

МЕХАНИКА

УДК 532.5

© И. А. Бизяев, Т. Б. Иванова

ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКИХ САМОГРАВИТИРУЮЩИХ НЕОДНОРОДНЫХ МАСС

Рассмотрен случай неоднородного самогравитирующего вращающегося вокруг малой полуоси жидкого сфероид с гомофокальной стратификацией, находящегося в равновесии. Получены в общем виде выражения для давления, угловой скорости и гравитационного потенциала данного сфероид с произвольной функцией плотности. Проанализированы частные случаи кусочно-постоянной и непрерывной функции плотности.

Ключевые слова: самогравитирующая жидкость, гомофокальная стратификация, сфероид, уравнения Эйлера.

Введение

Впервые вопрос о формах равновесия небесных самогравитирующих тел рассмотрел Ньютон, изучая форму Земли. Им было показано, что жидкий однородный сфероид с малым эксцентриситетом будет находиться в равновесии. На сегодняшний день известно достаточно много результатов о существовании фигур равновесия *однородной* жидкости, таких как сфероид Маклорена, эллипсоид Якоби, Пуанкарэ и Ляпунов с помощью функций Ламэ получили фигуры равновесия, бесконечно близкие к указанным эллипсоидам [3–6].

Однако наблюдаемые в природе небесные тела существенно неоднородны, и предположение об однородности является лишь идеальной моделью, упрощающей аналитический поиск решения. Задача определения фигур равновесия *неоднородных* тел значительно сложнее и менее изучена. Клеро [7] впервые исследовал фигуры равновесия неоднородной жидкости в предположении малой угловой скорости вращения и малого изменения сжатия от слоя к слою. Ами (Наму), исследовав неоднородный *трехосный* эллипсоид, показал, что такой эллипсоид с кусочно-постоянным распределением плотности не может находиться в равновесии. Веронне [2] обобщил этот результат на случай трехосных эллипсоидов с непрерывным гомотетическим¹ и гомофокальным расслоением². Пицетти [7] исследовал потенциал двуслойных сфероидов и показал, что для всех распределений, за исключением гомофокального, потенциал на поверхности является трансцендентной функцией координат, что не позволяет довести задачу об определении фигур равновесия до конца. Угловые скорости вращения в случае двух гомофокальных сфероидов определены в работе [1].

Следует также отметить, что неудачная попытка найти неоднородный сфероид с гомотетическим расслоением была предпринята Чаплыгиным в неопубликованной работе [8].

¹Под гомотетическим расслоением понимается фигура, состоящая из слоев подобных эллипсоидов. Уравнение произвольного слоя определяется параметром m и имеет вид

$$\frac{x^2}{ma^2} + \frac{y^2}{mb^2} + \frac{z^2}{mc^2} = 1 \quad (m \text{ меняется непрерывно от } 0 \text{ до } 1).$$

²Под гомофокальным расслоением понимается фигура, состоящая из эллипсоидов, фокусы которых остаются постоянными. Уравнение произвольного слоя определяется параметром μ и имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} + \frac{z^2}{c^2 + \mu} = 1 \quad (\mu \text{ меняется непрерывно от } -c^2 \text{ до } 0).$$

В данной работе получено совместное решение гидродинамических уравнений Эйлера, непрерывности и уравнения Пуассона для гравитационного потенциала. Полученное решение соответствует гомофокальному сфероиду, в котором угловая скорость и плотность на каждом слое принимают постоянное значение.

§ 1. Уравнения гидродинамики и уравнение Пуассона в криволинейной системе координат

Рассмотрим неоднородный гомофокальный сфероид, состоящий из идеальной несжимаемой жидкости. Граничная поверхность сфероида описывается уравнением

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

где $a > b$, вращение происходит вокруг малой полуоси b . Уравнение Эйлера, описывающее движение жидкости, имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = \nabla U - \frac{1}{\rho}\nabla p, \tag{1.1}$$

где \mathbf{V} — вектор скорости, U — гравитационный потенциал массы, p — давление, ρ — плотность. Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{V}) = 0. \tag{1.2}$$

Потенциал U , стоящий в правой части уравнения (1.1), удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta U = -4\pi G\rho. \tag{1.3}$$

Следуя Чаплыгину [8], будем рассматривать систему уравнений (1.1)–(1.3) в криволинейной системе координат (r, φ, μ) , переход в которую от декартовых координат (x, y, z) задается следующим образом:

$$x = r \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\varphi), \quad z = \left(b^2 + \mu - \frac{b^2 + \mu}{a^2 + \mu}r^2\right)^{1/2}, \tag{1.4}$$

где μ — параметр гомофокального слоя. Внутри сфероида координаты (r, φ, μ) пробегают следующие значения:

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -b^2 \leq \mu < \mu_0. \tag{1.5}$$

Якобиан перехода имеет вид

$$J = \frac{r((a^2 + \mu)^2 - r^2(a^2 - b^2))}{\sqrt{(b^2 + \mu)(a^2 - r^2 + \mu)(a^2 + \mu)^{3/2}}}$$

и отличен от нуля во всех точках, за исключением начала отсчета, то есть базисные векторы рассматриваемой системы координат линейно независимы.

Метрический тензор и оператор Лапласа в рассматриваемой системе координат принимают вид

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{(a^2 + \mu)^2 - r^2(a^2 - b^2)}{(a^2 + \mu)(a^2 + \mu - r^2)} & 0 & -\frac{r((a^2 + \mu)^2 - r^2(a^2 - b^2))}{2(a^2 + \mu)^2(a^2 + \mu - r^2)} \\ 0 & r^2 & 0 \\ -\frac{r((a^2 + \mu)^2 - r^2(a^2 - b^2))}{2(a^2 + \mu)^2(a^2 + \mu - r^2)} & 0 & \frac{((a^2 + \mu)^2 - r^2(a^2 - b^2))^2}{4(a^2 + \mu)^3(b^2 + \mu)(a^2 + \mu - r^2)} \end{pmatrix};$$

$$\Delta\alpha = \frac{1}{r} \frac{\partial\alpha}{\partial r} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\alpha}{\partial\varphi^2} + \frac{2(a^2 + \mu)}{(a^2 + \mu)^2 - r^2(a^2 - b^2)} \left((a^2 + 2b^2 + 3\mu) \frac{\partial\alpha}{\partial\mu} + 2(b^2 + \mu) \left(r \frac{\partial^2\alpha}{\partial\mu\partial r} + (a^2 + \mu) \frac{\partial^2\alpha}{\partial^2\mu} \right) \right). \quad (1.6)$$

Рассмотрим сфероид, для которого поле скоростей внутри сфероида имеет вид

$$\mathbf{V} = (0, \omega(\mu), 0), \quad (1.7)$$

то есть каждый слой с фиксированным значением μ вращается со своей постоянной угловой скоростью. В этом случае уравнение Эйлера в рассматриваемой системе координат примет вид

$$-\omega(\mu)^2 r = \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{\rho(\mu)} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{2(a^2 + \mu)(b^2 + \mu)r}{(a^2 + \mu)^2 - r^2(a^2 - b^2)} \left(\frac{\partial U}{\partial\mu} - \frac{1}{\rho(\mu)} \frac{\partial p}{\partial\mu} \right) \quad (1.8)$$

$$0 = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial U}{\partial\varphi} - \frac{\partial p}{\partial\varphi} \right) \quad (1.9)$$

$$-\omega(\mu)^2 r^2 = r \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{\rho(\mu)} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + 2(a^2 + \mu) \left(\frac{\partial U}{\partial\mu} - \frac{1}{\rho(\mu)} \frac{\partial p}{\partial\mu} \right). \quad (1.10)$$

В силу симметрии сфероида его потенциал U не зависит от φ . Следовательно, уравнение (1.9) сводится к условию, что и давление не зависит от φ .

Утверждение 1. Система уравнений (1.8) и (1.10) сводится к уравнениям:

$$-\omega(\mu)^2 r = \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{\rho(\mu)} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (1.11)$$

$$0 = \frac{\partial U}{\partial\mu} - \frac{1}{\rho(\mu)} \frac{\partial p}{\partial\mu}, \quad (1.12)$$

Доказательство. Выразив $\omega(\mu)^2 r$ из уравнения (1.13) и подставив в (1.8), получаем следующее уравнение:

$$2(a^2 + \mu) \left(\frac{1}{r} - \frac{(b^2 + \mu)r}{(a^2 + \mu)^2 - r^2(a^2 - b^2)} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial\mu} - \frac{1}{\rho(\mu)} \frac{\partial p}{\partial\mu} \right) = 0.$$

Учитывая (1.5), получаем $\frac{\partial U}{\partial\mu} - \frac{1}{\rho(\mu)} \frac{\partial p}{\partial\mu} = 0$. Тогда уравнения (1.8) и (1.10) становятся линейно зависимыми и сводятся к уравнению $-\omega(\mu)^2 r = \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{\rho(\mu)} \frac{\partial p}{\partial r}$. Таким образом, получаем систему уравнений (1.11) и (1.12), что и требовалось доказать. \square

Для поля скоростей (1.7) уравнение непрерывности (1.2) выполняется тождественно, уравнение Пуассона (1.3) принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \frac{2(a^2 + \mu)}{(a^2 + \mu)^2 - r^2(a^2 - b^2)} \left((a^2 + 2b^2 + 3\mu) \frac{\partial U}{\partial\mu} + 2(b^2 + \mu) \left(r \frac{\partial^2 U}{\partial\mu\partial r} + (a^2 + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial^2\mu} \right) \right) = -4\pi G\rho. \quad (1.13)$$

§ 2. Решение уравнений гидродинамики и уравнения Пуассона

Таким образом, учитывая предыдущие рассуждения, интересующее нас решение должно описываться следующей системой трех уравнений для неизвестных $\omega(\mu)$, $U(r, \mu)$, $p(r, \mu)$:

$$-\omega(\mu)^2 r = \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{\rho(\mu)} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2.1)$$

$$0 = \frac{\partial U}{\partial\mu} - \frac{1}{\rho(\mu)} \frac{\partial p}{\partial\mu}, \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{2(a^2 + \mu)}{(a^2 + \mu)^2 - r^2(a^2 - b^2)} \left((a^2 + 2b^2 + 3\mu) \frac{\partial U}{\partial \mu} + 2(b^2 + \mu) \left(r \frac{\partial^2 U}{\partial \mu \partial r} + (a^2 + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2} \right) \right) = -4\pi G \rho(\mu). \quad (2.3)$$

Будем также полагать, что давление p меняется непрерывно и на поверхности принимает постоянное значение:

$$p|_{\mu_0} = p_0. \quad (2.4)$$

Утверждение 2. Уравнения (2.1)–(2.3) имеют решение $\omega(\mu)$ тогда и только тогда, когда потенциал внутри сфероида имеет следующий вид :

$$U = r^2 f_i(\mu) + g_i(\mu). \quad (2.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продифференцируем уравнение (2.1) по μ . Меняя порядок дифференцирования³, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \mu} (\omega(\mu)^2 \rho(\mu) r) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial p}{\partial \mu} \right) - \rho'(\mu) \frac{\partial U}{\partial r} - \rho(\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U}{\partial \mu} \right).$$

Выражая $\frac{\partial p}{\partial \mu}$ из (2.2) и подставляя в предыдущее выражение, имеем

$$\frac{\partial}{\partial \mu} (\omega(\mu)^2 \rho(\mu) r) = -\rho'(\mu) \frac{\partial U}{\partial r},$$

Интегрируя с учетом граничного условия (2.4), получим

$$\omega(\mu)^2 \rho(\mu) r = -\rho(\mu_0) \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) |_{\mu=\mu_0} + \int_{\mu}^{\mu_0} \rho'(\mu) \frac{\partial U}{\partial r} d\mu \quad (2.6)$$

откуда следует, что потенциал должен иметь вид (2.5). □

Учитывая (2.5) и (2.3), из уравнений (2.6) и (2.2) находим

$$\omega(\mu)^2 = -\frac{\rho(\mu_0)}{\rho(\mu)r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{\mu=\mu_0} + \frac{1}{\rho(\mu)r} \int_{\mu}^{\mu_0} \rho'(\mu) \frac{\partial U}{\partial r} d\mu, \quad (2.7)$$

$$p = p_0 - \rho(\mu_0) U_{\mu=\mu_0} + \rho(\mu) U + \int_{\mu}^{\mu_0} \rho'(\mu) U d\mu, \quad (2.8)$$

$$U = r^2 f_i(\mu) + g_i(\mu). \quad (2.9)$$

Можно показать, что система уравнений (2.7)–(2.8) обладает следующим интегралом:

$$p = \rho(\mu) U + \frac{1}{2} \omega(\mu)^2 \rho(\mu) r^2 + \text{const.} \quad (2.10)$$

Действительно, проинтегрировав (2.7) по r , получим

$$\frac{1}{2} \omega(\mu)^2 \rho(\mu) r^2 = -\rho(\mu_0) U_{\mu=\mu_0} + \int_{\mu}^{\mu_0} \rho'(\mu) U d\mu + \text{const.}$$

Выражая $\int_{\mu}^{\mu_0} \rho'(\mu) U d\mu$ и подставляя в (2.8), получаем (2.10).

³По теореме Шварца, чтобы смешанные производные были равны, достаточно, но не необходимо, чтобы функция $\frac{\partial p}{\partial \mu}$ была непрерывна. Как следует из (2.8), когда $\rho(\mu)$ — непрерывная функция, то давление p и $\frac{\partial p}{\partial \mu}$ непрерывны, но когда функция $\rho(\mu)$ имеет конечный скачок, давление p непрерывно, так как интегрирование приводит к сглаживанию функции, а $\frac{\partial p}{\partial \mu}$ уже имеет конечный скачок.

Покажем теперь, что уравнение Пуассона, определяющее потенциал внутри сфероида действительно имеет решение в форме (2.9). Для этого, подставляя потенциал в виде (2.9) в уравнение Пуассона и приравнявая коэффициенты при степенях r^2 и r^0 , получаем систему дифференциальных уравнений для определения $f_i(\mu)$ и $g_i(\mu)$:

$$f_i''(\mu) + \frac{(a^2 + 6b^2 + 7\mu)}{2(a^2 + \mu)(b^2 + \mu)} f_i'(\mu) - \frac{(a^2 - b^2)}{(a^2 + \mu)^2(b^2 + \mu)} f_i(\mu) = \frac{\pi G\rho(\mu)(a^2 - b^2)}{(a^2 + \mu)^2(b^2 + \mu)}, \quad (2.11)$$

$$g_i''(\mu) + \frac{(a^2 + 2b^2 + 3\mu)}{2(a^2 + \mu)(b^2 + \mu)} g_i'(\mu) = -\frac{\pi G\rho(\mu) + f_i(\mu)}{(b^2 + \mu)}. \quad (2.12)$$

После перехода к новой переменной

$$x = \frac{a^2 - b^2}{b^2 + \mu} \quad (2.13)$$

система уравнений (2.11)–(2.12) принимает вид

$$2x(x+1)^2 f_i(x)'' + 3(x^2 - 1) f_i(x)' - 2f_i(x) = 2\pi G\rho(x). \quad (2.14)$$

$$2(x+1)xg_i''(x) + (3x+1)g_i'(x) = -\frac{2(x+1)(a^2 - b^2)(\pi G\rho(x) + f_i(x))}{x^2}. \quad (2.15)$$

Утверждение 3. Система уравнений (2.14), (2.15) имеет следующее решение:

$$f_i(x) = C_1 \frac{x+3}{x+1} + C_2 \frac{(x+3) \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) - 3\sqrt{x}}{x+1} + \frac{(x+3) \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) - 3\sqrt{x}}{x+1} \int \frac{(x+3)\pi G\rho(x)}{2x^{5/2}} dx - \frac{x+3}{x+1} \int \frac{\pi G\rho(x)((x+3) \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) - 3\sqrt{x})}{2x^{5/2}} dx \quad (2.16)$$

$$g_i(x) = 2C_3 \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) + C_4 - \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} \left(\int \frac{(a^2 - b^2)(\pi G\rho(x) + f_i(x))(x+1)}{x^{5/2}} dx \right) dx. \quad (2.17)$$

Доказательство. Найдем решение уравнения (2.14). Рассмотрим однородное уравнение

$$2x(x+1)^2 f_i(x)'' + 3(x^2 - 1) f_i(x)' - 2f_i(x) = 0.$$

Так как все особые точки решения уравнения находятся в его коэффициентах, решение будем искать в виде

$$f_i(x) = \frac{y(x)}{x+1}.$$

На функцию $y(x)$ получаем следующее уравнение:

$$2x(x+1)y(x)'' - (x+3)y(x)' + y(x) = 0.$$

Это уравнение имеет частное решение в виде полинома $y_1 = x+3$. Получим второе линейно независимое решение по формуле Лиувилля–Остроградского:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{\int \frac{x+3}{2x(x+1)} dx}}{y_1^2} dx = (x+3) \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) - 3\sqrt{x}.$$

В итоге получаем следующее решение однородного уравнения: $f_i(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$, где

$$f_1(x) = \frac{x+3}{x+1}, \quad f_2(x) = \frac{(x+3) \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) - 3\sqrt{x}}{x+1}.$$

Решение неоднородного уравнения (2.14) можно определить методом вариации произвольной постоянной. Для функций C'_1 и C'_2 получаем следующие уравнения:

$$f_1 C'_1 + f_2 C'_2 = 0; \quad f'_1 C'_1 + f'_2 C'_2 = \frac{\pi G \rho(x)}{x(x+1)^2}.$$

Откуда

$$C'_1 = -\frac{f_2 \pi G \rho(x)}{x(x+1)^2}, \quad C'_2 = \frac{f_1 \pi G \rho(x)}{x(x+1)^2}.$$

В итоге имеем следующее решение уравнения (2.14):

$$f_i(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + f_2(x) \int f_1(x) g(x) \frac{dx}{W} - f_1 \int f_2(x) g(x) \frac{dx}{W},$$

где

$$g(x) = \frac{\pi G \rho(x)}{(x+1)^2 x}, \quad W = \frac{2x^{3/2}}{(x+1)^3} \text{ — определитель Вронского.}$$

Решение уравнения (2.15) будем искать методом Бернулли в виде $g'_i = u(x)v(x)$. На функции $v(x)$ и $u(x)$ получаем следующие уравнения:

$$v(x)' + \frac{3x+1}{2x(x+1)}v(x) = 0, \quad u(x)' = -\frac{(a^2 - b^2)(\pi G \rho(x) + f_i(x))(x+1)}{x^{5/2}},$$

которые имеют следующие решения:

$$v(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}, \quad u(x) = \int -\frac{(a^2 - b^2)(\pi G \rho(x) + f_i(x))(x+1)}{x^{5/2}} dx + C_3.$$

Учитывая

$$g(x) = \int u(x)v(x) dx + C_4,$$

получаем решение (2.17), что и требовалось доказать. □

Вне сфероида потенциал U удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta U = 0.$$

Будем искать решение этого уравнения также в виде (2.5). Тогда на функции $f_e(x)$ ⁴ и $g_e(x)$ получаем следующие уравнения:

$$2x(x+1)^2 f_e(x)'' + 3(x^2 - 1) f_e(x)' - 2f_e(x) = 0, \tag{2.18}$$

$$2(x+1)x g_e(x)'' + (3x+1) g_e(x)' = -\frac{2(x+1)(a^2 - b^2) f_e(x)}{x^2}. \tag{2.19}$$

Уравнения (2.18) и (2.19) имеют следующие решения:

$$f_e(x) = C_5 \frac{x+3}{x+1} + C_6 \frac{(x+3) \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) - 3\sqrt{x}}{x+1}; \tag{2.20}$$

$$g_e(x) = -\frac{2((a^2 - b^2)C_6(x-1) - C_7x)}{x} \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) + \frac{2(a^2 - b^2)(C_5 - C_6\sqrt{x})}{x} + C_8. \tag{2.21}$$

⁴Индекс e указывает, что это потенциал вне сфероида.

Перейдя в (2.16), (2.17), (2.20) и (2.21) от переменной x к μ , получаем

$$f_i(\mu) = C_2 \left(\frac{a^2 + 2b^2 + 3\mu}{a^2 + \mu} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + \mu}} \right) - \frac{3\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{b^2 + \mu}}{a^2 + \mu} \right) + C_1 \frac{a^2 + 2b^2 + 3\mu}{a^2 + \mu} + \Psi(\mu), \quad (2.22)$$

$$g_i(\mu) = 2C_3 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + \mu}} \right) + C_4 + \Phi(\mu), \quad (2.23)$$

где $\Psi(\mu)$, $\Phi(\mu)$ — интегралы в уравнениях (2.16), (2.17),

$$f_e(\mu) = C_6 \left(\frac{a^2 + 2b^2 + 3\mu}{a^2 + \mu} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + \mu}} \right) - \frac{3\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{b^2 + \mu}}{a^2 + \mu} \right) + C_5 \frac{a^2 + 2b^2 + 3\mu}{a^2 + \mu}, \quad (2.24)$$

$$g_e(\mu) = 2C_5(b^2 + \mu) - 2C_6 \left((a^2 - 2b^2 - \mu) \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + \mu}} \right) + \sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{b^2 + \mu} \right) + 2C_7 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + \mu}} \right) + C_8. \quad (2.25)$$

Для определения констант воспользуемся следующими соображениями.

1. Функция (2.22) при $\mu = -b^2$ $f_i(\mu)$ не имеет особенностей. Производная

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial \mu} = & \frac{C_2}{a^2 + \mu} \left(\frac{3\sqrt{a^2 - b^2}}{2\sqrt{b^2 + \mu}} - 3 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{b^2 + \mu}} \right) + \frac{(a^2 + 2b^2 + 3\mu)\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{b^2 + \mu}(a^2 + \mu)} \right) - \\ & - \frac{C_2}{(a^2 + \mu)^2} \left(3\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{b^2 + \mu} - (a^2 + 2b^2 + 3\mu) \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{b^2 + \mu}} \right) \right) + \\ & + \frac{3C_1}{a^2 + \mu} - \frac{C_1(a^2 + 2b^2 + 3\mu)}{(a^2 + \mu)^2} + \frac{\partial \Psi(\mu)}{\partial \mu}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

в точке $\mu = -b^2$ стремится к $+\infty$, то есть имеет особенность, для устранения которой полагаем $C_2 = 0$.

2. Аналогично, производная

$$\frac{\partial g_i}{\partial \mu} = -C_3 \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{b^2 + \mu}(a^2 + \mu)} + C_4 + \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \quad (2.27)$$

в точке $\mu = -b^2$ имеет особенность, для устранения которой полагаем $C_3 = 0$.

3. Также учтем, что потенциал на бесконечности стремится к нулю, то есть

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \infty} f_e &= 3C_5 = 0, \\ \lim_{\mu \rightarrow \infty} g_e &= C_8 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в выражениях для потенциала внутри сфероида (2.22), (2.23) и вне сфероида (2.24), (2.25) остается четыре произвольные постоянные. Будем определять их из условий непрерывности потенциала и его первой производной на границе сфероида.

§ 3. Однородный сфероид

Покажем, что полученное в общем виде решение содержит известное решение сфероида Маклорена, который является частным случаем гомофокального сфероида при $\rho(\mu) = \text{const}$. Выражение для угловой скорости (2.7) принимает следующий вид:

$$\omega^2 = -2f_i(\mu)|_{\mu=0}. \tag{3.1}$$

Вычислим гравитационный потенциал сфероида Маклорена. Для него уравнения (2.22), (2.23), (2.24) и (2.25) принимают вид

$$f_i = C_1 \frac{a^2 + 2b^2 + 3\mu}{a^2 + \mu} + \frac{2\pi G\rho(b^2 + \mu)}{a^2 + \mu}, \quad g_i = -2C_1(b^2 + \mu) + C_4 - 2\pi G\rho(b^2 + \mu),$$

$$f_e = \frac{C_6}{a^2 + \mu} \left((a^2 + 2b^2 + 3\mu) \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + \mu}} \right) - 3\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{b^2 + \mu} \right),$$

$$g_e = 2C_6 \left((a^2 - 2b^2 - \mu) \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + \mu}} \right) + 2\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{b^2 + \mu} \right) +$$

$$+ 2C_7 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + \mu}} \right).$$

Из условия непрерывности потенциала при $\mu = 0$ получаем

$$C_1 = \frac{\pi G\rho b}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \left(b\sqrt{a^2 - b^2} - a^2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}} \right) \right), \quad C_4 = \frac{2a^2 b \pi G\rho}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}} \right).$$

Тогда из (3.1) получаем

$$\omega^2 = \frac{2b\rho G\pi(a^2 + 2b^2)}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) - \frac{6b^2 \rho G\pi}{a^2 - b^2}. \tag{3.2}$$

Переходя к эксцентриситету $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$, получаем конечное выражение для угловой скорости (рис. 1):

$$\frac{\omega^2}{2\pi G\rho} = \frac{\sqrt{1 - e^2}(3 - 2e^2)}{e^3} \arcsin(e) - \frac{3(1 - e^2)}{e^2}. \tag{3.3}$$

Выражение (3.3) совпадает с известным выражением для угловой скорости Маклорена [4].

Давление внутри сфероида Маклорена получаем из (2.8):

$$p = p_0 - \rho(r^2(f(0) - f(\mu)) + g(0) - g(\mu)).$$

Подставляя потенциал, в конечном итоге получаем

$$p = p_0 - \frac{2\pi G\rho^2 \mu (r^2(a^2 - b^2) - (a^2(a^2 + \mu)))}{(a^2 + \mu)(a^2 - b^2)} \times$$

$$\times \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) - 1 \right). \tag{3.4}$$

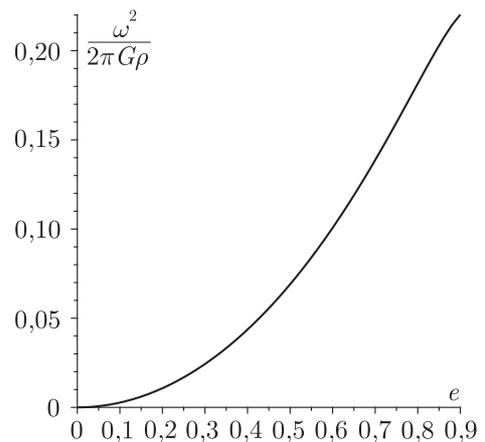


Рис. 1. Угловая скорость $\frac{\omega^2}{2\pi G\rho}$ сфероида Маклорена

§ 4. Сфероид, состоящий из двух гомофокальных слоев

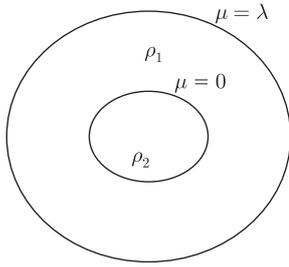


Рис. 2. Сфероид состоит из двух однородных оболочек. Внутренняя оболочка с плотностью ρ_2 и координатой на поверхности $\mu = 0$. Внешняя оболочка с плотностью ρ_1 и координатой на поверхности $\mu = \lambda = \text{const}$, $\rho_2 > \rho_1$

Рассмотрим сфероид с кусочно-постоянной плотностью (рис. 2). Будем обозначать характеристики, относящиеся к внешнему сфероиду, с индексом 1, а к внутреннему сфероиду — с индексом 2. Малые полуоси и эксцентриситеты сфероидов вследствие гомофокальности удовлетворяют соотношениям

$$a_1^2 - b_1^2 = a_1^2 e_1^2, \quad a_2^2 - b_2^2 = a_2^2 e_2^2, \quad \frac{e_2}{e_1} = \frac{a_1}{a_2}, \quad e_2 > e_1.$$

Потенциал на поверхности первой и второй оболочки будем искать как сумму потенциалов однородных сфероидов (рис. 3). В этом случае уравнения (2.7) и (2.8) примут вид

$$\omega(\mu)^2 = -\frac{2\rho(\lambda)f(\lambda)}{\rho(\mu)} + \frac{2}{\rho(\mu)} \int_{\mu}^{\lambda} \rho(\mu)' f(\mu) d\mu, \quad (4.1)$$

$$p = -\rho(\lambda)(r^2 f(\lambda) + g(\lambda)) + \rho(\mu)(r^2 f(\mu) + g(\mu)) + \int_{\mu}^{\lambda} \rho(\mu)'(r^2 f(\mu) + g(\mu)) d\mu, \quad (4.2)$$

где $\rho(\mu) = (\rho_1 - \rho_2)\chi(\mu) + \rho_2$, $\chi(\mu)$ — функция Хэвисайда: $\chi(\mu) = 0$ при $\mu < 0$ и $\chi(\mu) = 1$ при $\mu \geq 0$.

Покажем, что угловые скорости внешнего ω_1^2 и внутреннего ω_2^2 сфероидов удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\omega_1^2}{2\pi G \rho_1} = \left(\frac{\sqrt{1-e_1^2}(3-2e_1^2)}{e_1^3} + \frac{\sqrt{1-e_2^2}(3-2e_2^2)}{e_2^3} \varepsilon \right) \arcsin(e_1) - \frac{3(1-e_1^2)}{e_1^2} - \frac{3e_1\sqrt{1-e_2^2}\sqrt{1-e_1^2}}{e_2^3} \varepsilon, \quad (4.3)$$

$$\frac{\omega_2^2}{2\pi G \rho_1} (\varepsilon + 1) = \frac{\omega_1^2}{2\pi G \rho_1} + \varepsilon^2 \left(\frac{\sqrt{1-e_2^2}(3-2e_2^2)}{e_2^3} \arcsin(e_2) - \frac{3(1-e_2^2)}{e_2^2} \right) + \varepsilon \left(\frac{\sqrt{1-e_1^2}(3-2e_1^2)}{e_1^3} \arcsin(e_1) - \frac{3-e_1^2-2e_2^2}{e_1^2} \right), \quad (4.4)$$

где e_2 и e_1 эксцентриситеты внутреннего и внешнего сфероидов, $\varepsilon = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}$.

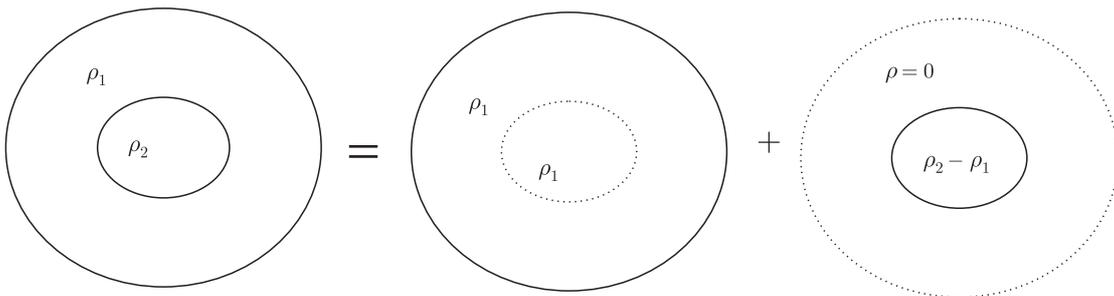


Рис. 3. Потенциал определяется как сумма потенциалов сфероида с плотностью ρ_1 и другого сфероида с плотностью $\rho_2 - \rho_1$

Действительно, для внешней поверхности внешней оболочки ($\mu = \lambda$) уравнение (4.1) принимает вид

$$\omega_1^2 = -2f(\lambda),$$

$$f(\lambda) = \pi G \rho_1 \left(\frac{3b_1^2}{(a_1^2 - b_1^2)} - \frac{a_1^2 b_1 (a_1^2 + 2b_1^2)}{a_1^2 (a_1^2 - b_1^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a_1^2 - b_1^2}{b_1^2}} \right) - \frac{\varepsilon a_2^2 b_2 a_1^2 (a_1^2 + 2b_1^2)}{a_1^2 (a_2^2 - b_2^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a_2^2 - b_2^2}{b_2^2 + \lambda}} \right) + \frac{3\varepsilon a_2^2 b_2 \sqrt{b_2^2 + \lambda}}{(a_2^2 - b_2^2) \sqrt{a_2^2 + \lambda}} \right).$$

Перейдя к эксцентриситетам e_1 и e_2 , получим (4.3).

Для внешней оболочки внутреннего сфероида ($\mu = 0$) уравнение (4.1) принимает вид

$$\omega_2^2 \rho_2 = -2f(\lambda) \rho_1 + 2(\rho_1 - \rho_2) \int_0^\lambda \delta(\mu) f(\mu) d\mu.$$

Интегрируя, после элементарных преобразований, получаем

$$\omega_2^2 (\varepsilon + 1) = \omega_1^2 - 2\varepsilon f(0),$$

$$f(0) = \pi G \rho_1 \left(\varepsilon \left(\frac{3(1 - e_2^2)}{e_2^2} - \frac{\sqrt{1 - e_2^2} (3 - 2e_2^2)}{e_2^3} \operatorname{arcsin}(e_2) \right) - \frac{\sqrt{1 - e_1^2} (3 - 2e_1^2)}{e_1^3} \operatorname{arcsin}(e_1) + \frac{3 - e_1^2 - 2e_2^2}{e_1^2} \right).$$

Зависимости угловых скоростей внутреннего и внешнего сфероида от эксцентриситеты e_1 приведены на рис. 4. Из рисунка видно, что угловая скорость внутренней оболочки всегда больше скорости внешней оболочки. Причем при увеличении ε , то есть разности плотностей, разрыв между скоростями увеличивается.

Полученные значения угловых скоростей внешнего и внутреннего сфероидов совпадают с полученными в работе [1], в которой гидродинамические уравнения рассматриваются в декартовой системе координат, что приводит к громоздким преобразованиям и выражениям. Кроме того, полученные в работе [1] результаты нельзя обобщить на случай произвольного распределения плотности.

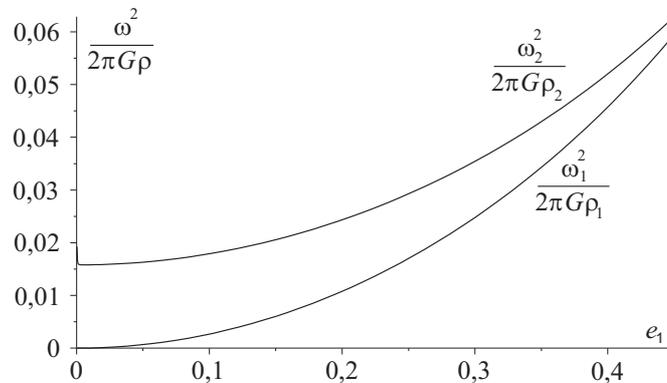


Рис. 4. Графики зависимости угловых скоростей внутренней оболочки $\frac{\omega_2^2}{2\pi G \rho_2}$ и внешней $\frac{\omega_1^2}{2\pi G \rho_1}$ оболочек в зависимости от e_1 ($\varepsilon = 0.1, e_2 = 0.5$)

§ 5. Сфероид с непрерывным распределением плотности

Планеты, согласно современным представлениям, состоят из ядра, плотность которого имеет постоянное значение, и оболочки, плотность которой убывает к поверхности. Поэтому рассмотрим сфероид с непрерывным распределением плотности $\rho(\mu)$, состоящий из ядра с постоянной плотностью ρ_0 , и оболочки, в которой плотность непрерывно убывает и на поверхности равна $\rho_0/2$ (рис. 5, 6):

$$\rho(\mu, \lambda) = \frac{\rho(-2\mu^4 - 5b^2\mu^3 - 3b^4\mu^2 + 2\lambda^2(2\lambda + 3b^2)(\lambda + b^2))}{\lambda^2(3b^4 + 5\lambda b^2 + 2\lambda^2)}, \quad (5.1)$$

где b характеризует размеры ядра, λ характеризует размеры внешней оболочки.

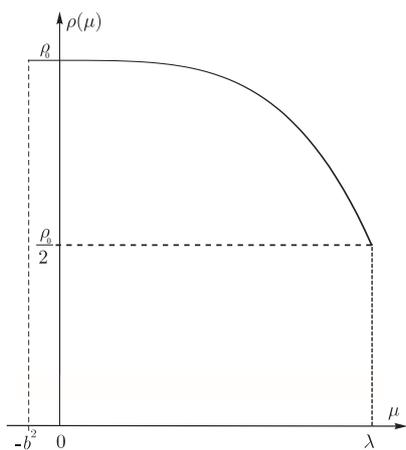


Рис. 5. Функция плотности 5.1 при $b = 2$, $\lambda = 40$

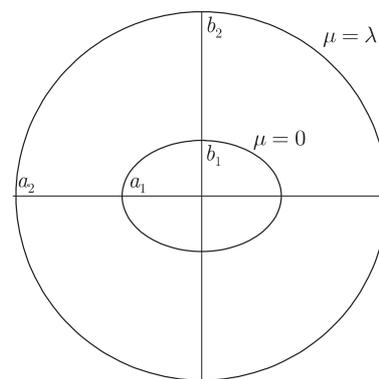


Рис. 6. Сфероид в сечении плоскостью, проходящей через ось вращения, $a_1 = 3$, $b_1 = 2$, $\lambda = 40$, $a_2 = \sqrt{a_1^2 + \lambda} = 7$, $b_2 = \sqrt{b_1^2 + \lambda} = 6.5$

Проведя вычисления, аналогичные тем, которые были проведены для сфероида Маклорена и сфероид с кусочно-постоянной плотностью (в связи с большими выкладками здесь их не приводим), получаем изменение угловой скорости (2.7) в зависимости от параметра слоя μ . Эта зависимость приведена на рис. 7.

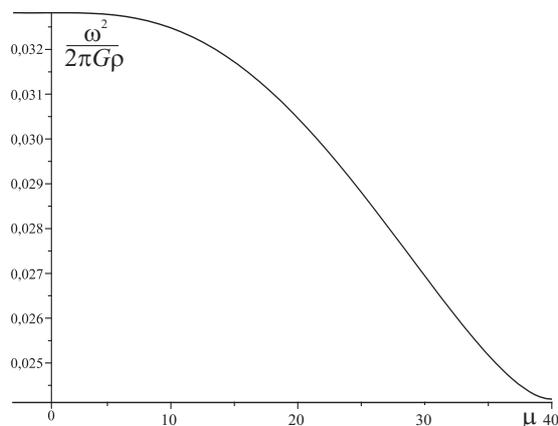


Рис. 7. Изменение угловой скорости $\frac{\omega^2}{2\pi G\rho}$ в зависимости от параметра слоя μ для сфероида (рис.6) с плотностью (5.1)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Montalvo D., Martinez F. J., Cisneros J. On equilibrium figures for ideal fluids in the form of confocal spheroids rotating with common and different angular velocities. 1982.
2. Véronnet A. Rotation de l'ellipsoïde heterogene et figure exacte de la Terre // Journ. de Mathematiques pures et appliquees. 1919.
3. Аппель П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 376 с.
4. Литтлтон Р. А. Устойчивость вращающихся масс жидкости. Москва; Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 240 с.
5. Лихтенштейн Л. Фигуры равновесия вращающейся жидкости. Москва; Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 252 с.
6. Ляпунов А. М. Собрание сочинений. Т. 3. 1959. 376 с.
7. Пицетти П. Основы механической теории фигуры планет. Москва, 1933. 170 с.
8. Чаплыгин С. А. Установившееся вращение жидкого неоднородного сфероïда. Собрание сочинений. Т. 2. Гидродинамика. Аэродинамика. 1948. С. 576–585.

Поступила в редакцию 01.08.11

I. A. Bizyaev, T. B. Ivanova

Figures of equilibrium of liquid self-gravitating inhomogeneous mass

We consider the inhomogeneous self-gravitating liquid spheroid with confocal stratification which rotates around the minor semiaxis and is in equilibrium. General relationships for pressure, angular velocity and gravitational potential of the spheroid with any density function are obtained. Special cases of piecewise constant and continuous density functions are analyzed.

Keywords: self-gravitating fluid, confocal stratification, spheroid, Euler equations.

Mathematical Subject Classifications: 70F99

Бизяев Иван Алексеевич, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4). E-mail: bizaev_90@mail.ru

Иванова Татьяна Борисовна, кафедра теоретической физики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4). E-mail: tbesp@udm.ru

Bizyaev Ivan Alekseevich, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1 (build. 4), Izhevsk, 426034, Russia

Ivanova Tat'yana Borisovna, department of theoretical physics, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1 (build. 4), Izhevsk, 426034, Russia