МАТЕМАТИКА 2011. Вып. 3

УДК 517.982.272, 515.122.55

© *А. В. Осипов, Д. А. Косолобов*

О СЕКВЕНЦИАЛЬНО-КОМПАКТНО-ОТКРЫТОЙ ТОПОЛОГИИ[1]

Исследуется секвенциально-компактно-открытая топология на множестве всех непрерывных вещественнозначных функций $C(X)$, определенных на тихоновском пространстве X. Изучаются основные свойства этой топологии и отношения с хорошо известными множественно-открытыми топологиями.

Ключевые слова: пространство непрерывных функций, множественно-открытая топология, компактно-открытая топология, секвенциально компактное подмножество, топология равномерной сходимости.

Введение

На множестве всех непрерывных вещественнозначных функций $C(X)$, определенных на тихоновском пространстве X, можно рассматривать достаточно много различных топологий. Одним из общих методов определения топологии на $C(X)$ является метод определения компактно-открытой топологии, предложенный Р. Фоксом (см. [6]). Предбазу такой топологии образуют все множества вида $\{f \in C(X) : \ f(F) \subset U\}$, где F — компактное подмножество пространства X, а U — открытое подмножество числовой прямой. Заметим, что топология поточечной сходимости может быть определена похожим образом: заменой в определении предбазы компактных подмножеств конечными. Естественным обобщением компактно-открытой топологии является множественно-открытая топология. Множественно-открытая топология на семействе λ, непустых подмножеств пространства X, была впервые введена Р. Аренсом и Ж. Дугунджи [1]. Предбазу такой топологии образуют все множества вида $\{f \in C(X) : \ f(F) \subset U\}$, где $F \in \lambda$, а U — открытое подмножество числовой прямой. Топологическое пространство $C(X)$ с множественно-открытой топологией на семействе λ будем обозначать $C_\lambda(X)$.

Из определения множественно-открытой топологии следует, что её свойства зависят от выбранного семейства λ. Так, если в качестве семейства λ взять, например, все конечные, компактные или псевдокомпактные подмножества X, то мы получим достаточно классические топологии: топологию поточечной сходимости, компактно-открытую топологию и псевдокомпактно-открытую топологию соответственно. Эти топологии активно изучаются и находят свое приложение в теории меры и функциональном анализе. Конечно, если выбрать семейство λ произвольно, то топологическое пространство $C_\lambda(X)$ может обладать достаточно слабыми свойствами, например, не быть регулярным или даже хаусдорфовым. Особый интерес с точки зрения приложений возникает тогда, когда $C_\lambda(X)$ является локально выпуклым топологическим векторным пространством (ТВП). В связи с этим выделяются различные «хорошие» семейства λ подмножеств X, которые определяют локально выпуклые ТВП на множестве $C(X)$ (см. [4]). Например, к таким «хорошим» семействам λ относится семейство всех компактных (конечных, метризуемых компактных, счетно компактных, псевдокомпактных, C-компактных) подмножеств пространства X.

В данной работе мы исследуем множественно-открытую топологию на $C(X)$, определяемую семейством λ — всех секвенциально компактных подмножеств пространства X.

Все пространства, рассматриваемые в работе, будем предполагать тихоновскими. Если X и Y — топологические пространства, то запись $X \geqslant Y$ ($X > Y$, $X = Y$) означает, что X и Y совпадают как множества, и топология на X сильнее или равна (строго сильнее, равна) топологии на Y. Символ $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ обозначают множество вещественных и натуральных чисел

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00139-а), программы Отделения математических наук РАН.

соответственно. Функцию, тождественно равную нулю, будем обозначать f_0. Замыкание множества A будем обозначать как $\overline{A}$, символом $\emptyset$ обозначаем пустое множество. Если $A \subset X$, а $f \in C(X)$, то через $f|_A$ обозначаем сужение функции f на множество A. Как обычно, $f(A)$ и $f^{-1}(A)$ — это соответственно образ и полный прообраз множества A при отображении f. Через $[A]^\gamma$ будем обозначать множество всех подмножеств A мощности γ. Символом D обозначим дискретное двоеточие. Через $[A, U]$ обозначим множество $\{f \in C(X)\colon f(A) \subset U\}$. Остальные обозначения можно найти в [7].

§ 1. Секвенциально компактные множества

Напомним, что топологическое пространство X называется секвенциально компактным, если каждая последовательность точек в X содержит сходящуюся подпоследовательность. Очевидно, что каждое секвенциально компактное пространство счетно компактно. Обратная импликация неверна. Существуют даже не секвенциально компакные компакты (см. [7, пример 3.10.38]). Пространство X называется секвенциальным, если множество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда со всякой последовательностью оно содержит все ее пределы. Секвенциальная компактность и счетная компактность равносильны в классе секвенциальных T_1-пространств и, в частности, T_1-пространств с первой аксиомой счетности.

Пусть I отрезок $[0, 1]$. Известно, что $D^{\mathfrak{c}}$ является компактным, но не секвенциально компактным пространством (см. замечание [7, пример 3.10.38]). Отсюда следует, что $I^{\mathfrak{c}}$ не является секвенциально компактным.

Хорошо известен пример, показывающий, что даже в компактных пространствах замыкание секвенциально компактного подпространства не обязано быть секвенциально компактным.

Пример 1. Пусть S — Σ_{ω_1}-произведение отрезка I относительно точки, все координаты которой в $I^{\mathfrak{c}}$ равны 0.

Напомним, что множество A называют ограниченным (C-компактным) подмножеством в X, если для любой $f \in C(X)$ образ $f(A)$ ограничен (компактен) в $\mathbb{R}$.

Далее будут использоваться следующие обозначения подсемейств ограниченных подмножеств пространства X.

$F(X)$ — семейство всех конечных подмножеств X.

$MK(X)$ — семейство всех метризуемых компактных подмножеств X.

$K(X)$ — семейство всех компактных подмножеств X.

$SC(X)$ — семейство всех секвенциально компакных подмножеств X.

$CC(X)$ — семейство всех счетно-компактных подмножеств X.

$PS(X)$ — семейство всех псевдокомпактных подмножеств X.

$RC(X)$ — семейство всех C-компактных подмножеств X.

$B(X)$ — семейство всех ограниченных подмножеств X.

Заметим, что $F(X) \subset MK(X) \subset K(X) \subset CC(X) \subset PS(X) \subset RC(X) \subset B(X)$ и $F(X) \subset MK(X) \subset SC(X) \subset CC(X)$.

Соответствующие топологические пространства $C_\lambda(X)$ будем обозначать:

$C_p(X)$ при $\lambda = F(X)$ (топология поточечной сходимости);

$C_k(X)$ при $\lambda = MK(X)$ (топология равномерной сходимости на метризуемо компактных подмножествах);

$C_c(X)$ при $\lambda = K(X)$ (компактно-открытая топология);

$C_{sc}(X)$ при $\lambda = SC(X)$ (секвенциально-компактно-открытая топология);

$C_{cc}(X)$ при $\lambda = CC(X)$ (счетно-компактно-открытая топология);

$C_{ps}(X)$ при $\lambda = PS(X)$ (псевдокомпактно-открытая топология);

$C_{rc}(X)$ при $\lambda = RC(X)$ (C-компактно-открытая топология).

Пространство X называют субметризуемым, если существует уплотнение $f\colon X \to Y$, где Y метризуемое пространство.

Теорема 1. *Пусть X — субметризуемое пространство, и пусть A подмножество X. Тогда следующие условия эквивалентны:*
а) A — *компакт;*
б) A — *метризуемый компакт;*
в) A — *секвенциальный компакт;*
г) A — *счётно компактное подмножество;*
д) A — *псевдокомпакт;*
е) A — *C-компактное подмножество;*
ж) A — *замкнутое и ограниченное.*

Доказательство. Импликации б)⇒в)⇒г)⇒д)⇒е), б)⇒а) и а)⇒ж) следуют из определений.

Докажем а)⇒б). Пусть A — компактно. В силу субметризуемости X существует уплотнение X на метризуемое пространство Y, тогда сужение этого уплотнения на множество A является гомеоморфизмом. Отсюда из субметризуемости A следует, что A — метризуемо.

Докажем ж)⇒е). Предположим противное. Пусть A — ограниченное и замкнутое, но не C-компактное множество. Тогда существует функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ и последовательность $\{x_n\} \subset A$ такие, что $f(A) \subset [0,1)$ и $f(x_n) \to 1$. Пусть $h\colon X \to M$ — уплотнение X на метризуемое пространство M. Заметим, что $h(A)$ — ограниченное подмножество метризуемого пространства, и значит, $\overline{h(A)}$ — компактное подмножество M. Отсюда следует, что существуют подпоследовательность $\{x_k\}$ последовательности $\{x_n\}$ и $x_0 \in X$ такие, что $h(x_k) \to h(x_0)$. Зафиксируем открытые множества V и W такие, что $V \cap W = \emptyset$, $\{x_k\} \subset V$, $x_0 \in W$. Существует набор $\{\epsilon_k\}$, для которого $B(h(x_i),\epsilon_i) \cap B(h(x_j),\epsilon_j) = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\epsilon_i < \frac{1}{i}$. Обозначим $V_i = h^{-1}(B(h(x_i),\epsilon_i/2)) \cap V$. По V_i построим функцию $g_i\colon X \to \mathbb{R}$ такую, что $g_i(x_i) = i$, $g_i(X \setminus V_i) \subset \{0\}$, и покажем, что функция $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} g_i(x)$ является непрерывной. Для доказательства непрерывности g достаточно для каждого $x \in X$ найти окрестность U_x, пересекающуюся не более чем с одним множеством V_i. Если $x \in W$, то $U_x = W$. Если $x \in V_i$ для некоторого i, то $U_x = V_i$. Если $h(x) \in \overline{B}(h(x_i),\epsilon_i/2)$ для некоторого i, то $U_x = h^{-1}(B(h(x),\epsilon_i/2))$. Иначе, в качестве U_x положим множество вида $h^{-1}(B(h(x),\epsilon))$, где ϵ выбрано так, что $B(h(x),\epsilon) \cap B(h(x_i),\epsilon_i/2) = \emptyset$ для каждого i (легко показать, что такое ϵ существует). Так как g непрерывная неограниченная на A функция, то приходим к противоречию.

Докажем е)⇒а). Пусть $\tilde{f}\colon X \to Z$ — уплотнение X на метризуемое пространство Z. Ясно, что $Y = \tilde{f}(A)$ — C-компактно в Z. Сначала докажем, что Y — счётно компактно (а значит компактно, так как метризуемо). Пусть $\mathcal{U}$ — счётное семейство открытых множеств такое, что $\bigcup \mathcal{U} \supset Y$. Каждое открытое множество в Z функционально открыто, а значит (по теореме в [5]), существует конечное $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ такое, что $\bigcup \mathcal{V} \supset Y$. Пусть $f = \tilde{f}|_A$. Достаточно показать, что f — гомеоморфизм. Пусть $x \in V \cap A$, где V — открыто в X. Существует такое $g\colon X \to I$, что $g(x) = 0$, $g(X \setminus V) = \{1\}$. Рассмотрим $F = g^{-1}([\frac{1}{2},1])$ — функционально замкнутое множество. Ясно, что $x \notin F$ и $X \setminus V \subset F$. Множество $F \cap A$ — C-компактно как функционально замкнутое подмножество C-компактного множества (см. в [5]), а значит, его образ в Y — компакт, следовательно, $V_x = A \setminus F$ — открыто в A и $f(V_x)$ — открыто в Y. Значит, $f(V)$ — открыто в Y, так как $V = \bigcup\limits_{x \in V} V_x$. Таким образом, f — гомеоморфизм. □

Следствие 1. *Пусть X — субметризуемое секвенциально компактное пространство. Тогда X — метризуемый компакт.*

Заметим, что C-компактность пространства X в себе эквивалентна псевдокомпактности X. Из теоремы 1 получаем следующее

Следствие 2. *Пусть X — псевдокомпактное субметризуемое пространство. Тогда X — метризуемый компакт.*

§ 2. Секвенциально-компактно-открытая топология

Через $SC(X)$ будем обозначать множество всех секвенциально компактных подмножеств пространства X. Множество непрерывных вещественнозначных функций $C(X)$ с множественно-открытой топологией, порождённой семейством $SC(X)$, будем обозначать $C_{sc}(X)$. Предбазу такой топологии образуют все множества вида $\{f \in C(X)\colon\ f(F) \subset U\}$, где $F \in SC(X)$, а U — открытое подмножество числовой прямой. Порожденную таким образом топологию будем называть секвенциально-компактно-открытой и обозначать как sc-открытая топология.

Множество $C(X)$ с топологией равномерной сходимости на семействе $SC(X)$ будем обозначать как $C_{sc,u}(X)$. Для любого $f \in C(X)$, $A \in SC(X)$ и $\varepsilon > 0$ обозначим $\langle f, A, \varepsilon\rangle = \{g \in C(X) :\ |f(x) - g(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in A\}$. Тогда для любого $f \in C(X)$ семейство $\{\langle f, A, \varepsilon\rangle\colon\ A \in SC(X),\ \varepsilon > 0\}$ образует базу в точке f в пространстве $C_{sc,u}(X)$. Тем самым семейство $\{\langle f, A, \varepsilon\rangle\colon\ f \in C(X), A \in SC(X),\ \varepsilon > 0\}$ образует базу топологии равномерной сходимости на семействе $SC(X)$.

Теорема 2. *Для произвольного пространства X выполняется $C_{sc}(X) = C_{sc,u}(X)$.*

Доказательство. $C_{sc}(X) \leqslant C_{sc,u}(X)$. Пусть $A \subset X$ — секвенциально компактно, V — открыто в $\mathbb{R}$, и $f \in [A, V]$. Для каждого $a \in A$ существует $\varepsilon_a > 0$ такое, что $B(f(a), 2\varepsilon_a) \subset V$. Так как $f(A)$ является компактом в $\mathbb{R}$, то существует конечное множество $A' \subset A$ такое, что $\bigcup\limits_{a\in A'} B(f(a), \varepsilon_a) \supset f(A)$. Пусть $\varepsilon = \min\{\varepsilon_a : a \in A'\}$. Покажем, что для любого g из $\langle f, A, \varepsilon\rangle$ $g \in [A, V]$. Для каждого $x \in A$ существует $a \in A'$ такое, что $|f(x) - f(a)| < \varepsilon_a$. Теперь $|g(x) - f(a)| < 2\varepsilon_a$. Значит $g(x) \in V$, а следовательно, $g \in [A, V]$.

$C_{sc}(X) \geqslant C_{sc,u}(X)$. Пусть $A \subset X$ — секвенциально компактно, $\varepsilon > 0$ и $f \in C(X)$. Найдется конечное множество A' такое, что $f(A) \subset \bigcup\limits_{a\in A'} B(f(a), \frac{\varepsilon}{3})$. Для $a \in A'$ определим $A_a = A \cap f^{-1}(\overline{B}(f(a), \frac{\varepsilon}{3}))$ (секвенциальная компактность наследуется замкнутыми множествами). Пусть $W = \bigcap\limits_{a\in A'} [A_a, B(f(a), \frac{2\varepsilon}{3})]$. Ясно, что $f \in W$, так как $\overline{B}(f(a), \frac{\varepsilon}{3}) \subset B(f(a), \frac{2\varepsilon}{3})$. Пусть $g \in W$ и $x \in A$. Для некоторого $a \in A'$ $|f(a) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$, значит, $|g(x) - f(a)| < \frac{2\varepsilon}{3}$. Следовательно, $|g(x) - f(x)| \leqslant |g(x) - f(a)| + |f(a) - f(x)| < \varepsilon$. Таким образом, $g \in \langle f, A, \varepsilon\rangle$. □

Следствие 3. *Для произвольного пространства X выполняется $C_{sc}(X) \leqslant C_u(X)$.*

Семейство замыканий секвенциально компактных множеств будем обозначать как $\overline{SC}(X)$.

Теорема 3. *Для произвольного пространства X выполняется*
$C_{sc}(X) = C_{\overline{sc}}(X) = C_{sc,u}(X) = C_{\overline{sc},u}(X) \leqslant C_u(X)$.

Доказательство. Докажем, что $C_{sc}(X) = C_{\overline{sc}}(X)$. Пусть $A \in SC(X)$, а V — открыто в $\mathbb{R}$. Достаточно показать, что $[A, V] = [\overline{A}, V]$. Заметим, что $f(A) = \overline{f(A)}$. Очевидно, $[A, V] \supset [\overline{A}, V]$. Пусть $f \in [A, V]$, тогда $f(\overline{A}) \supset f(A) = \overline{f(A)}$. Из того, что $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ следует $f(\overline{A}) = f(A) \subset V$, и поэтому $f \in [\overline{A}, V]$. Значит, $[A, V] = [\overline{A}, V]$.

Докажем, что выполняется $C_{sc,u}(X) = C_{\overline{sc},u}(X)$. Так как $\langle f, A, \varepsilon\rangle \supset \langle f, \overline{A}, \varepsilon\rangle = U$, то $C_{sc,u}(X) \leqslant C_{\overline{sc},u}(X)$. Пусть теперь $\overline{A} \neq A$ и $\langle f, A, \frac{\varepsilon}{3}\rangle = V$. Рассмотрим $g \in V$ и $x \in \overline{A} \setminus A$. Пусть $a \in A \cap g^{-1}(B(g(x), \frac{\varepsilon}{3})) \cap f^{-1}(B(f(x), \frac{\varepsilon}{3}))$. Из того, что $|g(x) - f(x)| \leqslant |g(x) - g(a)| + |g(a) - f(a)| + |f(a) - f(x)| < \varepsilon$, следует, что $f \in V \subset U$. Значит, $C_{sc,u}(X) = C_{\overline{sc},u}(X)$. □

Следствие 4. *Пусть X секвенциально компактно, тогда $C_{sc}(X) = C_u(X)$.*

Если $C_{sc}(X) = C_u(X)$, то X может и не быть секвенциально компактным.

Пример 2. Тихоновский куб $X = I^{\mathfrak{c}}$ компактен, но не секвенциально компактен. Отсюда $C_c(X) = C_u(X)$ и, по теореме 3, $C_{sc}(X) \leqslant C_u(X)$. В X существует секвенциально компактное всюду плотное подмножество S (см. пример 1). Значит, по утверждению 3, выполняется $C_{sc,u}(X) = C_{\overline{sc},u}(X)$. Отсюда $C_{sc}(X) = C_u(X)$.

Теорема 4. *$C_{sc}(X) = C_u(X)$ тогда и только тогда, когда в X есть всюду плотное секвенциально компактное подмножество.*

Доказательство. Пусть $C_{sc}(X) = C_u(X)$. Существует конечное семейство секвенциально компактных множеств $\{S_i\}_{i=1}^n$ и семейство открытых в $\mathbb{R}$ множеств $\{U_i\}_{i=1}^n$, что $f_0 \in \bigcap_{i=1}^n [S_i, U_i] \subset \langle f_0, X, 1\rangle$. Очевидно, что $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$ — секвенциально компактное всюду плотное множество.

Пусть S секвенциально компактное всюду плотное множество. Тогда, по утверждению 3, $C_{sc}(X) = C_{\overline{sc}}(X)$, откуда следует $C_{sc}(X) = C_u(X)$. $\square$

Теорема 5. *Пусть $C^*(X)$ — множество ограниченных непрерывных функций. Тогда $\overline{C^*(X)} = C_{sc}(X)$.*

Доказательство. Пусть $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [A_i, V_i]$ открытое базисное подмножество пространства $C_{sc}(X)$, где A_i — секвенциально компактные подмножества X, а V_i — открытые подмножества в $\mathbb{R}$. Пусть $f \in U$ и $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. Найдется такой отрезок $[a, b]$, что $f(A) \subset [a, b]$ (так как A — секвенциально компактно). Определим непрерывную функцию $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ следующим образом: $h(x) = a$ при $x < a$, $h(x) = x$ при $a \leqslant x \leqslant b$, $h(x) = b$ при $x > b$. Функция $h \circ f \in C^*(X)$ и принадлежит U. $\square$

Пространство $C_{sc}(X)$ является хаусдорфовым, поскольку конечные множества в X являются секвенциально компактными. Так как $C_{sc}(X) = C_{sc,u}(X)$, то топология на $C_{sc}(X)$ порождается семейством полунорм $p_A(f) = \sup\{|f(x)|\colon x \in A\}$, где $A \in SC(X)$. Пусть $V_{A,\varepsilon} = \{f \in C(X)\colon p_A(f) < \varepsilon\}$. Множество $f + \{V_{A,\varepsilon}\colon A \in SC(X), \varepsilon > 0\}$ образует фундаментальную систему окрестностей в точке f. Отсюда заключаем, что $C_{sc}(X)$ является локально выпуклым ТВП.

§ 3. Взаимоотношения множественно-открытых топологий

Наряду с компактно-открытой топологией среди классических топологий можно выделить топологию поточечной сходимости, счетно-компактно-открытую, C-компактно-открытую, ограниченно-открытую, псевдокомпактно-открытую, метризуемо компактно-открытую топологию, а также топологию равномерной сходимости. В этом параграфе приводятся примеры пространств, на которых эти топологии отличаются, и исследуются отношения sc-открытой топологии к другим топологиям.

Отметим, что sc-топология $C_{sc}(X)$ может быть несравнимой с компактно-открытой топологией $C_c(X)$.

Пример 3. Пусть X — это множество всех счетных ординалов $\{\alpha : \alpha < \omega_1\}$ с порядковой топологией. Пространство X является секвенциально компактным, но не компактным пространством. Секвенциальная компактность следует из секвенциальности и счетной компактности пространства X.

Заметим, что $C_{sc}(X) > C_c(X)$. Действительно, пусть $f = f_0$ и $U = (-1, 1)$. Рассмотрим окрестность $[X, U]$ функции f. Предположим, что найдется семейство окрестностей $\{[A_i, U_i]\}_{i=1}^n$, где A_i — компакт, и $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} [A_i, U_i] \subset [X, U]$. Тогда $\exists \alpha < \omega_1$ такое, что $\forall \beta \in A_i\ \beta < \alpha$. Определим функцию g: $g(\beta) = 0$ при $\beta \leqslant \alpha$ и $g(\beta) = 1$ при $\beta > \alpha$. Тогда для функции g выполняется $g \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} [A_i, U_i]$, но $g \notin [A, U]$. Противоречие.

Отметим, что для пространства X справедливы следующие соотношения:

$C_p(X) < C_k(X) = C_c(X) < C_{sc}(X) = C_{cc}(X) = C_{ps}(X) = C_{rc}(X) = C_b(X) = C_u(X)$.

Пример 4. Пусть $Y = \beta\mathbb{N}$ — стоун-чеховская компактификация множества натуральных чисел с дискретной топологией. Заметим, что каждое секвенциально компактное подпространство пространства $\beta\mathbb{N}$ конечно, так как $\beta\mathbb{N}$ не содержит подпространств гомеоморфных пространству сходящейся последовательности (см. следствие 3.6.15 в [7]). Отсюда следует, что
$C_p(Y) = C_k(Y) = C_{sc}(Y) < C_c(Y) = C_{cc}(Y) = C_{ps}(Y) = C_{rc}(Y) = C_b(Y) = C_u(Y).$

Пример 5. Пусть $Z = X \oplus Y$ сумма топологических пространств X и Y, где X и Y пространства из примеров 3 и 4 соответственно. Тогда sc-открытая топология несравнима с компактно-открытой топологией на множестве $C(Z)$.

Если пространство X обладает свойством, что $\overline{SC}(X) = K(X)$, то ясно, что $C_c(X) = C_{sc}(X)$. Следующий пример показывает, что из равенства $C_c(X) = C_{sc}(X)$ не следует, что $\overline{SC}(X) = K(X)$.

Пример 6. Пусть $X = I^{\mathfrak{c}}$ — тихоновский куб веса $\mathfrak{c}$. Пространство X компактно и содержит всюду плотное секвенциально компактное подмножество (см. пример 1 из введения). Таким образом, $C_c(X) = C_{sc}(X) = C_u(X)$. Пусть $\beta\mathbb{N}$ — стоун-чеховская компактификация дискрета $\mathbb{N}$. Так как вес $\beta\mathbb{N}$ равен $\mathfrak{c}$, $\beta\mathbb{N}$ содержится в X. Осталось заметить, что в $\beta\mathbb{N}$ все секвенциально компактные подмножества конечны. Таким образом, $K(X) \not\subseteq \overline{SC}(X)$.

Отметим, что для пространства X справедливы следующие соотношения:
$C_p(X) < C_k(X) < C_c(X) = C_{sc}(X) = C_{cc}(X) = C_{ps}(X) = C_{rc}(X) = C_b(X) = C_u(X).$

Пример 7. Пусть $X = \omega_1 + 1$ — пространство всех ординалов меньших или равных первому несчетному ординалу ω_1 с порядковой топологией. Пространство X является компактным секвенциально компактным неметризуемым пространством. Отсюда следует, что $C_p(X) < C_k(X) < C_{sc}(X) = C_c(X) = C_{cc}(X) = C_{ps}(X) = C_{rc}(X) = C_b(X) = C_u(X).$

Построим пример счётно компактного пространства, каждое секвенциально компактное и каждое компактное подмножество которого конечно.

Пример 8. Пусть $K_0 = \mathbb{N}$. Индукцией по ω_1 будем строить подпространство пространства $\beta\mathbb{N}$. По $\alpha < \omega_1$ пусть построены множества $K_\beta \subset \beta\mathbb{N}$ для $\beta < \alpha$ и $|K_\beta| \leqslant \mathfrak{c}$. Тогда для каждого $A \in [\bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta]^\omega$ выберем x_A такое, что x_A является предельной точкой для A в $\beta\mathbb{N}$. Положим $K_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta \cup \{x_A \colon A \in [\bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta]^\omega\}$. Положим $M = \bigcup_{\alpha<\omega_1} K_\alpha$. Так как $|M| \leqslant \mathfrak{c}$ и каждый бесконечный компакт в $\beta\mathbb{N}$ имеет мощность $2^{\mathfrak{c}}$, то получаем, что M счётно компактное пространство, каждое секвенциально компактное и каждое компактное подмножество которого конечно. Таким образом справедливы следующие соотношения:
$C_p(M) = C_k(M) = C_{sc}(M) = C_c(M) < C_{cc}(M) = C_{ps}(M) = C_{rc}(M) = C_b(M) = C_u(M).$

Пример 9. Пусть E — несчётное максимальное почти дизъюнктное семейство подмножеств $\mathbb{N}$. Определим топологию на множестве $X = \Psi = E \cup \mathbb{N}$ следующим образом: пусть $\mathbb{N}$ будет дискретным открытым подмножеством, а окрестность $x \in E$ имеет вид $\{x\} \cup (x \setminus A)$, где A конечно. Построенное топологическое пространство называется пространством Мрувки–Исбела–Фролика. Отметим, что X псевдокомпактно, но не счётно компактно. Каждое компактное, секвенциально компактное и счётно компактное подмножество X имеет вид $\bigcup_{i=1}^n (\{x_i\} \cup (x_i \setminus S_i)) \cup S$, где $x_i \in E$, $|S_i| < \omega$, $|S| < \omega$. Таким образом, получаем следующие соотношения:
$C_p(X) < C_k(X) = C_{sc}(X) = C_c(X) = C_{cc}(X) < C_{ps}(X) = C_{rc}(X) = C_b(X) = C_u(X).$

Пример 10. Пусть $X = \beta\mathbb{N} \oplus (\omega_1 + 1) \oplus M \oplus \Psi$, где M и Ψ пространства из примеров 8 и 9. Тогда получаем следующие соотношения:
$C_p(X) < C_k(X) < C_{sc}(X) < C_c(X) < C_{cc}(X) < C_{ps}(X) = C_{rc}(X) = C_b(X) = C_u(X).$

Пример 11. Пусть $G = (\omega_1) \oplus M \oplus \Psi \oplus I^{\mathfrak{c}}$, где M и Ψ пространства из примеров 8 и 9. Тогда получаем следующие соотношения:
$C_p(G) < C_k(G) < C_c(G) < C_{sc}(G) < C_{cc}(G) < C_{ps}(G) = C_{rc}(G) = C_b(G) = C_u(G).$

Пример 12. (Плоскость Дьедонне). Пусть $X = [0,\omega_1] \times [0,\omega_0] \setminus \{(\omega_1,\omega_0)\}$. Топология τ порождена базой: открытой является каждая точка из множества $[0,\omega_1) \times [0,\omega_0)$, а также множества вида $U_\alpha(\beta) = \{(\beta,\gamma) : \alpha < \gamma \leqslant \omega_0\}$ и $V_\alpha(\beta) = \{(\gamma,\beta) : \alpha < \gamma \leqslant \omega_1\}$.

Пусть $A = \{(\omega_1, n) : 0 \leqslant n < \omega_0\}$. Возьмем произвольное C-компактное подмножество B пространства X. Так как для любого $\alpha < \omega_1$ множество $\{\alpha\} \times [0,\omega_0]$ открыто-замкнутое (и следовательно функционально открытое), то для любого $\beta \leqslant \omega_0$, множество $([0,\omega_1] \times \{\beta\}) \bigcap B$ состоит не более чем из конечного числа точек. Отсюда следует, что B — компактное подмножество X.

В [3] было доказано, что A является замкнутым ограниченным подмножеством X и $C_c(X) < C_b(X)$. Так как любое C-компактное подмножество X является компактным, то $C_{rc}(X) = C_c(X) < C_b(X)$.

Таким образом, существует пространство $C(X)$, у которого ограниченно-открытая топология строго сильнее, чем C-компактно-открытая.

Пример 13. Пусть $Y = [0,\omega_2] \times [0,\omega_1] \setminus \{(\omega_2,\omega_1)\}$, с топологией τ порождаемой базой: открытой является каждая точка из множества $[0,\omega_2)\times[0,\omega_1)$, а также множества вида $U_P(\beta) = \{(\beta,\gamma) : \gamma \in ([0,\omega_1] \setminus P)$, где P конечно $\}$ и $V_\alpha(\beta) = \{(\gamma,\beta) : \alpha < \gamma \leqslant \omega_2\}$.

Пусть $A = \{(\omega_2,\gamma) : 0 \leqslant \gamma < \omega_1\}$. Рассмотрим функцию $f \in C(Y)$. Предположим, что $f(A)$ не замкнутое, тогда существуют точка $c \in \overline{f(A)} \setminus f(A)$ и последовательность $\{a_n\} \subset A$ такие, что $\{f(a_n)\} \to c$. Так как $a_n = (\omega_2,\gamma_n)$, то по свойству ординалов существует α_n такое, что $f(\alpha,\gamma_n) = f(a_n)$ для всех $\alpha > \alpha_n$. Более того, существует β такое, что для любого $\gamma \in [0,\omega_1]$ и $\alpha \geqslant \beta$ $f(\alpha,\gamma) = f(\omega_2,\gamma)$. Ясно, что $f(\beta,\omega_1) = c$. Тогда существует δ, что для всех $\gamma \geq \delta$, $f(\beta,\gamma) = c$. Отсюда следует, что $f(\omega_2,\gamma) = c$, но $(\omega_2,\gamma) \in A$ и $c \notin f(A)$. Получили противоречие. Таким образом, A является C-компактным подмножеством Y.

Пусть B произвольное псевдокомпактное подмножество пространства Y. Так как для любого $\alpha < \omega_2$ множество $\{\alpha\} \times [0,\omega_1]$ открыто-замкнутое (и следовательно, функционально открытое), то для любого $\beta \leqslant \omega_1$, множество $([0,\omega_2]\times\{\beta\}) \bigcap B$ состоит не более чем из конечного числа точек. Отсюда следует, что B — компактное подмножество Y. Тем самым никакое псевдокомпактное подмножество Y не покрывает множество A. Таким образом, псевдокомпактно-открытая топология строго слабее C-компактно-открытой топологии на множестве $C(Y)$. Следовательно, $C_c(Y) = C_{ps}(Y) < C_{rc}(Y)$.

Пример 14. Пусть X и Y топологические пространства из примеров 12 и 13, а пространство G из примера 11. Рассмотрим прямую сумму этих пространств $Z = X \bigoplus Y \bigoplus G$. Тогда для полученного топологического пространства Z будет выполняться

$C_p(Z) < C_k(Z) < C_c(Z) < C_{sc}(Z) < C_{cc}(Z) < C_{ps}(Z) < C_{rc}(Z) < C_b(Z)$.

Замечание 1. *Пусть X — субметризуемое пространство, тогда $C_k(X) = C_c(X) = C_{sc}(X) = C_{cc}(X) = C_{ps}(X) = C_{rc}(X)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В субметризуемом пространстве класс всех секвенциально компактных (компактных, счетно компактных, C-компактных, псевдокомпактных) подмножеств X совпадает с классом всех метризуемых компактных подмножеств (см. теорему 1). □

§ 4. Некоторые кардинальнозначные характеристики

Сепарабельность пространства $C_{sc}(X)$ эквивалентна сепарабельности пространства $C_p(X)$.

Теорема 6. *Пусть λ — сеть, состоящая из C-компактных множеств. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) $C_p(X)$ — *сепарабельно;*

б) $C_c(X)$ — *сепарабельно;*

в) $C_\lambda(X)$ — *сепарабельно;*

г) X *уплотняется на сепарабельное метризуемое пространство;*

д) X *субметризуемо и* $d(X) \leqslant 2^\omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эквивалентность пунктов а), б), г), д) доказана в [2, теорема 2.1]. Пусть выполняется г). Тогда по теореме 1 λ состоит из метризуемых компактов. Следовательно, $C_\lambda(X) \leqslant C_c(X)$, а значит $d(C_\lambda(X)) \leqslant d(C_c(X)) \leqslant \omega$. Пусть выполнено в), то есть $C_\lambda(X)$ — сепарабельно. Из того, что $C_p(X) \leqslant C_\lambda(X)$ (так как λ — сеть) следует а). $\square$

Следствие 5. *Следующие утверждения эквивалентны:*
а) $C_p(X)$ — *сепарабельно;*
б) $C_k(X)$ — *сепарабельно;*
в) $C_{sc}(X)$ — *сепарабельно;*
г) $C_c(X)$ — *сепарабельно;*
д) $C_{cc}(X)$ — *сепарабельно;*
е) $C_{ps}(X)$ — *сепарабельно;*
ж) $C_{rc}(X)$ — *сепарабельно.*

Напомним, что пространство X имеет счётное число Суслина $c(X) = \omega$, если каждое дизъюнктное семейство непустых открытых множеств не более чем счётно. Отметим также, что если X — сепарабельное пространство и ординал $\mathfrak{m} \geqslant \omega$, то $c(X^{\mathfrak{m}}) = \omega$ (см. [7, следствие 2.3.18]).

Пространство $C_p(X)$ всегда обладает счетным числом Суслина.

Предложение 1. *Пусть X субметризуемо. Тогда $C_{sc}(X)$ имеет счетное число Суслина.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. $C_{sc}(X) \leqslant C_{ps}(X)$. Так как X субметризуемо, то пространство $C_{ps}(X)$ имеет счетное число Суслина (см. [2, теорема 2.17]). Отсюда следует, что $C_{sc}(X)$ также имеет счетное число Суслина. $\square$

Покажем, что обратное утверждение теоремы будет неверным.

Пример 15 (см. [2]). Пусть $F = \{a\} \cup A$, где A несчётное дискретное подпространство, а окрестностями точки a являются множества вида $\{a\} \cup (A \setminus C)$, где $C \subset A$ и C счётно. Заметим, что каждое компактное и секвенциально компактное подмножество в F конечно. Таким образом, получаем $C_p(F) = C_c(F) = C_{sc}(F)$. Следовательно, $C_{sc}(F)$ имеет счетное число Суслина, но пространство F не субметризуемое.

Предложение 2. *Пусть X — секвенциально компактно. Тогда следующие условия эквивалентны:*
а) $C_{sc}(X)$ *имеет счетное число Суслина;*
б) $C_{sc}(X)$ *сепарабельно;*
в) $C_{sc}(X)$ *обладает свойством Линделёфа;*
г) X — *метризуемый компакт.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как пространство X секвенциально компактно, то $C_{sc}(X) = C_u(X)$. Отсюда следует, что пространство $C_{sc}(X)$ метризуемо. В метризуемых пространствах свойства счетность числа Суслина, сепарабельность и линделёфовость совпадают. Эквивалентность условию г) следует из теорем 6, 1 и предложения 1. $\square$

Заметим, что секвенциально компактное пространство B, построенное в примере 1, обладает счетным числом Суслина, но $C_{sc}(B)$ не имеет счетного числа Суслина, так как B — не компакт.

Пространство всех счетных ординалов $X = \omega_1$, в порядковой топологии, — секвенциально компактное, но не компактное пространство. Таким образом, $C_{sc}(X)$ не обладает счетным числом Суслина.

Предложение 3. *Пусть $C_{sc}(X)$ имеет счетное число Суслина, и пусть A секвенциально компактное, C-вложимое подмножество пространства X. Тогда A метризуемый компакт.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как A секвенциально компактное, то $C_{sc}(A) = C_u(A)$. Пусть $\{U_\alpha = \langle f_\alpha, A, \varepsilon_\alpha\rangle\}$ — дизъюнктное семейство непустых открытых множеств в $C_{sc}(A)$. Пусть $\tilde{f_\alpha}$ — некоторое продолжение функций f_α на X. Очевидно, что $V_\alpha = \langle \tilde{f_\alpha}, A, \varepsilon_\alpha\rangle$ — открыто и непусто в $C_{sc}(X)$. Заметим, что по определению $\{V_\alpha\}$ — дизъюнктное семейство. Значит, семейство $\{U_\alpha\}$ не более чем счётно. Тогда, по теореме 2, множество A — метризуемый компакт. □

Покажем, что существует компактное пространство в котором существует всюду плотное не C-вложимое секвенциально компактное подмножество.

Пример 16. Пусть $\omega_1 + 1$ множество всех ординалов меньших или равных первому несчетному ординалу ω_1 с порядковой топологией. Рассмотрим пространство $Y = W^1 \oplus W^2$ как сумму двух экземпляров пространств $\omega_1 + 1$. Пространство X получается отождествлением в пространстве Y двух точек несчётного характера. Обозначим точку, полученную отождествлением, как точку z. Полученное пространство X является компактным, а всюду плотное подмножество $S = X \setminus \{z\}$ секвенциально компактным. Заметим, что любая непрерывная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$, начиная с некоторого $\alpha < \omega_1$, становится постоянной как на множестве W^1, так и на множестве W^2. Таким образом, в пространстве X любая непрерывная вещественнозначная функция постоянна в некоторой окрестности точки z. Определим функцию g на S следующим образом: $g(W^1 \setminus \{z\}) = 1$ и $g(W^2 \setminus \{z\}) = 2$. Функция g непрерывна на S и g нельзя продолжить на всё X. Таким образом, S не C-вложимое подмножество пространства X.

Пространство X обладает счетной сетью, если существует счетное семейство $\mathcal{F}$ такое, что для любой точки $x \in X$ и любой окрестности V_x точки x существует $F \in \mathcal{F}$ такое, что $x \in F \subset V_x$. Напомним, что k-сетью пространства X называют семейство $\mathcal{F}$ такое, что для любого компактного подмножества Z пространства X и содержащего его открытого множества V существует $F \in \mathcal{F}$ такое, что $Z \subset F \subset V$. Пространство, обладающее счётной k-сетью называют $\aleph_0$-пространством.

Предложение 4. *Следующие условия эквивалентны:*
а) X — $\aleph_0$*-пространство;*
б) $C_k(X)$ *обладает счётной сетью;*
в) $C_c(X)$ *обладает счетной сетью;*
г) $C_{sc}(X)$ *обладает счетной сетью;*
д) $C_{cc}(X)$ *обладает счетной сетью;*
е) $C_{ps}(X)$ *обладает счетной сетью;*
ж) $C_{rc}(X)$ *обладает счетной сетью.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эквивалентность утверждений а), в) доказана в [2, теорема 3.26]. Импликации е)⇒д)⇒г)⇒в)⇒б), д)⇒г)⇒б) очевидны. Из б) следует, что $C_k(X)$ сепарабельно, откуда заключаем, что X субметризуемо по теореме 6. Значит, по теореме 1, $C_k(X) = C_{rc}(X)$ и $C_{rc}(X)$ обладает счётной сетью. □

Предложение 5. *Пусть* X — $\aleph_0$*-пространство. Тогда* $C_{sc}(X)$ — *линделёфово пространство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Любое пространство, обладающее счетной сетью, является линделёфовым. По теореме 4 пространство $C_{sc}(X)$ обладает счетной сетью. □

Предложение 6. *Следющие условия эквивалентны:*
а) $C_k(X)$ *обладает счётной базой;*
б) $C_c(X)$ *обладает счётной базой;*
в) $C_{sc}(X)$ *обладает счётной базой;*
г) $C_{cc}(X)$ *обладает счётной базой;*
д) $C_{ps}(X)$ *обладает счётной базой;*

е) $C_{rc}(X)$ *обладает счётной базой;*
ж) X *хемикомпактно и субметризуемо.*
Более того, в каждом из этих случаев $C_k(X) = C_c(X) = C_{sc}(X) = C_{cc}(X) = C_{ps}(X) = C_{rc}(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование счётной базы влечёт сепарабельность. Из теоремы 6 и теоремы 1 следует равенство $C_k(X) = C_c(X) = C_{sc}(X) = C_{cc}(X) = C_{ps}(X) = C_{rc}(X)$ и эквивалентность а)–е). Эквивалентность б) и ж) доказана в [2, теорема 4.6]. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arens R., Dugundji J. Topologies for function spaces // Pacific J. Math. 1951. № 1. P. 5–31.
2. Kundu S., Garg P. Countability properties of the pseudocompact-open topology on C(X) // Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. 2007. Vol. 34. P. 421–444.
3. Kundu S., Raha A.B. The bounded-open topology and its relatives // Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste 1996. № 1–2. P. 61–77.
4. Osipov A. V. The Set-Open topology // Topology Proceedings. 2011. № 37. P. 181–204.
5. Осипов А. В. Слабо множественно-открытая топология // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 167–176.
6. Fox R. H. On topologies for function spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1945. № 51. P. 429–432.
7. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.

Поступила в редакцию 21.06.11

A. V. Osipov, D. A. Kosolobov
On sequentially compact-open topology

We investigate sequentially compact-open topology on the set of all continuous real-valued functions $C(X)$, defined on a Tychonov space X. We study the basic properties of this topology and relationships with well-known set-open topologies.

Keywords: space of continuous functions, set-open topology, compact-open topology, sequentially compact subset, topology of uniform convergence.

Mathematical Subject Classifications: 54C40, 54C35, 54D60

Осипов Александр Владимирович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел алгебры и топологии, ИММ УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16. E-mail: oab@list.ru

Косолобов Дмитрий Александрович, студент, Уральский федеральный университет им. Б.Н.Ельцина, 620000, Россия, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4. E-mail: dkosolobov@mail.ru

Osipov Aleksandr Vladimirovich, candidate of physics and mathematics, senior researcher, department of algebra and topology, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.

Kosolobov Dmitrii Aleksandrovich, student, Ural Federal University, ul. Turgeneva, 4, Yekaterinburg, 620000, Russia.