant s \leqslant 4).$$

На всем классе $W^5 M$ *оценки с точностью до абсолютных констант неулучшаемы.*

Теорема 4. *Существуют такие абсолютные положительные константы* $C_{i,j}$, *что для любой функции* $f \in W^5 M$ *и любого невырожденного треугольника* $\triangle$ *и для интерполяционного многочлена* $P_4(x,y)$, *заданного условиями* (1)–(5), (7), (12) *и* (8) *при* $k = 1$, *имеют место следующие оценки:*

$$\left\| \frac{\partial^s e(x,y)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} \right\|_{\mathbb{C}(\triangle)} \leqslant C_{s-j,j} M H^{5-s} \quad (0 \leqslant j \leqslant 4, \quad j \leqslant s \leqslant 4).$$

На всем классе $W^5 M$ *оценки с точностью до абсолютных констант неулучшаемы.*

Замечание 3. Если в условии (3) вместо $i = 2$ взято $i = 1$, то подправив первое слагаемое функций $f_1^*(x,y)$ и $f_2^*(x,y)$ следующим образом

$$f_3^*(x,y) = M(b-x)^3(b+x)^2 + M(b+x)xy^3 + M(b-x)y^4$$

и

$$f_4^*(x,y) = M(b-x)^3(b+x)^2 + M(b+x)^4 y + M(b+x)^3 y^2,$$

и повторяя выкладки, получим оценки снизу, совпадающие с оценками сверху (10). Таким образом, для интерполяционного многочлена $P_4(x,y)$, заданного условиями (1)–(2), (4)–(8) и (3) при $i = 1$, на всем классе $W^5 M$ оценки с точностью до абсолютных констант неулучшаемы.

Замечание 4. Если вместо условия (3) рассмотреть условие (11), где c— произвольная точка на наибольшей стороне, исключая вершины, и подправить первое слагаемое функций $f_1^*(x,y)$ и $f_2^*(x,y)$, рассматривая функции

$$f_5^*(x,y) = M(b-x)^2(b+x)^2(x-c) + M(b+x)xy^3 + M(b-x)y^4$$

и

$$f_6^*(x,y) = M(b-x)^2(b+x)^2(x-c) + M(b+x)^4 y + M(b+x)^3 y^2,$$

то, повторяя выкладки, получим оценки снизу, совпадающие с оценками сверху (10). Таким образом, для интерполяционного многочлена $P_4(x,y)$, заданного условиями (1)–(2), (4)–(8) и (11), на всем классе $W^5 M$ оценки с точностью до абсолютных констант неулучшаемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ciarlet P. G., Raviart P. A. General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods // Arch. Rat. Mech. and Anal. 1972. Vol. 46, № 3. P. 177–199.

2. Субботин Ю. Н. Многомерная кратная полиномиальная интерполяция // Методы аппроксимации и интерполяции: сб. Новосибирск. 1981. С. 148–152.

3. Субботин Ю. Н. Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометрических характеристик треугольника // Тр. ИММ УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 110–119.

4. Subbotin Yu. N. A New Cubic Element in the FEM // Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics. 2005. Suppl. 2. P. S176–S187.

5. Baidakova N. V. On some interpolation process by polynomials of degree $4m + 1$ on the triangle // Russian Journal of numerical analysis and mathematical modelling. 1999. Vol. 14, № 2. P. 87–107.

6. Baidakova N. V. A Method of Hermite interpolation by polynomials of the third degree on a triangle // Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics. 2005. Suppl. 2. P. S49–S55.

7. Латыпова Н. В. Погрешность аппроксимации многочленами степени $4k + 3$ на треугольнике // Труды Международной школы С. Б. Стечкина по теории функций: сб. Екатеринбург УрО РАН. 1999. С. 128–137.

8. Latypova N. V. Error estimates of approximation by polynomials of degree $4k + 3$ on the triangle // Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics. 2002. Suppl. 1. P. S190–S213.

9. Латыпова Н. В. Погрешность кусочно–кубической интерполяции на треугольнике // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2003. С. 3–18.

10. Латыпова Н. В. Погрешность кусочно–параболической интерполяции на треугольнике // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 3. С. 91–97.

11. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1: учебник для вузов. М.: Физматгиз, 1962. 464 с.

Поступила в редакцию 25.02.11

N. V. Latypova

Independence of interpolation error estimates by fourth-degree polynomials on angles in a triangle

The paper considers two methods of Birkhoff-type triangle-based interpolation of two-variable function by fourth-degree polynomials for the finite element method. The error estimates for the given elements depend only on the decomposition diameter, and do not depend on triangulation angles. We show that the estimates obtained are unimprovable.

Keywords: error of interpolation, piecewise polynomial function, triangulation, finite element method.

Mathematical Subject Classifications: 41A05

Латыпова Наталья Владимировна, к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4).
E-mail: nlatypova@udm.ru

Latypova Natal'ya Vladimirovna, candidate of physics and mathematics, associate professor, department of mathematical analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1 (build. 4), Izhevsk, 426034, Russia.