ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2011. Вып. 3

УДК 517.5

© *В. И. Родионов*

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ АНАЛОГОВ ИНТЕГРАЛА ПЕРРОНА–СТИЛТЬЕСА

Для двух прерывистых функций, заданных на отрезке, и специального параметра, названного дефектом, определяется понятие квазиинтеграла. Если существует интеграл Римана–Стилтьеса, то для любого дефекта существует квазиинтеграл, и все они равны между собой. Интеграл Перрона–Стилтьеса, если он существует, совпадает с одним из квазиинтегралов, где дефект определен специальным образом. Приведены необходимые и достаточные условия существования квазиинтегралов, доказаны их основные свойства, в частности, аналог формулы интегрирования по частям.

Ключевые слова: прерывистая функция, интеграл Римана–Стилтьеса, интеграл Перрона–Стилтьеса.

§ 1. Основные обозначения и терминология

Зафиксируем отрезок $K \doteq [a,b]$ и через $\mathrm{G} \doteq \mathrm{G}(K) \doteq \mathrm{G}[a,b]$ обозначим пространство *прерывистых* (см. [1, 2]) функций, то есть функций $x : K \to \mathbb{R}$, обладающих конечными пределами $x(t-0) \doteq \lim\limits_{\tau\to t-0} x(\tau)$ при всех $t \in (a,b]$ и $x(t+0) \doteq \lim\limits_{\tau\to t+0} x(\tau)$ при всех $t \in [a,b)$.

Пространство G банахово по норме $\|x\| \doteq \sup\limits_{t\in K} |\,x(t)\,|$ (более того, G является банаховой алгеброй) и является замыканием пространства ступенчатых функций по sup-норме.

В соответствии с [2] конечное или счетное множество $T \doteq \{\,\tau_1, \tau_2, \dots\,\}$ попарно различных точек $\tau_k \in K$ называем *разбиением* отрезка K, а совокупность всех разбиений K обозначаем через $\mathbb{T}(K)$. Пустое множество мы также включаем в $\mathbb{T}(K)$, — оно является наименьшим элементом частичного порядка на $\mathbb{T}(K)$, заданного естественным образом: полагаем, что разбиение T предшествует разбиению S, если $T \subseteq S$.

Разбиения T и S называем *эквивалентными* $(T \sim S)$, если их симметрическая разность конечна, то есть $\mathrm{card}\,(T \Delta S) < \infty$. Все конечные разбиения эквивалентны между собой.

Согласно [1] множество $T(x)$, состоящее из всех точек разрыва произвольной прерывистой функции $x \in \mathrm{G}(K)$, не более чем счетно. Другими словами, $T(x) \in \mathbb{T}(K)$ для всех $x \in \mathrm{G}(K)$.

Для фиксированных $x \in \mathrm{G}$ и $T \in \mathbb{T}(K)$ используем обозначения:

$$x_k \doteq x(\tau_k), \quad x_k^- \doteq x(\tau_k-0) - x(\tau_k), \quad x_k^+ \doteq x(\tau_k+0) - x(\tau_k) \quad \forall\, \tau_k \in T.$$

(Полагаем $x_k^- = 0$, если $a = \tau_k$ для некоторого k, и $x_k^+ = 0$, если $b = \tau_k$ для некоторого k.) В соответствии с [2] через $\lceil x \rceil_T$ обозначаем ряд $\lceil x \rceil_T \doteq \sum\limits_{\tau_k\in T} (\,|x_k^-| + |x_k^+|\,)$ (и его сумму, если ряд сходится), а через $\mathrm{G}^T \doteq \mathrm{G}^T[a,b]$ обозначаем совокупность всех тех $x \in \mathrm{G}$, для которых ряд $\lceil x \rceil_T$ сходится. Поскольку T — не более чем счетное множество, то ряд $\lceil x \rceil_T$ трактуется естественным образом: $|x_1^-| + |x_1^+| + |x_2^-| + |x_2^+| + \dots$. Относительно естественных операций сложения и умножения совокупность G^T является алгеброй над полем $\mathbb{R}$.

Пространство $\Gamma \doteq \Gamma[a,b]$ состоит из таких функций $x \in \mathrm{G}$, что ряд $\lceil x \rceil_{T(x)}$ сходится [2]. Имеет место равенство $\Gamma = \bigcap\limits_{T\in\mathbb{T}(K)} \mathrm{G}^T$.

Функция Хевисайда $\theta(t) \doteq \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, и произвольная точка $\tau \in K$ порождают ступенчатые функции $\xi_\tau(t) \doteq -\,\theta(\tau - t)$ и $\eta_\tau(t) \doteq \theta(t-\tau)$. В работе используются следующие обозначения: если $\tau = \tau_k \in T$, то $\xi_k(\cdot) \doteq \xi_{\tau_k}(\cdot)$ и $\eta_k(\cdot) \doteq \eta_{\tau_k}(\cdot)$. Другими словами,

$$\xi_k(t) = \begin{cases} -1, & t < \tau_k \\ 0, & t \geqslant \tau_k \end{cases}, \qquad \eta_k(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant \tau_k \\ 1, & t > \tau_k \end{cases}, \qquad t \in K, \quad \forall\, \tau_k \in T.$$

Для любых $x \in \mathrm{G}^T$ и $\alpha \in K$ функциональный ряд

$$x_{_T}(t) \doteq x_{_T}(t,\alpha) \doteq -\sum_{\tau_k \in T} x_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} x_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k \tag{1.1}$$

абсолютно и равномерно на K сходится (см. [2]). Сумму ряда обозначаем так же, как и сам ряд, — через $x_{_T}(t)$. В случае $T = \varnothing$ полагаем $x_{_T}(t) \equiv 0$. В соответствии с [3, с. 336] функции вида (1.1) называем *функциями скачков*. Там же отмечается, что $x_{_T} \in \mathrm{BV}$ — функция ограниченной вариации и $\operatorname{Var} x_{_T} = \lceil x \rceil_{_T}$. Здесь и в дальнейшем через $\operatorname{Var} y$ обозначаем полную вариацию функции y на отрезке K. Наряду с (1.1) определена функция $x^{T}(t) \doteq x^{T}(t,\alpha) \doteq x(t) - x_{_T}(t)$.

В работе [2] определены пространства: $\mathrm{G}_{_L}$ — подпространство в G, состоящее из тех функций, что $x(t-0) = x(t)$ при $t \in (a,b]$ и $x(a+0) = x(a)$; симметричное подпространство $\mathrm{G}_{_R}$ состоит из тех функций, что $x(t+0) = x(t)$ при $t \in [a,b)$ и $x(b-0) = x(b)$.

§ 2. Квазиинтеграл Римана–Стилтьеса в пространстве прерывистых функций

Через Ω обозначим пространство функций $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что $\varphi(0) = 0$. Пару функций $\Delta \doteq (\varphi,\psi) \in \Omega^2$ будем называть *дефектом*, а Ω^2 — *пространством дефектов.*

Для $\varphi \in \Omega$ через φ^* обозначим функцию $\varphi^*(h) \doteq h - \varphi(h)$. Очевидно, $\varphi^*(0) = 0$, $\varphi^* \in \Omega$ и $\varphi^{**} = \varphi$. Дефект $\Delta^* \doteq (\varphi^*,\psi^*)$ будем называть *двойственным* к дефекту $\Delta \doteq (\varphi,\psi)$.

Подпространство $\Omega_c \doteq \{\, \varphi \in \Omega \mid \varphi(h) = O(h) \text{ при } h \to 0 \,\}$ состоит из тех функций $\varphi \in \Omega$, для которых существуют $\delta > 0$ и $C > 0$ такие, что $|\,\varphi(h)\,| \leqslant C|\,h\,|$ при $|\,h\,| \leqslant \delta$. Очевидно, включение $\varphi \in \Omega_c$ влечет включение $\varphi^* \in \Omega_c$, и следовательно, пара двойственных дефектов $\Delta \doteq (\varphi,\psi)$ и $\Delta^* \doteq (\varphi^*,\psi^*)$ принадлежит или не принадлежит Ω_c^2 одновременно.

Подпространство $\Omega_\ell \doteq \{\, \varphi \in \Omega \mid \varphi(h) = \mu h \,\}$ состоит из линейных функций. Очевидно, если $\varphi \in \Omega_\ell$, то $\varphi^* \in \Omega_\ell$, и следовательно, двойственная пара $\Delta \doteq (\varphi,\psi)$ и $\Delta^* \doteq (\varphi^*,\psi^*)$ принадлежит или не принадлежит Ω_ℓ^2 одновременно.

Зафиксируем $x, y \in \mathrm{G}$, $\alpha, \beta \in K$, $\Delta \doteq (\varphi,\psi) \in \Omega^2$. Через $\mathbb{T}(x\Delta y)$ обозначим множество всех таких разбиений $T \in \mathbb{T}(K)$, что

1) $y \in \mathrm{G}^T$;

2) существует интеграл $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\, dy^T$;

3) абсолютно сходится ряд $\sigma^T(x\Delta y) \doteq -\sum\limits_{\tau_k \in T} \Phi_k + \sum\limits_{\tau_k \in T} \Psi_k$, где

$$\Phi_k \doteq \begin{vmatrix} x_k & -\varphi(y_k^-) \\ x_k^- & y_k^- \end{vmatrix} \int_\alpha^\beta d\xi_k \quad \text{и} \quad \Psi_k \doteq \begin{vmatrix} x_k & -\psi(y_k^+) \\ x_k^+ & y_k^+ \end{vmatrix} \int_\alpha^\beta d\eta_k.$$

Ряд $\sigma^T(x\Delta y)$ и его сумму (если она существует) мы обозначаем одним и тем же символом. В тех случаях, когда есть необходимость указания зависимости введенных объектов от α и β, будем писать: $\Phi_k^{\alpha,\beta}$, $\Psi_k^{\alpha,\beta}$, $\sigma_{\alpha,\beta}^T(x\Delta y)$ и $\mathbb{T}_{\alpha,\beta}(x\Delta y)$. Из свойств определителя справедливо

$$\Phi_k = \begin{vmatrix} x(\tau_k) & -\varphi(y_k^-) \\ x(\tau_k-) & \varphi^*(y_k^-) \end{vmatrix} \int_\alpha^\beta d\xi_k \quad \text{и} \quad \Psi_k = \begin{vmatrix} x(\tau_k) & -\psi(y_k^+) \\ x(\tau_k+) & \psi^*(y_k^+) \end{vmatrix} \int_\alpha^\beta d\eta_k.$$

Теорема 1. *Пусть $x, y \in \mathrm{G}$, $\alpha, \beta \in K$, $\Delta \doteq (\varphi,\psi) \in \Omega^2$. Множество $\mathbb{T}(x\Delta y)$ не пусто тогда и только тогда, когда оно содержит разбиение $T(x) \cap T(y)$.*

Доказательство. Если $\mathbb{T}(x\Delta y) \neq \varnothing$, то для некоторого разбиения T выполнены три условия: $y \in \mathrm{G}^T$, существует интеграл $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\, dy^T$ и абсолютно сходится ряд $\sigma^T(x\Delta y)$.

1. Обозначим $S \doteq T(x) \cap T(y)$ и покажем, что $S \subseteq T$. Предположим, что это не так, то есть существует $\tau_m \in S$ такое, что $\tau_m \notin T$. Обе функции x и y разрывны в точке τ_m, следовательно, поскольку существует интеграл $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\, dy^T$, то y^T непрерывна в точке τ_m. Это означает, что

правая часть формулы $y(t) = y^T(t) - \sum\limits_{\tau_k\in T} y_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum\limits_{\tau_k\in T} y_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k$ также непрерывна в точке $\tau_m \notin T$, что противоречит разрывности функции y в этой точке.

2. Итак, $S \subseteq T$ и, следовательно, $y \in \mathrm{G}^S$ (см. [2], лемма 5). Таким образом, определена функция y^S и справедливо равенство

$$y^S(t) = y^T(t) - \sum_{\tau_k\in R} y_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k\in R} y_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k, \tag{2.1}$$

где $R \doteq T\backslash S$. В каждой точке $\tau_k \in R$ одна из функций x или y непрерывна, следовательно, x непрерывна во всех точках $\tau_k \in Q$, где через Q обозначено множество тех $\tau_k \in R$, в которых y разрывна. Очевидно, $y_k^- = y_k^+ = 0$ для всех $\tau_k \in R\backslash Q$, поэтому

$$y^S(t) = y^T(t) - \sum_{\tau_k\in Q} y_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k\in Q} y_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k. \tag{2.2}$$

В соответствии с леммой 7 [2] существует интеграл

$$\int_\alpha^\beta x(s)\, d\Big[-\sum_{\tau_k\in Q} y_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k\in Q} y_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k \Big], \tag{2.3}$$

а поскольку существует $\int_\alpha^\beta x\, dy^T$, то существует $\int_\alpha^\beta x\, dy^S$. Наконец, абсолютная сходимость ряда $\sigma^S(x\Delta y)$ следует из оценки $\sum\limits_{\tau_k\in S} (\, |\Phi_k| + |\Psi_k|\,) \leqslant \sum\limits_{\tau_k\in T} (\, |\Phi_k| + |\Psi_k|\,) < \infty$. Таким образом, $S \in \mathbb{T}(x\Delta y)$. Обратное утверждение тривиально.

Замечание 1. На первом этапе доказательства теоремы 1 мы доказали, что в том случае, когда $\mathbb{T}(x\Delta y) \neq \varnothing$, для любого $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ справедливо включение $T(x)\cap T(y) \subseteq T$. Дословно повторив выкладки второго этапа, легко убедиться в истинности следующего утверждения: если $\mathbb{T}(x\Delta y) \neq \varnothing$, $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ и $T(x)\cap T(y) \subseteq S \subseteq T$, то $S \in \mathbb{T}(x\Delta y)$.

Лемма 1. *Пусть* $\mathbb{T}(x\Delta y) \neq \varnothing$ *и* $Q, R \in \mathbb{T}(x\Delta y)$. *Для разбиений* $U \doteq Q\cup R$ *и* $V \doteq Q\cap R$ *имеют место включения* $U, V \in \mathbb{T}(x\Delta y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $V \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ следует из замечания 1. В силу леммы 5 [2] справедливо $G^U = G^Q \cap G^R$, поэтому $y \in G^U$. Очевидное равенство $y^Q + y^R = y^U + y^V$ и существование интегралов $\int_\alpha^\beta x\, dy^Q$, $\int_\alpha^\beta x\, dy^R$ и $\int_\alpha^\beta x\, dy^V$ влекут существование $\int_\alpha^\beta x\, dy^U$. Наконец, равенство $\sigma^Q(x\Delta y) + \sigma^R(x\Delta y) = \sigma^U(x\Delta y) + \sigma^V(x\Delta y)$ и абсолютная сходимость рядов $\sigma^Q(x\Delta y)$, $\sigma^R(x\Delta y)$ и $\sigma^V(x\Delta y)$ влекут абсолютную сходимость ряда $\sigma^U(x\Delta y)$. $\square$

Итак, если множество $\mathbb{T}(x\Delta y)$ не пусто, то оно является подрешеткой решетки $\mathbb{T}(K)$, причем наименьшим элементом решетки $\mathbb{T}(x\Delta y)$ является разбиение $T(x)\cap T(y)$. Следует иметь в виду следующее обстоятельство: если $S \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ и $S \subset T$, то T может оказаться вне множества $\mathbb{T}(x\Delta y)$. Покажем это на примере.

Пример 1. Пусть $K \doteq [0,1]$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $x(t) = 0$ при $t \leqslant \frac{1}{2}$ и $x(t) = 1$ при $t > \frac{1}{2}$, $y(t) = t\{\frac{1}{t}\}$ при $t \neq 0$ и $y(0) = 0$ (функция y здесь такая же, как функция x в примере 1 [2]). Поскольку множество $S \doteq T(x)\cap T(y) = \{\frac{1}{2}\}$ конечно, то $y \in \mathrm{G}^S (= \mathrm{G})$ и $y^S(t) = y(t)$ при $t \leqslant \frac{1}{2}$ и $y^S(t) = \frac{1}{2} - t$ при $t \geqslant \frac{1}{2}$. Функция y^S, как и должно быть, непрерывна в точке $\frac{1}{2}$, следовательно, существует интеграл $\int_0^1 x\, dy^S = \int_{1/2}^1 d\,(\,\frac{1}{2} - t\,) = -\frac{1}{2}$. Ряд $\sigma^S(x\Delta y)$ вырождается в одно слагаемое, поэтому $S \in \mathbb{T}(x\Delta y)$. Если $T \doteq \{\,\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$, то $S \subset T$, однако, $y \notin \mathrm{G}^T$ (см. пример 1 [2]), следовательно, $T \notin \mathbb{T}(x\Delta y)$. Ситуацию проясняет следующая

Лемма 2. *Пусть* $\mathbb{T}(x\Delta y)\neq\varnothing$, $S\in\mathbb{T}(x\Delta y)$, $T\in\mathbb{T}(K)$, $S\subseteq T$. *Включение* $T\in\mathbb{T}(x\Delta y)$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $y\in \mathrm{G}^T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость очевидна. Достаточность. Пусть $y\in\mathrm{G}^T$. Поскольку $S\in\mathbb{T}(x\Delta y)$, то $T(x)\cap T(y)\subseteq S$ и $y\in\mathrm{G}^S$, поэтому справедливо равенство (2.1) и остальные выкладки второго этапа доказательства теоремы 1, в силу которых существование интеграла $\int_\alpha^\beta x\,dy^S$ влечет существование интеграла $\int_\alpha^\beta x\,dy^T$. Осталось показать абсолютную сходимость ряда $\sigma^T(x\Delta y)$. Пусть $R\doteq T\backslash S$, а Q состоит из тех точек $\tau_k\in R$, в которых y разрывна. Поскольку $y_k^-=y_k^+=0$ для всех $\tau_k\in R\backslash Q$, то $\varphi(y_k^-)=\psi(y_k^+)=0$ и $\Phi_k=\Psi_k=0$, поэтому $\sigma^R(x\Delta y)\doteq-\sum\limits_{\tau_k\in R}\Phi_k+\sum\limits_{\tau_k\in R}\Psi_k=-\sum\limits_{\tau_k\in Q}\Phi_k+\sum\limits_{\tau_k\in Q}\Psi_k$, а поскольку x непрерывна во всех точках $\tau_k\in Q$, то $x_k^-=x_k^+=0$, $\Phi_k=x_ky_k^-\int_\alpha^\beta d\xi_k$ и $\Psi_k=x_ky_k^+\int_\alpha^\beta d\eta_k$, поэтому

$$\sum_{\tau_k\in R}\big(\,|\Phi_k|+|\Psi_k|\,\big)\leqslant\|x\|\sum_{\tau_k\in Q}\big(\,|y_k^-|+|y_k^+|\,\big)\leqslant\|x\|\sum_{\tau_k\in T}\big(\,|y_k^-|+|y_k^+|\,\big)<\infty.$$

В силу равенства $\sigma^T(x\Delta y)=\sigma^S(x\Delta y)+\sigma^R(x\Delta y)$ абсолютная сходимость рядов $\sigma^S(x\Delta y)$ и $\sigma^R(x\Delta y)$ влечет абсолютную сходимость ряда $\sigma^T(x\Delta y)$. Таким образом, $T\in\mathbb{T}(x\Delta y)$.

Следствие 1. *Пусть* $\mathbb{T}(x\Delta y)\neq\varnothing$. *Эквивалентные разбиения* S *и* T, *содержащие разбиение* $T(x)\cap T(y)$, *принадлежат или не принадлежат множеству* $\mathbb{T}(x\Delta y)$ *одновременно.*

Если $S\in\mathbb{T}(x\Delta y)$ и $R\doteq S\cap T$, то в соответствии с замечанием 1 имеем $R\in\mathbb{T}(x\Delta y)$. Поскольку $T\sim S$, то $\mathrm{G}^T=\mathrm{G}^S$ (см. [2], лемма 5) и $y\in\mathrm{G}^T$, а поскольку $R\in\mathbb{T}(x\Delta y)$ и $R\subseteq T$, то в силу леммы 2 справедливо включение $T\in\mathbb{T}(x\Delta y)$.

Теорема 2. *Пусть* $x,y\in\mathrm{G}$, $\alpha,\beta\in K$, $\Delta\doteq(\varphi,\psi)\in\Omega^2$. *Если* $\mathbb{T}(x\Delta y)\neq\varnothing$, *то при всех* $T\in\mathbb{T}(x\Delta y)$ *справедливо тождество* $\int_\alpha^\beta x\,dy^T+\sigma^T(x\Delta y)\equiv\mathrm{const}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $S\doteq T(x)\cap T(y)$. В соответствии с формулами (2.2) и (2.3) справедлива цепочка равенств

$$\int_\alpha^\beta x\,dy^S-\int_\alpha^\beta x\,dy^T=\int_\alpha^\beta x(s)\,d\Big[-\sum_{\tau_k\in Q}y_k^-\int_\alpha^s d\xi_k+\sum_{\tau_k\in Q}y_k^+\int_\alpha^s d\eta_k\Big]=$$

$$=-\sum_{\tau_k\in Q}x(\tau_k)y_k^-\int_\alpha^\beta d\xi_k+\sum_{\tau_k\in Q}x(\tau_k)y_k^+\int_\alpha^\beta d\eta_k, \tag{2.4}$$

заканчивающаяся ссылкой на лемму 7 [2]. В частности, правая часть цепочки (2.4) есть абсолютно сходящийся ряд. Напомним (см. второй пункт доказательства теоремы 1), что через Q обозначено множество тех $\tau_k\in R\doteq T\backslash S$, в которых y разрывна. Поскольку $y_k^-=y_k^+=0$ для всех $\tau_k\in R\backslash Q$, то $\varphi(y_k^-)=\psi(y_k^+)=0$ и $\Phi_k=\Psi_k=0$, поэтому $\sigma^R(x\Delta y)\doteq-\sum\limits_{\tau_k\in R}\Phi_k+\sum\limits_{\tau_k\in R}\Psi_k=$ $=-\sum\limits_{\tau_k\in Q}\Phi_k+\sum\limits_{\tau_k\in Q}\Psi_k$, а поскольку x непрерывна во всех точках $\tau_k\in Q$, то $x_k^-=x_k^+=0$ и

$$\sigma^R(x\Delta y)=-\sum_{\tau_k\in Q}x_ky_k^-\int_\alpha^\beta d\xi_k+\sum_{\tau_k\in Q}x_ky_k^+\int_\alpha^\beta d\eta_k.$$

В силу (2.4) имеет место равенство $\int_\alpha^\beta x\,dy^S-\int_\alpha^\beta x\,dy^T=\sigma^R(x\Delta y)$, а поскольку $\sigma^T(x\Delta y)=$ $=\sigma^S(x\Delta y)+\sigma^R(x\Delta y)$, то $\int_\alpha^\beta x\,dy^T+\sigma^T(x\Delta y)=\int_\alpha^\beta x\,dy^S+\sigma^S(x\Delta y)$.

Определение 1. Будем говорить, что число $J \in \mathbb{R}$ есть *квазиинтеграл* функции $x \in \mathrm{G}$ по функции $y \in \mathrm{G}$ на отрезке $[\alpha,\beta]$ относительно дефекта $\Delta \doteq (\varphi,\psi) \in \Omega^2$ и обозначать

$$J \doteq \int_\alpha^\beta x\Delta y \quad \text{или} \quad J \doteq \int_\alpha^\beta x(s)\Delta y(s),$$

если $\mathbb{T}(x\Delta y) \neq \varnothing$ и существует разбиение $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ такое, что $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\, dy^T + \sigma^T(x\Delta y) = J.$

В силу теоремы 2 квазиинтеграл не зависит от выбора T, важно только, чтобы такое разбиение нашлось, — тем самым определение 1 корректно. Следует также отметить, что в обозначении квазиинтеграла $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\Delta y$ вместо привычного знака дифференциала d стоит дефект Δ, выполняющий не только роль разделителя функций x и y, но и явно подчеркивающий зависимость квазиинтеграла от дефекта. Итак, величина

$$\int_\alpha^\beta x\Delta y \doteq \int_\alpha^\beta x\, dy^T + \sigma^T(x\Delta y) =$$

$$= \int_\alpha^\beta x\, dy^T - \sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} x_k & -\varphi(y_k^-) \\ x_k^- & y_k^- \end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} x_k & -\psi(y_k^+) \\ x_k^+ & y_k^+ \end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\eta_k \tag{2.5}$$

называется *квазиинтегралом Римана–Стилтьеса дефекта* Δ или просто *квазиинтегралом.*

Ряд $\sigma^T(x\Delta y)$ иногда бывает удобно писать в более симметричном виде

$$-\sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} x(\tau_k) & -\varphi(y_k^-) \\ x(\tau_k-) & \varphi^*(y_k^-) \end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} x(\tau_k) & -\psi(y_k^+) \\ x(\tau_k+) & \psi^*(y_k^+) \end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\eta_k.$$

§ 3. Необходимые и достаточные условия существования квазиинтегралов

Теорема 3. *Пусть* $x, y \in \mathrm{G}$, $\alpha,\beta \in K$, $\Delta \doteq (\varphi,\psi) \in \Omega^2$, $T \doteq T(x) \cap T(y)$.

1. *Если* $\operatorname{card} T < \infty$, *то квазиинтеграл* $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\Delta y$ *и интеграл* $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\, dy^T$ *существуют или нет одновременно.*

2. *Если* $\Delta \in \Omega_c^2$ *и* $y \in \mathrm{G}^T$ (*или* $y \in \Gamma$), *то квазиинтеграл* $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\Delta y$ *и интеграл* $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\, dy^T$ *существуют или нет одновременно.*

3. *Если* $\Delta \in \Omega_c^2$ *и* $y \in \mathrm{BV}$, *то квазиинтеграл* $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\Delta y$ *существует.*

4. *Если* $x \in \mathrm{G}_L$, $y \in \mathrm{G}_R$ (*или* $x \in \mathrm{G}_R$, $y \in \mathrm{G}_L$), *то квазиинтеграл* $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\Delta y$ *существует тогда и только тогда, когда* $y \in \mathrm{G}^T$ *и существует интеграл* $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\, dy^T$. *При этом значение квазиинтеграла не зависит от* Δ.

5. *Если существует интеграл* $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\, dy$, *то существует квазиинтеграл* $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\Delta y$ *и выполнено равенство* $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\Delta y = \int_\alpha^\beta x\, dy$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость утверждений 1,2,4 очевидна, поэтому следует доказывать только достаточность.

1. Поскольку T конечно, то $y \in \mathrm{G} = \mathrm{G}^T$, а ряд $\sigma^T(x\Delta y)$ вырождается в конечную сумму, поэтому $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ и существует квазиинтеграл $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\Delta y$.

2. Поскольку $\Delta \doteq (\varphi, \psi) \in \Omega_c^2$, то существуют $\delta > 0$ и $C > 0$ такие, что $|\,\varphi(h)\,| \leqslant C\,|\,h\,|$, $|\,\psi(h)\,| \leqslant C\,|\,h\,|$ при $|\,h\,| \leqslant \delta$. Множество $S \doteq \{\, \tau_k \in T : |\,y_k^-\,| > \delta$ или $|\,y_k^+\,| > \delta \,\}$ состоит из конечного числа точек (см. [2], лемма 1), следовательно, абсолютная сходимость ряда $\sigma^T(x\Delta y)$ равносильна абсолютной сходимости ряда $\sigma^R(x\Delta y)$, где $R \doteq T \backslash S$. Поскольку $|\,y_k^-\,| \leqslant \delta$ и $|\,y_k^+\,| \leqslant \delta$ для всех $\tau_k \in R$, то $|\,\varphi(y_k^-)\,| \leqslant C\,|\,y_k^-\,|$ и $|\,\psi(y_k^+)\,| \leqslant C\,|\,y_k^+\,|$, поэтому

$$|\,\Phi_k\,| \leqslant |\,x_k y_k^- + x_k^- \varphi(y_k^-)\,| \leqslant (\,|\,x_k\,| + C\,|\,x_k^-\,|\,) \cdot |\,y_k^-\,| \leqslant (\,1+2C\,) \cdot \|x\| \cdot |\,y_k^-\,|,$$

и аналогично $|\,\Psi_k\,| \leqslant (\,1+2C\,) \cdot \|x\| \cdot |\,y_k^+\,|$. Таким образом,

$$\sum_{\tau_k \in R} (\,|\,\Phi_k\,| + |\,\Psi_k\,|\,) \leqslant (\,1+2C\,) \cdot \|x\| \cdot \sum_{\tau_k \in T} (\,|\,y_k^-\,| + |\,y_k^+\,|\,) < \infty,$$

поэтому ряды $\sigma^R(x\Delta y)$ и $\sigma^T(x\Delta y)$ абсолютно сходятся и, следовательно, $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$.

Пусть $y \in \Gamma$. Так как $\Gamma \subset \mathrm{G}^T$, то и в этом частном случае утверждение верно.

3. Справедливы включения $y \in \mathrm{BV} \subset \mathrm{G}^S$, где $S \doteq T(y)$. Поскольку $y^S \in \mathrm{CBV}$, то есть y^S — непрерывная функция ограниченной вариации, то согласно теореме 3 [2] существует интеграл $\int_\alpha^\beta x\,dy^S$. Абсолютная сходимость ряда $\sigma^S(x\Delta y)$ доказывается так же, как доказывалась абсолютная сходимость ряда $\sigma^T(x\Delta y)$ в предыдущем пункте. Таким образом, $S \in \mathbb{T}(x\Delta y)$.

4. Поскольку $x \in \mathrm{G}_L$ и $y \in \mathrm{G}_R$, то $x_k^- = 0$ и $y_k^+ = 0$ для всех $\tau_k \in T$, поэтому $\psi(y_k^+) = 0$, $\Phi_k = x_k y_k^- \int_\alpha^\beta d\xi_k$ и $\Psi_k = 0$. Так как $y \in \mathrm{G}^T$, то

$$\sum_{\tau_k \in T} (\,|\Phi_k| + |\Psi_k|\,) \leqslant \|x\| \cdot \sum_{\tau_k \in T} |\,y_k^-\,| = \|x\| \cdot \sum_{\tau_k \in T} (\,|\,y_k^-\,| + |\,y_k^+\,|\,) < \infty,$$

следовательно, $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$, а правая часть цепочки

$$\int_\alpha^\beta x\Delta y \doteq \int_\alpha^\beta x\,dy^T + \sigma^T(x\Delta y) = \int_\alpha^\beta x\,dy^T - \sum_{\tau_k \in T} x_k y_k^- \int_\alpha^\beta d\xi_k$$

не зависит от дефекта Δ. Случай $x \in \mathrm{G}_R$, $y \in \mathrm{G}_L$ симметричен.

5. Существование интеграла $\int_\alpha^\beta x\,dy$ влечет равенство $T = \varnothing$, следовательно, $y \in \mathrm{G} = \mathrm{G}^T$ и $y^T = y$, поэтому существует интеграл $\int_\alpha^\beta x\,dy^T$, а поскольку $\sigma^T(x\Delta y) = 0$, то $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$.

Замечание 2. В доказательстве последнего утверждения мы делаем вывод о существовании квазиинтеграла на основании импликации: $\varnothing \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ влечет $\mathbb{T}(x\Delta y) \neq \varnothing$. Чтобы не возникало ощущение парадокса, приведем другое доказательство. Поскольку множество точек разрыва функции y не более чем счетно, то существует точка $\tau \in K$, в которой y непрерывна. Пусть $S \doteq \{\tau\}$ — одноточечное множество, тогда $y \in \mathrm{G} = \mathrm{G}^S$ и $y^S = y$, поэтому существует интеграл $\int_\alpha^\beta x\,dy^S$. Поскольку ряд $\sigma^S(x\Delta y)$ состоит из одного слагаемого, то $S \in \mathbb{T}(x\Delta y)$.

§ 4. Основные свойства квазиинтегралов

1. Квазиинтеграл линеен по первому аргументу, то есть если существуют $\int_\alpha^\beta x\Delta z$ и $\int_\alpha^\beta y\Delta z$, то для любых $p, q \in \mathbb{R}$ существует $\int_\alpha^\beta (\,px+qy\,)\Delta z$ и $\int_\alpha^\beta (\,px+qy\,)\Delta z = p\int_\alpha^\beta x\Delta z + q\int_\alpha^\beta y\Delta z$.

Действительно, поскольку $\mathbb{T}(x\Delta z) \neq \varnothing$ и $\mathbb{T}(y\Delta z) \neq \varnothing$, то для любых $Q \in \mathbb{T}(x\Delta z)$ и $R \in \mathbb{T}(y\Delta z)$ определено разбиение $U \doteq Q \cup R$, и в соответствии с леммой 5 [2] справедливо равенство $\mathrm{G}^U = \mathrm{G}^Q \cap \mathrm{G}^R$. Это означает, в частности, что $z \in \mathrm{G}^U$, поэтому в силу леммы 2 имеем включения $U \in \mathbb{T}(x\Delta z)$ и $U \in \mathbb{T}(y\Delta z)$. Таким образом, существуют интегралы $\int_\alpha^\beta x\,dz^U$ и $\int_\alpha^\beta y\,dz^U$, абсолютно сходятся ряды $\sigma^U(x\Delta z)$ и $\sigma^U(y\Delta z)$ и справедлива цепочка равенств

$$p\int_\alpha^\beta x\Delta z + q\int_\alpha^\beta y\Delta z = p\int_\alpha^\beta x\,dz^U + p\,\sigma^U(x\Delta z) + q\int_\alpha^\beta y\,dz^U + q\,\sigma^U(y\Delta z) =$$

$$= \int_\alpha^\beta (\,px+qy\,)\,dz^U + \sigma^U\big(\,(\,px+qy\,)\Delta z\big) = \int_\alpha^\beta (\,px+qy\,)\Delta z.$$

2. Свойством линейности по второму аргументу квазиинтеграл в общем случае не обладает. Пусть, например, $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $x = \eta$, $y = g\eta$, $z = h\eta$, где $g, h \in \mathbb{R}$ и $\eta(t) \doteq \theta(t)$ — функция Хевисайда. Если $T \doteq \{0\}$, то $y^T = z^T = 0$, $y(0-)-y(0) = z(0-)-z(0) = 0$, $y(0+)-y(0) = g$ и $z(0+)-z(0) = h$. Поскольку $x(0) = 0$ и $x(0+) = 1$, то

$$\int_\alpha^\beta x\Delta y = \begin{vmatrix} x(0) & -\psi(g) \\ x(0+) & \psi^*(g) \end{vmatrix} = \psi(g) \quad \text{и} \quad \int_\alpha^\beta x\Delta z = \begin{vmatrix} x(0) & -\psi(h) \\ x(0+) & \psi^*(h) \end{vmatrix} = \psi(h).$$

Если $w \doteq py + qz$ $(p, q \in \mathbb{R})$, то $w^T = 0$, $w(0-)-w(0) = 0$, $w(0+)-w(0) = pg + qh$, поэтому

$$\int_\alpha^\beta x\Delta(\,py+qz\,) = \begin{vmatrix} x(0) & -\psi(\,pg+qh\,) \\ x(0+) & \psi^*(\,pg+qh\,) \end{vmatrix} = \psi(\,pg+qh\,).$$

Равенство $\psi(\,pg + qh\,) = p\,\psi(g) + q\,\psi(h)$ справедливо при всех p и q тогда и только тогда, когда ψ — линейная функция.

Этот пример показывает, что и в общей ситуации линейность квазиинтеграла по второму аргументу имеет место тогда и только тогда, когда $\Delta \in \Omega^2_\ell$.

3. При $\alpha < \gamma < \beta$ существование квазиинтеграла $\int_\alpha^\beta x\Delta y$ равносильно существованию обоих квазиинтегралов $\int_\alpha^\gamma x\Delta y$ и $\int_\gamma^\beta x\Delta y$. При этом справедливо равенство

$$\int_\alpha^\beta x\Delta y = \int_\alpha^\gamma x\Delta y + \int_\gamma^\beta x\Delta y. \tag{4.1}$$

Если существует квазиинтеграл $\int_\alpha^\beta x\Delta y$, то $\mathbb{T}_{\alpha,\beta}(x\Delta y) \neq \varnothing$ и для любого $T \in \mathbb{T}_{\alpha,\beta}(x\Delta y)$ существует интеграл $\int_\alpha^\beta x\,dy^T$ и абсолютно сходится ряд $\sigma^T_{\alpha,\beta}(x\Delta y)$. Согласно [4, с. 95] существуют интегралы $\int_\alpha^\gamma x\,dy^T$ и $\int_\gamma^\beta x\,dy^T$ и выполнено равенство

$$\int_\alpha^\beta x\,dy^T = \int_\alpha^\gamma x\,dy^T + \int_\gamma^\beta x\,dy^T. \tag{4.2}$$

Поскольку $\int_\alpha^t d\xi_k \geqslant 0$ и $\int_\alpha^t d\eta_k \geqslant 0$ при всех $t \geqslant \alpha$, то $|\,\Phi_k^{\alpha,t}| = |\,x_k y_k^- + x_k^-\varphi(y_k^-)\,|\int_\alpha^t d\xi_k$ и $|\,\Psi_k^{\alpha,t}| = |\,x_k y_k^+ + x_k^+\psi(y_k^+)\,|\int_\alpha^t d\eta_k$, а так как $\int_\alpha^\gamma d\xi_k \leqslant \int_\alpha^\beta d\xi_k$ и $\int_\alpha^\gamma d\eta_k \leqslant \int_\alpha^\beta d\eta_k$, то

$$\sum_{\tau_k \in T}(\,|\,\Phi_k^{\alpha,\gamma}| + |\,\Psi_k^{\alpha,\gamma}|\,) \leqslant \sum_{\tau_k \in T}(\,|\,\Phi_k^{\alpha,\beta}| + |\,\Psi_k^{\alpha,\beta}|\,) < \infty.$$

Таким образом, ряд $\sigma^T_{\alpha,\gamma}(x\Delta y)$ абсолютно сходится. Аналогично доказывается абсолютная сходимость ряда $\sigma^T_{\gamma,\beta}(x\Delta y)$. Следовательно, существуют квазиинтегралы $\int_\alpha^\gamma x\Delta y$ и $\int_\gamma^\beta x\Delta y$, а равенства (4.2) и

$$\sigma^T_{\alpha,\beta}(x\Delta y) = \sigma^T_{\alpha,\gamma}(x\Delta y) + \sigma^T_{\gamma,\beta}(x\Delta y) \tag{4.3}$$

приводят к формуле (4.1).

Обратно. Если существуют $\int_\alpha^\gamma x\Delta y$ и $\int_\gamma^\beta x\Delta y$, то $\mathbb{T}_{\alpha,\gamma}(x\Delta y) \neq \varnothing$, $\mathbb{T}_{\gamma,\beta}(x\Delta y) \neq \varnothing$ и для любых $Q \in \mathbb{T}_{\alpha,\gamma}(x\Delta y)$ и $R \in \mathbb{T}_{\gamma,\beta}(x\Delta y)$ определены эквивалентные разбиения $U \doteq Q \cup R$ и $T \doteq U \cup \{\gamma\}$. Поскольку $T \sim U$, то $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}^U = \mathrm{G}^Q \cap \mathrm{G}^R$, следовательно, $y \in \mathrm{G}^T$. В соответствии с леммой 2 справедливы включения $T \in \mathbb{T}_{\alpha,\gamma}(x\Delta y)$ и $T \in \mathbb{T}_{\gamma,\beta}(x\Delta y)$, поэтому существуют интегралы $\int_\alpha^\gamma x\,dy^T$ и $\int_\gamma^\beta x\,dy^T$ и абсолютно сходятся ряды $\sigma^T_{\alpha,\gamma}(x\Delta y)$ и $\sigma^T_{\gamma,\beta}(x\Delta y)$. Функция y^T непрерывна в точке γ, а функция x ограничена, следовательно, согласно [4, с. 116] существование интегралов $\int_\alpha^\gamma x\,dy^T$ и $\int_\gamma^\beta x\,dy^T$ влечет существование интеграла $\int_\alpha^\beta x\,dy^T$ и равенство (4.2). Таким образом, равенство (4.3) влечет абсолютную сходимость ряда $\sigma^T_{\alpha,\beta}(x\Delta y)$, существование квазиинтеграла $\int_\alpha^\beta x\Delta y$ и равенство (4.1).

Особо следует отметить то обстоятельство, что классический интеграл Римана–Стилтьеса свойством 3, то есть свойством аддитивности, вообще говоря, не обладает [4, с. 96]. Тем самым квазиинтеграл исправляет этот существенный недостаток интеграла Римана–Стилтьеса.

4. Хорошо известно [3, с. 369] равенство $\mathrm{C}^*[a,b] = \Big\{ x \to \int_a^b x\,dQ \;\Big|\; Q \in \mathrm{BV}[a,b] \Big\}$, означающее, что всякий линейный непрерывный функционал в пространстве непрерывных функций $\mathrm{C}[a,b]$ есть интеграл Римана–Стилтьеса. В соответствии с теоремой 3 обнаруживаем, что квазиинтегралы дефекта $\Delta \in \Omega_c^2$ продолжают линейные непрерывные функционалы с пространства $\mathrm{C}[a,b]$ на пространство $\mathrm{G}[a,b]$. В рамках настоящей работы мы не ставим, однако, задачу описания пространства $\mathrm{G}^*[a,b]$, а лишь отмечаем связь квазиинтегралов с известными интегралами, продолжающими интеграл Римана–Стилтьеса с $\mathrm{C}[a,b]$ на $\mathrm{G}[a,b]$.

5. Если $x \in \mathrm{G}$ и $y \in \mathrm{BV}$, то для любого $\Delta \in \Omega_c^2$ существует квазиинтеграл $\int_\alpha^\beta x\Delta y$, существует интеграл Перрона–Стилтьеса $(\mathrm{PS})\int_\alpha^\beta x\,dy$ и выполнено равенство

$$\int_\alpha^\beta x\Delta y = (\mathrm{PS})\int_\alpha^\beta x\,dy - \sum_{\tau_k \in S} x_k^-\varphi(y_k^-)\int_\alpha^\beta d\xi_k + \sum_{\tau_k \in S} x_k^+\psi(y_k^+)\int_\alpha^\beta d\eta_k, \tag{4.4}$$

где $S \doteq T(x) \cap T(y)$. В частности, $(\mathrm{PS})\int_\alpha^\beta x\,dy = \int_\alpha^\beta x\Delta_0 y$, где через Δ_0 обозначен дефект (φ_0, ψ_0) такой, что $\varphi_0(h) = \psi_0(h) \equiv 0$.

Существование квазиинтеграла $\int_\alpha^\beta x\Delta y$ справедливо в силу утверждения 3 теоремы 3. При $\Delta = \Delta_0$ и $T \doteq T(y)$ формула (2.5) принимает вид

$$\int_\alpha^\beta x\Delta_0 y = \int_\alpha^\beta x\,dy^T - \sum_{\tau_k \in T} x(\tau_k)y_k^-\int_\alpha^\beta d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} x(\tau_k)y_k^+\int_\alpha^\beta d\eta_k. \tag{4.5}$$

Существование интеграла $(\mathrm{PS})\int_\alpha^\beta x\,dy$ хорошо известно (см., например, [5]). Там же доказаны равенства

$$(\mathrm{PS})\int_\alpha^\beta x\,d\xi_k = x(\tau_k)\int_\alpha^\beta d\xi_k \quad \text{и} \quad (\mathrm{PS})\int_\alpha^\beta x\,d\eta_k = x(\tau_k)\int_\alpha^\beta d\eta_k,$$

а поскольку $y^T \in \mathrm{CBV}$, то существует $\int_\alpha^\beta x\,dy^T$, следовательно, существует $(\mathrm{PS})\int_\alpha^\beta x\,dy^T$ и выполнено равенство $(\mathrm{PS})\int_\alpha^\beta x\,dy^T = \int_\alpha^\beta x\,dy^T$. Таким образом, правая часть формулы (4.5) равна $(\mathrm{PS})\int_\alpha^\beta x\,dy$. Формула (4.4) получается вычитанием формул (2.5) и (4.5):

$$\int_\alpha^\beta x\Delta y - \int_\alpha^\beta x\Delta_0 y = -\sum_{\tau_k\in T} x_k^-\varphi(y_k^-)\int_\alpha^\beta d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T} x_k^+\psi(y_k^+)\int_\alpha^\beta d\eta_k$$

и замечанием, что $x_k^- = x_k^+ = 0$ для всех $\tau_k \in T\backslash S$.

Если $x \in \mathrm{G}$, $y \in \mathrm{BV}$ таковы, что x непрерывна слева, а y непрерывна справа (или наоборот), то в соответствии с утверждениями 3 и 4 теоремы 3 квазиинтеграл $\int_\alpha^\beta x\Delta y$ существует и не зависит от дефекта Δ, поэтому справедливо равенство $\int_\alpha^\beta x\Delta y = (\mathrm{PS})\int_\alpha^\beta x\,dy$.

Свойство 5 показывает исключительную роль дефекта Δ_0. Другим, не менее важным, является дефект $\Delta_0^* \doteq (\varphi_0^*, \psi_0^*)$, где $\varphi_0^*(h) = \psi_0^*(h) = h$, — двойственный к дефекту Δ_0. В этом случае справедлива формула

$$\int_\alpha^\beta x\Delta_0^* y = \int_\alpha^\beta x\,dy^T - \sum_{\tau_k\in T} x(\tau_k-)\,y_k^-\int_\alpha^\beta d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T} x(\tau_k+)\,y_k^+\int_\alpha^\beta d\eta_k, \tag{4.6}$$

правая часть которой отличается от правой части (4.5) лишь тем, что величины $x(\tau_k)$ заменены на $x(\tau_k-)$ и $x(\tau_k+)$. Таким образом, квазиинтеграл (4.6) обладает важным свойством: он не зависит от значений интегрируемой функции в точках разрыва интегрирующей функции. Можно показать равенство $(\mathrm{DS})\int_\alpha^\beta x\,dy = \int_\alpha^\beta x\Delta_0^* y$, в котором слева стоит интеграл Душника–Стилтьеса [1], однако рамки работы ограничивают наши возможности.

6. Если $x \in \mathrm{G}$, $y \in \mathrm{BV}$, $\Delta \in \Omega_c^2$, то при фиксированном $\alpha \in K$ определена функция $z(t) \doteq \int_\alpha^t x\Delta y$ и справедливо включение $z \in \mathrm{BV}$.

Первая часть утверждения следует из свойства 5. При $T \doteq T(y)$ справедливо включение $y^T \in \mathrm{CBV}$ и определена функция $w(t) \doteq \int_\alpha^t x\,dy^T$. В силу следствия 4 [2] имеет место включение $w \in \mathrm{CBV}$. Функция $h(t) \doteq \sigma_{\alpha,t}^T(x\Delta y)$ есть функция скачков, поэтому $h \in \mathrm{BV}$, $z = w + h \in \mathrm{BV}$.

7. Пусть $x, y \in \mathrm{G}$, $\Delta_1 \doteq (\varphi_1, \psi_1) \in \Omega^2$, $\Delta_2 \doteq (\varphi_2, \psi_2) \in \Omega^2$. Если существуют квазиинтегралы $\int_\alpha^\beta y\,\Delta_1 x$ и $\int_\alpha^\beta x\,\Delta_2 y$, то справедлив аналог формулы интегрирования по частям:

$$\int_\alpha^\beta y\,\Delta_1 x + \int_\alpha^\beta x\,\Delta_2 y = xy\Big|_\alpha^\beta - \tag{4.7}$$

$$-\sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix}\varphi_1(x_k^-) & \varphi_2^*(y_k^-)\\ \varphi_1^*(x_k^-) & \varphi_2(y_k^-)\end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix}\psi_1(x_k^+) & \psi_2^*(y_k^+)\\ \psi_1^*(x_k^+) & \psi_2(y_k^+)\end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\eta_k,$$

где $T \doteq T(x) \cap T(y)$ — общие точки разрыва функций x и y.

Из существования квазиинтегралов следуют включения $T \in \mathbb{T}(y\,\Delta_1 x)$ и $T \in \mathbb{T}(x\,\Delta_2 y)$, поэтому $x, y \in \mathrm{G}^T$, существуют интегралы $\int_\alpha^\beta y\,dx^T$ и $\int_\alpha^\beta x\,dy^T$ и абсолютно сходятся ряды $\sigma^T(y\,\Delta_1 x)$ и $\sigma^T(x\,\Delta_2 y)$. Следовательно, $\sigma \doteq \int_\alpha^\beta y\,\Delta_1 x + \int_\alpha^\beta x\,\Delta_2 y = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2$, где

$\sigma_0 \doteq \int_\alpha^\beta y\,dx^T + \int_\alpha^\beta x\,dy^T$, а $\sigma_1 \doteq \sigma^T(y\,\Delta_1 x)$, $\sigma_2 \doteq \sigma^T(x\,\Delta_2 y)$, то есть

$$\sigma_1 = -\sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} y_k & -\varphi_1(x_k^-) \\ y_k^- & x_k^- \end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} y_k & -\psi_1(x_k^+) \\ y_k^+ & x_k^+ \end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\eta_k,$$

$$\sigma_2 = -\sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} x_k & -\varphi_2(y_k^-) \\ x_k^- & y_k^- \end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} x_k & -\psi_2(y_k^+) \\ x_k^+ & y_k^+ \end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\eta_k.$$

В силу формулы (2.16) [2] справедливы равенства $\sigma_0 = (xy)^T(\beta) - x(\alpha)\,y(\alpha) = xy\,\big|_\alpha^\beta - (xy)_T(\beta)$, следовательно, $\sigma = xy\,\big|_\alpha^\beta + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, где

$$\sigma_3 \doteq -(xy)_T(\beta) = \sum_{\tau_k\in T}(xy)_k^-\int_\alpha^\beta d\xi_k - \sum_{\tau_k\in T}(xy)_k^+\int_\alpha^\beta d\eta_k =$$

$$= \sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} x_k + x_k^- & y_k \\ x_k & y_k + y_k^- \end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\xi_k - \sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} x_k + x_k^+ & y_k \\ x_k & y_k + y_k^+ \end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\eta_k.$$

Воспользовались равенствами $z(\tau_{k-}) = z_k + z_k^-$ и $z(\tau_{k+}) = z_k + z_k^+$, справедливыми для всех $z \in \mathrm{G}$. Коэффициент перед $\int_\alpha^\beta d\xi_k$ в сумме $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ равен

$$-x_k^- y_k - \varphi_1(x_k^-)\,y_k^- - x_k y_k^- - x_k^-\,\varphi_2(y_k^-) + (x_k + x_k^-)\,(y_k + y_k^-) - x_k y_k =$$

$$= \big(x_k^- - \varphi_1(x_k^-)\big)\,\big(y_k^- - \varphi_2(y_k^-)\big) - \varphi_1(x_k^-)\,\varphi_2(y_k^-) = -\varphi_1(x_k^-)\,\varphi_2(y_k^-) + \varphi_1^*(x_k^-)\,\varphi_2^*(y_k^-).$$

Аналогично коэффициент перед $\int_\alpha^\beta d\eta_k$ равен $\psi_1(x_k^+)\,\psi_2(y_k^+) - \psi_1^*(x_k^+)\,\psi_2^*(y_k^+)$.

Следствие 2. *Пусть* $x, y \in \mathrm{G}$, $T \doteq T(x) \cap T(y)$, $\Delta_1, \Delta_2 \in \Omega^2$. *Если выполнено одно из условий:* 1) $\operatorname{card} T < \infty$ *или* 2) $\Delta_1, \Delta_2 \in \Omega_c^2$ *и* $x, y \in \mathrm{G}^T$, *то существование одного из квазиинтегралов* $\int_\alpha^\beta y\,\Delta_1 x$ *или* $\int_\alpha^\beta x\,\Delta_2 y$ *влечет существование другого и равенство* (4.7).

Действительно, если, например, существует $\int_\alpha^\beta y\,\Delta_1 x$, то в соответствии с теоремой 3 в обоих случаях существует $\int_\alpha^\beta y\,dx^T$, а в силу следствия 6 [2] существует $\int_\alpha^\beta x\,dy^T$. Еще раз ссылаясь на теорему 3, получаем существование $\int_\alpha^\beta x\,\Delta_2 y$.

Следствие 3. *Если в условиях свойства* 7 *или следствия* 2 *дефекты* Δ_1 *и* Δ_2 *двойственны, то есть* $\Delta_1 = \Delta$ *и* $\Delta_2 = \Delta^*$, *где* $\Delta \doteq (\varphi, \psi) \in \Omega^2$, *то формула* (4.7) *принимает вид*

$$\int_\alpha^\beta y\,\Delta x + \int_\alpha^\beta x\,\Delta^* y = xy\,\Big|_\alpha^\beta - \tag{4.8}$$

$$-\sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} \varphi(x_k^-) & \varphi(y_k^-) \\ \varphi^*(x_k^-) & \varphi^*(y_k^-) \end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} \psi(x_k^+) & \psi(y_k^+) \\ \psi^*(x_k^+) & \psi^*(y_k^+) \end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\eta_k,$$

а если $\Delta \in \Omega_\ell^2$, *то есть* φ *и* ψ *линейны, то*

$$\int_\alpha^\beta y\,\Delta x + \int_\alpha^\beta x\,\Delta^* y = xy\,\Big|_\alpha^\beta. \tag{4.9}$$

Замечание 3. Формула (4.9) справедлива еще в двух случаях: 1) когда $T(x) \cap T(y) = \varnothing$ и 2) когда функции x и y не имеют общих односторонних разрывов, например, когда $x \in \mathrm{G}_L$, $y \in \mathrm{G}_R$ (или наоборот).

Замечание 4. Если $\Delta^* = \Delta$, то есть $\varphi(h) = \psi(h) = \frac{h}{2}$, то формула (4.9) принимает классический вид

$$\int_\alpha^\beta y\,\Delta x + \int_\alpha^\beta x\,\Delta y = xy\Big|_\alpha^\beta. \tag{4.10}$$

§ 5. Примеры

Пример 2. Пусть $0 \in K$. Для дефекта $\varphi(h) = \psi(h) = \frac{h}{2}$ вычислим квазиинтеграл $\displaystyle\int_{-1}^t x\Delta y$, где функции $x(t) = 3^{\,1+\operatorname{sgn} t}$ и $y(t) = \operatorname{sgn} t$ имеют общую точку разрыва $t = 0$. Здесь $\tau_1 = 0$, $x_1 = 3$, $x_1^- = -2$, $x_1^+ = 6$, $y_1^- = -1$, $y_1^+ = 1$, поэтому

$$x(t) = 1 + 2\int_{-1}^t d\xi + 6\int_{-1}^t d\eta, \quad y(t) = -1 + \int_{-1}^t d\xi + \int_{-1}^t d\eta,$$

$$\int_{-1}^t x\Delta y = -\begin{vmatrix} 3 & -\varphi(-1) \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \int_{-1}^t d\xi + \begin{vmatrix} 3 & -\psi(1) \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \int_{-1}^t d\eta = 2\int_{-1}^t d\xi + 6\int_{-1}^t d\eta = x(t) - 1.$$

Пример 3. Пусть $K = [\,\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\,]$, $\varphi(h) = 3h$, ψ — любая функция из Ω. Вычислим квазиинтеграл $z(t) \doteq \displaystyle\int_1^t x\Delta y$, где $x(t) = 2^{\,[\,t\,]-1}e^{t-1}$, $y(t) = \{\,t\,\}$, $[\,t\,]$ — целая часть, а $\{\,t\,\}$ — дробная часть числа t. Здесь $\tau_1 = 1$, $x_1 = 1$, $x_1^- = -\frac{1}{2}$, $x_1^+ = 0$, $y_1^- = 1$, $y_1^+ = 0\,$; $\tau_2 = 2$, $x_2 = 2e$, $x_2^- = -e$, $x_2^+ = 0$, $y_2^- = 1$, $y_2^+ = 0$. Легко проверить равенство $y(t) = t - 1 - \displaystyle\int_1^t d\xi_1 - \int_1^t d\xi_2$, следовательно,

$$z(t) = \int_1^t x(s)\,d\,(s-1) - \begin{vmatrix} 1 & -\varphi(1) \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \int_1^t d\xi_1 - \begin{vmatrix} 2e & -\varphi(1) \\ -e & 1 \end{vmatrix} \int_1^t d\xi_2 =$$

$$= \int_1^t x(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_1^t d\xi_1 + e\int_1^t d\xi_2.$$

Если $t < 1$, то $z(t) = \frac{1}{2}\,e^{t-1}{-}1\,$; если $t \in [1,2)$, то $z(t) = e^{t-1}{-}1\,$; если $2 \leqslant t$, то $z(t) = 2\,e^{t-1}{-}1$. Это означает, что $\displaystyle\int_1^t x\Delta y = x(t) - 1$.

Пример 4. Пусть $0 \in K$, $\varphi(h) = \psi(h) = 1 - \frac{h}{e^h - 1}$ при $h \neq 0$ и $\varphi(0) = \psi(0) = 0$. Зафиксируем $\alpha \in K$, $q \in \mathrm{CBV}$ и $g, h \in \mathbb{R}$ и составим функцию $Q(t) \doteq q(t) - g\displaystyle\int_\alpha^t d\xi + h\int_\alpha^t d\eta$, разрывную в нуле. Пусть $x(t) \doteq \exp\big(\,Q(t) - Q(\alpha)\,\big)$ и $y(t) \doteq Q(t)$. Легко проверяемые равенства $x(t) = X(t)\,e^{-g\,\xi(t)}\,e^{h\,\eta(t)}$, где $X(t) \doteq \exp\big(\,q(t) - q(\alpha) + g\,\xi(\alpha) - h\,\eta(\alpha)\big)$ (очевидно, $X \in \mathrm{CBV}$), $e^{-g\,\xi(t)} = 1 + (\,1 - e^g\,)\,\xi(t)$, $e^{h\,\eta(t)} = 1 + (\,e^h - 1\,)\,\eta(t)$, $\xi(t)\,\eta(t) \equiv 0$ дают представление для x:

$$x(t) = X(t)\,\big[\,1 + (\,1 - e^g\,)\,\xi(t) + (\,e^h - 1\,)\,\eta(t)\,\big]. \tag{5.1}$$

Справедливо равенство $\displaystyle\int_\alpha^t x\Delta y = \int_\alpha^t x\Delta Q = \int_\alpha^t x\,dq + \sigma$, где

$$\sigma \doteq -\begin{vmatrix} x(0) & -\varphi(g) \\ x(0-) & \varphi^*(g) \end{vmatrix} \int_\alpha^t d\xi + \begin{vmatrix} x(0) & -\psi(h) \\ x(0+) & \psi^*(h) \end{vmatrix} \int_\alpha^t d\eta.$$

Поскольку $\int_\alpha^t X(s)z(s)\,dq(s) = \int_\alpha^t z(s)\,dX(s)$ для любого $z \in \mathrm{G}$, то

$$\int_\alpha^t x\Delta y = \int_\alpha^t \big[\,1 + (\,1-e^g\,)\,\xi(s) + (\,e^h-1\,)\,\eta(s)\,\big]\,dX(s) + \sigma =$$

$$= X(t) - X(\alpha) + (\,1-e^g\,)\Big(\,X(t)\,\xi(t) - X(\alpha)\,\xi(\alpha) - X(0)\int_\alpha^t d\xi\,\Big) +$$

$$+(\,e^h-1\,)\Big(\,X(t)\,\eta(t) - X(\alpha)\,\eta(\alpha) - X(0)\int_\alpha^t d\eta\Big) + \sigma =$$

$$= x(t) - x(\alpha) - X(0)\Big(\,(\,1-e^g\,)\int_\alpha^t d\xi + (\,e^h-1\,)\int_\alpha^t d\eta\Big) + \sigma.$$

Здесь мы проинтегрировали по частям и дважды воспользовались представлением (5.1). Очевидно, $x(0) = X(0)$, $x(0-) = X(0)e^g$, $x(0+) = X(0)e^h$, а поскольку $\varphi^*(g) + e^g\varphi(g) = e^g-1$, $\psi^*(h) + e^h\psi(h) = e^h-1$ и $x(\alpha) = 1$, то $\int_\alpha^t x\Delta y = x(t) - 1$.

Приведенные примеры дают основание полагать, что уравнения вида $x(t) - \int_\alpha^t x\Delta Q = y(t)$ при различных дефектах Δ, ядрах Q и возмущениях y разрешимы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hönig Ch. S. Volterra–Stieltjes integral equations. Mathematics Studies 16. Amsterdam: North-Holland, 1975. 152 p.
2. Родионов В. И. Об одном семействе подпространств пространства прерывистых функций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 4. С. 7–24.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа: учебник для вузов. 5-е изд. М.: Наука, 1981. 544 с.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3: учебник для вузов. 5-е изд. М.: Наука, 1969. 656 с.
5. Tvrdý M. Regulated functions and the Perron–Stieltjes integral // Časopis pěst. mat. 1989. № 114. P. 187–209.

Поступила в редакцию 14.01.11

V. I. Rodionov

On a family of analogs of the Perron–Stieltjes integral

We define the concept of a quasi-integral for two regulated functions defined on a segment and for a special parameter called a defect. In case there exists the Riemann-Stieltjes integral, there is a quasi-integral for any defect, and all quasi-integrals are equal. The Perron-Stieltjes integral, if it exists, coincides with one of quasi-integrals where the defect is defined in a special way. We give proofs of necessary and sufficient conditions for the existence of quasi-integrals and of their basic properties, in particular, of the analogue of the formula of integration by parts.

Keywords: regulated function, Riemann–Stieltjes integral, Perron–Stieltjes integral.

Mathematical Subject Classifications: 26A39, 26A42

Родионов Виталий Иванович, к. ф.-м. н., декан факультета информационных технологий и вычислительной техники, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4). E-mail: rodionov@uni.udm.ru

Rodionov Vitalii Ivanovich, candidate of physics and mathematics, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1 (build. 4), Izhevsk, 426034, Russia.