

УДК 532.511

© К. С. Колегов

## СРАВНЕНИЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ И НЕСТАЦИОНАРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕЧЕНИЙ В ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ КАПЛЕ С УЧЕТОМ ВЯЗКОСТИ<sup>1</sup>

В работе определены границы применимости квазистационарного подхода в моделировании динамики жидкости, испаряющейся с подложки (при постоянной площади контакта) и в открытой цилиндрической ячейке капли. Для сравнения рассматривается нестационарная модель. Нестационарная система уравнений (с полной формой записи уравнения движения) и квазистационарная система уравнений решаются численно. Расчеты проведены при различных значениях скорости испарения и капиллярного числа на примере капель воды и этиленгликоля. Анализ расчетных данных показал, что на финальной стадии испарения капли чистого растворителя результаты, полученные с использованием двух моделей, расходятся. На конечном этапе процесса скорость радиального течения, вычисленная с помощью нестационарной модели, точнее согласуется с экспериментальными данными, чем результат, полученный на базе квазистационарного подхода. Этот факт объясняется тем, что на последней стадии испарения квазистационарное приближение плохо работает ввиду стремительного относительного изменения толщины пленки и больших значений скоростей.

*Ключевые слова:* испаряющаяся капля, радиальное течение, капля на подложке, пиннинг, открытая цилиндрическая ячейка.

### Введение

Исследование течения компенсационной природы в высыхающей капле — задача актуальная, она интересна как с теоретической, так и с практической точки зрения. При высыхании капель на подложке наблюдаются различные явления, например «эффект кофейных колец» [1], заключающийся в формировании кольцевых структур, или образование белкового валика [2, 3] в случае капли биожидкости. У капельных систем есть приложения в различных сферах деятельности: производство материалов и создание структурированных поверхностей на микро- и наноуровне [4], медицина и биофизика [5, 6], разработка новых технических устройств [7] и другие. Таким образом, изучение динамических процессов, протекающих в рассматриваемых открытых системах, крайне важно, в том числе и исследование течения жидкости, вызванное испарением. Подробно узнать о текущем состоянии дел по теме исследования можно, к примеру, в обзорных работах [8, 9].

За последнее десятилетие появилось множество математических моделей, описывающих течения и массоперенос внутри испаряющихся на горизонтальной поверхности капель, последователей Фишера [10] и Дигана с соавторами [1]. Эти модели основаны на квазистационарном подходе и приближении смазки. В модели Дигана и др. [1] предполагается, что на протяжении всего процесса форма капли находится в равновесном состоянии, то есть является сферическим сегментом. Данный кинетический подход не отвечает на вопрос о силах, вызывающих течения. Таковыми силами являются силы поверхностного натяжения, которые приводят к появлению течений именно из-за отклонения свободной поверхности капли от равновесной формы. В работе Фишера [10] используется упрощенная система уравнений, полученная из уравнений Навье–Стокса с помощью приближения смазки. В предыдущей работе [11] изучался нестационарный подход математического описания динамики жидкости в испаряющейся капле. Одномерная

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП (проект 14.А18.21.2086) и РФФИ (проект 13–01–90711). Автор выражает благодарность проф., д. ф.-м. н. Ю. Ю. Тарасевичу и проф., д. ф.-м. н. А. И. Лобанову за советы и замечания, высказанные при чтении рукописи.

нестационарная модель [11] включает уравнение неразрывности и уравнение движения для системы с переменной массой. В [11] для тестовых расчетов использовалась укороченная форма записи уравнения движения (без учета вязкости), что позволительно лишь при малых значениях капиллярного числа. Результаты моделирования позволили сравнить квазистационарный и нестационарный подходы. При малых значениях капиллярного числа результаты, полученные на базе двух моделей, практически не отличаются.

Целью данной работы является установление границ применимости квазистационарной модели. Для достижения цели необходимо провести анализ параметров задачи и сравнить результаты, полученные на базе нестационарного и квазистационарного подходов, с экспериментальными данными.

## § 1. Физическая постановка задачи

Рассмотрим два случая:

- 1) капля чистого растворителя покоится на горизонтальном непроницаемом основании в режиме закрепленной трехфазной границы «жидкость–газ–подложка» (пиннинг);
- 2) жидкость находится в открытой цилиндрической ячейке.

Внешние условия следующие: движение воздушных масс отсутствует, нормальное атмосферное давление, комнатная температура, гидрофильная поверхность основания, температуры подложки (ячейки), воздуха и жидкости приблизительно равные.

Рассматривается цилиндрически симметричная капля. Ось  $z$  направлена по нормали к подложке в центре капли. Основание (дно ячейки) соответствует  $z = 0$ . В силу осевой симметрии из внимания исключаем угловую переменную. Считаем, что толщина жидкого слоя мала. Высота тонкой капли много меньше диаметра основания (ячейки), поэтому ограничимся рассмотрением одномерной модели с усредненной по толщине жидкого слоя радиальной скоростью течения. Таким образом, задачу опишем в пространственно-временных координатах  $(r, t)$ , где  $0 \leq r \leq R$ ,  $R$  — радиус основания капли (ячейки), ноль соответствует центру основания капли,  $t \geq 0$ .

Ограничимся рассмотрением течения компенсационной природы, исключив из внимания термокапиллярные и термогравитационные потоки [12, 13]. Критерий, определяющий интенсивность термокапиллярного течения, называется числом Марангони [14]:

$$\text{Ma} = \frac{\lambda L D_{vap} (1 - H) c_{sat}(T_a)}{\theta(0) \sigma(T_a) k},$$

где  $T_* = T_a$  — температура внешней среды,  $\theta(t)$  — краевой угол,  $c_{sat}(T_*)$  — концентрация насыщенного пара вдоль свободной поверхности капли,  $\sigma(T_*)$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\lambda = -d\sigma/dT_*$ ,  $H$  — относительная влажность,  $D_{vap}$  — коэффициент диффузии пара в атмосферу,  $L$  — удельная теплоемкость,  $k$  — коэффициент теплопроводности жидкости. В [14] приведена оценка чисел Марангони для капель ацетона ( $\text{Ma} = 0.14$ ), метанола ( $\text{Ma} = 7.6 \cdot 10^{-2}$ ) и воды ( $\text{Ma} = 2.6 \cdot 10^{-3}$ ). Оценка показала, что для воды скорость течения Марангони пренебрежимо мала по сравнению с такими летучими жидкостями, как ацетон и метанол. Число Рэлея [8, 13]  $\text{Ra} = \frac{g\beta R^3 \Delta T}{\nu \chi}$  определяет термогравитационную неустойчивость ( $g$  — ускорение свободного падения,  $\beta$  — коэффициент теплового расширения,  $\Delta T$  — разность температуры на свободном краю и вершине капли,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости,  $\chi$  — температуропроводность). Для капли воды при комнатной температуре  $\nu \approx 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с [13],  $\beta \approx 1.94 \cdot 10^{-4}$  К<sup>-1</sup> [13],  $\Delta T \approx 0.3$  К [15],  $\chi \approx 1.44 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с [13]. При  $R = 0.5 \cdot 10^{-3}$  м в случае с каплей воды критерий  $\text{Ra} \approx 0.5$ . Условия для конвекции рэлеевского типа реализуются при достаточно сильном нагреве подложки или при быстром испарении жидкости, когда происходит значительное охлаждение свободной поверхности [8]. В рассматриваемом случае незатухающая конвекция во всем объеме с образованием ячеек Рэлея–Бенара не возникает. В случае тонкой капли температура вдоль толщины жидкого слоя практически

постоянная благодаря термодиффузии. Для капли воды высотой  $h_0 = 10^{-4}$  м время выравнивания температуры вдоль вертикальной составляющей примерно равно  $h_0^2/\chi \approx 0.07$  с.

Считаем, что размер капли не превышает капиллярную длину. В этом случае капиллярные силы доминируют над объемными. По этой причине силой тяжести пренебрегаем.

Полагаем медленное испарение, при котором градиент температуры мал. Незначительное изменение температуры вдоль поверхности капли и отсутствие в жидкости примесей позволяют ограничиться постоянным значением коэффициента поверхностного натяжения. Рассматривается несжимаемая жидкость.

## § 2. Уравнения математической модели

Нестационарная система уравнений [11] записывается как

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rhu)}{\partial r} = -\frac{Jl}{\rho}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\nu u}{r^2} + \frac{\nu r}{h} \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u}{r} \right), \quad (2.2)$$

где  $h(r, t)$  — высота капли,  $u(r, t)$  — скорость радиального течения,  $J(r, t)$  — плотность потока пара,  $P(r, t)$  — давление,  $l(r, t) = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial h}{\partial r} \right)^2}$ .

Для обезразмеривания (2.1) и (2.2) за основные величины с независимой размерностью выберем характерную длину  $L_c = R\varepsilon^2$  ( $\varepsilon = h_0/R$ ), плотность жидкости  $\rho$  и характерную скорость  $V_c$ . В качестве характерного значения скорости берем вязкую скорость  $V_c = \eta/(\rho L_c)$ , где  $\eta$  — динамическая вязкость,  $\eta = \nu\rho$ . С учетом выбранных масштабов введем характерный масштаб времени  $T_c = L_c/V_c$ . Выразим через основные размерные величины давление  $P = \rho V_c^2 \tilde{P}$ , плотность потока пара  $J = \rho V_c \tilde{J}$ . Входящие в уравнения размерные величины тогда будут представлены в виде  $u = \tilde{u}V_c$ ,  $r = \tilde{r}L_c$ ,  $h = \tilde{h}L_c$ ,  $t = T_c \tilde{t}$  (знаком  $\tilde{\phantom{x}}$  обозначены безразмерные величины). С учетом выбранных характерных параметров уравнения принимают безразмерный вид

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial(\tilde{r}\tilde{h}\tilde{u})}{\partial \tilde{r}} = -\tilde{J}l, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right) - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2} + \frac{\tilde{r}}{\tilde{h}} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}} \right). \quad (2.4)$$

Необходимо задать вид уравнения состояния. Воспользуемся уравнением Лапласа  $P = \sigma(1/R_1 + 1/R_2)$ , где  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы кривизны,  $R_1 = l^3 \left| \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} \right|^{-1}$ ,  $R_2 = rl \left| \frac{\partial h}{\partial r} \right|^{-1}$ . Если считать, что свободная поверхность капли является поверхностью положительной кривизны, то  $P = -\sigma \left( \frac{1}{l^3} \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{rl} \frac{\partial h}{\partial r} \right)$ . Безразмерное замыкающее соотношение для давления записывается как  $\tilde{P} = -\frac{1}{\text{Ca}} \left( \frac{1}{l^3} \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}l} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{r}} \right)$ , где капиллярное число  $\text{Ca} = \eta^2/(\rho\sigma L_c)$ . Для случая тонкой капли  $l \approx 1$ , тогда

$$\tilde{P} = -\frac{1}{\text{Ca}} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{r}} \right), \quad (2.5)$$

выражение (2.5) использовалось в [10]. С учетом  $l \approx 1$  уравнение неразрывности (2.3) примет вид

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial(\tilde{r}\tilde{h}\tilde{u})}{\partial \tilde{r}} = -\tilde{J}. \quad (2.6)$$

Приведем систему уравнений (2.4), (2.6) с замыкающим соотношением (2.5) к другому виду. Проинтегрируем производную от давления  $\text{Ca} \int_0^{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{r}} d\tilde{r} = - \int_0^{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{r}} \right) \right) d\tilde{r}$ , получим  $\text{Ca} \Delta \tilde{P} = - \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{r}} \right) \Big|_0^{\tilde{r}} = - \frac{1}{\tilde{r}} \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{r}} + \tilde{r} \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial \tilde{r}^2} \right) \Big|_0^{\tilde{r}}$ , где  $\Delta \tilde{P} = \tilde{P}(\tilde{r}, \tilde{t}) - \tilde{P}(0, \tilde{t})$ . С учетом граничного условия в центре  $\frac{\partial \tilde{h}(0, \tilde{t})}{\partial \tilde{r}} = 0$  [10] выражение примет вид  $\text{Ca} \tilde{r} \Delta \tilde{P} = - \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{r}} \right)$ .

Интегрируем еще раз  $\text{Ca} \int_0^{\tilde{r}} \tilde{r} \Delta \tilde{P} d\tilde{r} = - \tilde{r} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{r}}$ . Введем новую функцию  $\tilde{W} = \frac{1}{\tilde{r}} \int_0^{\tilde{r}} \tilde{r} \Delta \tilde{P} d\tilde{r}$ ,  $\tilde{W}$  — интегральное среднее (по радиальной координате) давление. Таким образом, получили уравнение

$$\tilde{W} = - \frac{1}{\text{Ca}} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{r}}. \quad (2.7)$$

На основании (2.5) и (2.7) градиент давления запишем как

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{r}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial (\tilde{r} \tilde{W})}{\partial \tilde{r}} \right). \quad (2.8)$$

Введем еще одно уравнение,

$$\tilde{\Psi} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}}, \quad (2.9)$$

описывающее скорость сдвига (градиент скорости). С учетом (2.7), (2.8) и (2.9) уравнение движения (2.4) примет вид

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \left( \tilde{u} - \frac{1}{\tilde{r}} + \frac{\text{Ca} \tilde{W}}{\tilde{h}} \right) \tilde{\Psi} = - \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial (\tilde{r} \tilde{W})}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\text{Ca} \tilde{W} \tilde{r} \tilde{u}}{\tilde{h} \tilde{r}^2} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2}. \quad (2.10)$$

В итоге система уравнений нестационарной модели включает (2.6), (2.7), (2.9) и (2.10).

Теперь рассмотрим одномерную квазистационарную модель, основанную на результатах [10]. Система уравнений этой модели включает (2.6) и (2.7) с замыкающим соотношением

$$\tilde{u} = - \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial (\tilde{r} \tilde{W})}{\partial \tilde{r}} \right) \frac{\tilde{h}^2}{3}. \quad (2.11)$$

Остается задать вид замыкающего соотношения для  $J$ . Плотность потока пара может изменяться в зависимости от условий окружающей среды (атмосферное давление, температура, влажность и т. п.). Для случая капли на подложке сравнение двух моделей проведем на примере модельного закона испарения [10]

$$\tilde{J} = \frac{1 - \exp(-A(\tilde{r} - \tilde{R})^2)}{K + \tilde{h}} E, \quad (2.12)$$

$E$ ,  $K$  и  $A$  — регулируемые параметры. Число  $A$  задает, как интенсивно  $J$  стремится к нулю на свободном краю капли, неравновесный параметр  $K$  определяет разность скорости испарения в центре капли и ее максимального значения вблизи периферии ( $K \rightarrow 0$  в случае быстро испаряющейся жидкости и  $K \rightarrow \infty$  для нелетучей жидкости), число испарения  $E$  задает интенсивность перехода жидкости в пар. В [10] для обезразмеривания плотности потока пара были взяты другие характерные величины, поэтому число испарения входило не в аппроксимационное выражение плотности потока пара, а непосредственно в уравнение неразрывности. Модельный закон испарения (2.12) использовался Фишером [10] для случая капли разбавленного коллоидного раствора в предположении, что частицы, накапливаясь около линии трехфазной границы, блокируют испарение. Скорее всего, обращение значения плотности потока

пара на линии контакта трех фаз в ноль характерно в общем для пиннинга (причиной фиксации свободной границы может быть наличие в растворе коллоидных частиц или шероховатость подложки). Данное предположение связано со следствием, вытекающим из уравнения неразрывности. Представим (2.6) в следующем виде:  $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} = -\tilde{h} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} - \tilde{u} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{r}} - \tilde{h} \tilde{u} - \tilde{J}$ . Получаем, что  $\tilde{J}(\tilde{R}, \tilde{t}) = 0$ , так как  $\tilde{h}(\tilde{R}, \tilde{t})$ ,  $\tilde{u}(\tilde{R}, \tilde{t})$  и  $\frac{\partial \tilde{h}(\tilde{R}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}}$  равны нулю. В противном случае ( $\tilde{J}(\tilde{R}, \tilde{t}) \neq 0$ ) свободная граница смещается и испарение происходит в режиме постоянного краевого угла.

При моделировании испарения жидкости из ячейки воспользуемся модельным законом [16]

$$\tilde{J} = \frac{1 - \exp\left(-m\sqrt{1 - \tilde{r}^2/\tilde{R}^2}\right)}{(1 - \exp(-m))\sqrt{1 - \tilde{r}^2/\tilde{R}^2}} E, \quad (2.13)$$

где  $m$  — положительное число. В данном случае из уравнения неразрывности (2.6) следует, что  $\tilde{J}(\tilde{R}, \tilde{t}) \neq 0$ , так как  $\tilde{h}(\tilde{R}, \tilde{t}) \neq 0$ .

### § 3. Граничные условия

Для решения задачи необходимо поставить начальные и граничные условия. В силу осевой симметрии

$$\frac{\partial \tilde{h}(0, \tilde{t})}{\partial \tilde{r}} = 0. \quad (3.1)$$

Высота капли на периферии

$$\tilde{h}(\tilde{R}, \tilde{t}) = 0. \quad (3.2)$$

Скорость радиального течения в центре капли и на свободной границе обращается в ноль [10, 15],

$$\tilde{u}(0, \tilde{t}) = \tilde{u}(\tilde{R}, \tilde{t}) = 0. \quad (3.3)$$

На границе  $\tilde{r} = 0$  производная градиента скорости

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}(0, \tilde{t})}{\partial \tilde{r}} = 0, \quad (3.4)$$

так как при  $r \rightarrow 0$   $u \sim r$  [11, 15]. Начальное условие для профиля капли запишем как

$$\tilde{h}(\tilde{r}, 0) = \varepsilon \tilde{R} \left(1 - (\tilde{r}/\tilde{R})^2\right), \quad (3.5)$$

так как считаем, что форма капли в виде сферического сегмента определяется капиллярными силами. Параболическое выражение (3.5) является хорошим приближением такой формы, если капля тонкая. Рассмотрим начальное условие для скорости течения. Испарение начинается сразу после нанесения капли на подложку. После размещения капли на горизонтальном основании происходит ее растекание, таким образом, в начальный момент времени течение присутствует [17]. Если сразу после размещения капли остановить ее испарение, накрыв колпаком, и подождать до момента, пока течение прекратится, а потом убрать колпак и считать этот момент началом изучаемого процесса, то

$$\tilde{u}(\tilde{r}, 0) = 0. \quad (3.6)$$

При рассмотрении жидкости в цилиндрической ячейке некоторые краевые условия изменятся. Вместо (3.2) и (3.5) получаем

$$\tilde{h}(\tilde{R}, \tilde{t}) = \tilde{h}(\tilde{r}, 0) = \varepsilon \tilde{R}, \quad (3.7)$$

так как в данном случае  $h_0$  — это не только начальная толщина жидкого слоя, но и высота ячейки. То есть считаем, что жидкость зафиксирована у верхней границы стенки ячейки (например, как в эксперименте [18]).

#### § 4. Параметры модели

При масштабировании в [10] использовались два характерных размера (высота и радиус основания капли). Зависимость между капиллярным числом данной работы и параметром [10] следующая:  $Ca = \varepsilon^2 Ca_f$  (индексом  $f$  обозначен параметр [10]). В расчетах Фишера [10] рассматриваются два предельных случая:  $Ca_f^{-1} \gg E$  и  $Ca_f^{-1} \approx E$ . Результаты моделирования [10] показали, что при  $Ca_f^{-1} \gg E$  форма капли практически неотличима от равновесной. Если же  $Ca_f^{-1} \approx E$ , то наблюдается значительное отклонение формы капли от сферического сегмента. Феномен объясняется тем, что при большом значении капиллярного числа испарение и вязкость доминируют над силой поверхностного натяжения [10]. Как это соотносится с экспериментом, неизвестно. Для капли воды Фишер получал значения  $Ca_f$  в диапазоне от  $10^{-2}$  до 10, изменяя геометрические параметры ( $\varepsilon$  и  $R$ ).

Для сравнения моделей рассмотрим капли двух различных химических составов: вода и этиленгликоль. Выбранные параметры задачи и физические свойства веществ приведены в таблице 1. Для капли воды параметры подобраны в соответствии с экспериментом [15], это случай, когда  $Ca \ll 1$ . В [15] измерялась скорость радиального течения в капле дистиллированной воды объемом  $0.12 \pm 0.3 \mu\text{l}$  с диаметром основания около 1 mm и начальной высотой капли около 0.18 mm. В эксперименте Риджера и др. [18] с испаряющейся из цилиндрической ячейки каплей этиленгликоля объемом около 193 pl, радиусом  $R \approx 100 \mu\text{m}$  и высотой  $h_0 \approx 6 \mu\text{m}$  также измерялась радиальная скорость. По сравнению с водой этиленгликоль — более вязкая и менее летучая жидкость. Высокая вязкость и малое значение аспектного отношения  $\varepsilon$  позволяют рассмотреть интересующий случай, когда  $Ca \gg 1$ .

**Таблица 1.** Физические свойства жидкостей (при температуре 20°C) и параметры задачи

Свойства/ параметры	Вода	Этиленгликоль
Вязкость, $\eta$ (сПа)	$10^{-3}$	$20 \cdot 10^{-3}$
Плотность, $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	998	1113
Коэффициент поверхностного натяжения, $\sigma$ (N/m)	$72.8 \cdot 10^{-3}$	$46.1 \cdot 10^{-3}$
Радиус основания капли, $R$ (m)	$0.6 \cdot 10^{-3}$	$10^{-4}$
Аспектное соотношение, $\varepsilon = h_0/R$	0.3	0.06
Капиллярное число, $Ca$	$2 \cdot 10^{-4}$	22

Капиллярная длина находится по формуле  $\sqrt{\sigma/(g\Delta\rho)}$ , где  $\Delta\rho$  — разность плотности жидкости и газа. Для этиленгликоля капиллярная константа приблизительно равняется  $2.1 \cdot 10^{-3}$  m, для воды —  $2.7 \cdot 10^{-3}$  m. Оценить размеры жидкости можно как  $\sqrt[3]{V}$ , где  $V$  — объем капли. Для капли на подложке  $V = \pi h_0^2 (3R_0 - h_0)/3$ ,  $R_0 = 0.5 (h_0 + R^2/h_0)$  — радиус сферы, в которую вписана капля. В случае с ячейкой  $V = h_0 \pi R^2$ . Объемы рассматриваемых жидкостей составляют примерно 0.2 и 100 pl. Получаем значения  $\sqrt[3]{V}$ , примерно равные  $5.73 \cdot 10^{-5}$  m и  $0.46 \cdot 10^{-3}$  m. Таким образом, рассматриваемые размеры соответствуют случаю, когда силой тяжести допустимо пренебречь.

Аспектное отношение в квазистационарном подходе, основанном на приближении смазки, должно удовлетворять условию  $\varepsilon \ll 1$ . В предлагаемой нестационарной модели нет такого строгого требования. Хотя в рассмотрение и берется тонкая капля, но она не обязательно должна быть похожа на пленку, когда краевой угол  $\theta \rightarrow 0$ . Однако Ларсон [9] упоминает, что предшествующие расчеты [19] следствия приближения смазки в сочетании с электростатической аналогией для плотности потока пара [1] показали согласующиеся результаты с решением методом конечных элементов модели [19] и результатами аналитического решения [20] без сингулярности на краю и использования приближения смазки даже при  $\theta = 40^\circ$ . Для тонкой капли  $\theta \approx 2h_0/R$  [9], при выбранных значениях  $\varepsilon$  и  $R$  получаем  $\theta \approx 34^\circ$  для капли воды на подложке. Таким образом, хоть  $\varepsilon = 0.3$  и находится на границе применимости теории смазки,

но аргументы Ларсона [9] убеждают в возможности выбора данного значения параметра для соответствия натурному эксперименту [15].

Условие допустимости квазистационарного приближения записывается как  $t_v \ll t_f$ , где  $t_v$  — время установления поля скоростей,  $t_f$  — время полного высыхания капли [9]. Например, для капли толуола объемом  $10 \mu\text{l}$  результаты расчетов [12] показали, что  $t_v \approx 0.3 \text{ s}$ , а  $t_f \approx 500 \text{ s}$ . Таким образом, много большую часть времени течение находится в квазистационарном режиме: поток не зависит явно от времени, а лишь устанавливается в соответствие с профилем капли. В свою очередь, изменение  $h$  за малый промежуток времени  $\Delta t \rightarrow 0$  незначительно для случая медленного испарения. Следовательно, если испарение капли происходит от нескольких минут до нескольких часов, то квазистационарное приближение допустимо. Капли некоторых жидкостей нано- и пиколитровых размеров испаряются за секунды и доли секунды. Например, пиколитровые капли воды при пониженном давлении [21]. В таких случаях условие  $t_v \ll t_f$  не выполняется, и поэтому необходимо использовать нестационарный подход. Следует отметить, что при быстром испарении поверхность капли значительно охлаждается. К примеру, температура границы жидкой и газовой фазы пиколитровой капли воды способна понизиться с 300 до 289 К, а в случае этанола — с 300 до 260 К [22]. Этот факт требует введения в нестационарную модель уравнения энергии [12]. Когда происходит медленное испарение, градиент температуры очень мал. Например, инфракрасное измерение [15] показало, что разность температуры у линии контакта с подложкой и на вершине капли менее 0.3 К. Следовательно, влияние течения Марангони незначительно [14, 15]. При характерных временах испарения пиколитровых капель порядка  $10^{-5} \text{ s}$  гидродинамика и вовсе не рассматривается [22]. Время испарения капли воды из эксперимента [15] составляет около 105 s (скорость радиального течения измерялась до момента  $t = 90 \text{ s}$ ). Аналитическую оценку можно выполнить, используя приближенные формулы [9]. Передача импульса (скорости) достигает квазистационарного состояния за время  $t_v \approx (h_0)^2/\nu = (\varepsilon R)^2/\nu$ . Для капли воды и этиленгликоля получаем значения  $t_v$ , равные 30 ms и 2  $\mu\text{s}$  соответственно. Время полного испарения капли на подложке можно оценить по формуле

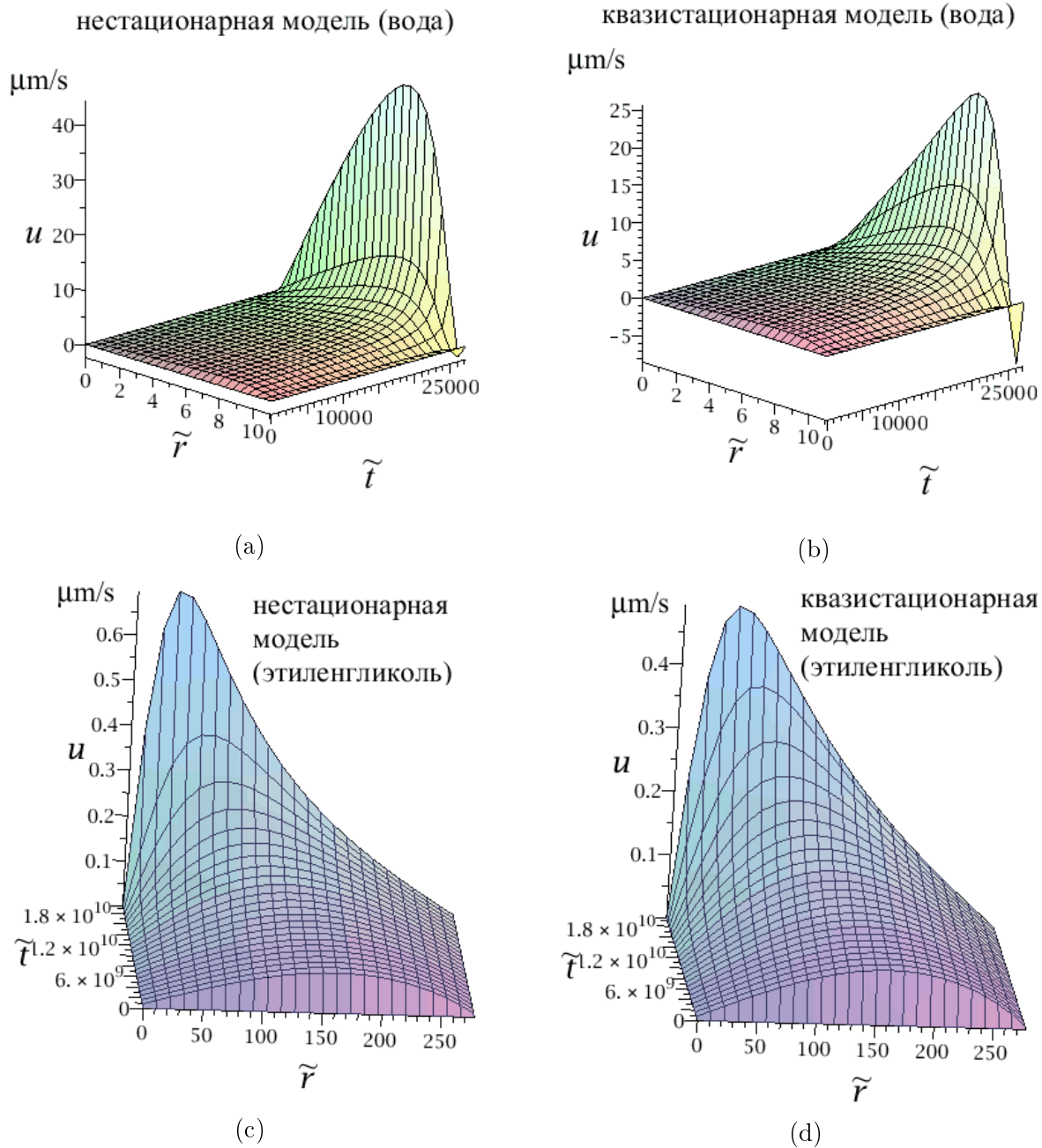
$$t_f \approx \frac{\rho \varepsilon R^2}{\pi D_{vap} \rho_{vap} (1 - H)(0.27\theta + 1.3)}. \quad (4.1)$$

Коэффициент диффузии пара воды  $D_{vap} \approx 2.4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ , плотность насыщенного пара  $\rho_{vap} \approx 17.3 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}^3$  [9]. В случае сухого воздуха ( $H = 0$ ) испарение капли воды, согласно (4.1), составляет около 52 s. Сефиане и др. [15] не указали значение относительной влажности в своем эксперименте. Если предположить, что  $H \approx 0.5$ , то время высыхания капли воды, полученное с помощью (4.1), приблизительно соответствует [15]. Время сушки этиленгликоля составляло 2.4 min [18]. Отсчет времени в [18] начинался с момента, когда граница «жидкость–газ» равнялась с высотой стенки ячейки  $h_0$  (изначально поверхность пленки имела форму выпуклого мениска).

Также следует пояснить принцип выбора значений для параметров модельных законов (2.12) и (2.13). Число  $A$  подбирается так, чтобы максимальное значение скорости течения воды было при  $r \approx 0.7R$  [15]. Дело в том, что поведение скорости определяется формой плотности потока пара, в аппроксимацию которой входит регуляризатор  $A$ . Другие параметры  $\tilde{J}$  ( $E$ ,  $m$  и  $K$ ) выбираются так, чтобы время полного испарения капли и понижение высоты жидкого слоя согласовывались с экспериментальными данными [15, 18].

## § 5. Результаты расчетов

Нестационарная система уравнений (2.6), (2.7), (2.9), (2.10) с замыкающим соотношением (2.12), граничными и начальными условиями (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), а также квазистационарная система уравнений (2.6), (2.7) с замыкающими соотношениями (2.11), (2.12), граничными и начальными условиями (3.1), (3.2), (3.3), (3.5) решались численно средствами пакета Maple. Для случая с ячейкой вместо (2.12), (3.2), (3.5) использовались (2.13)

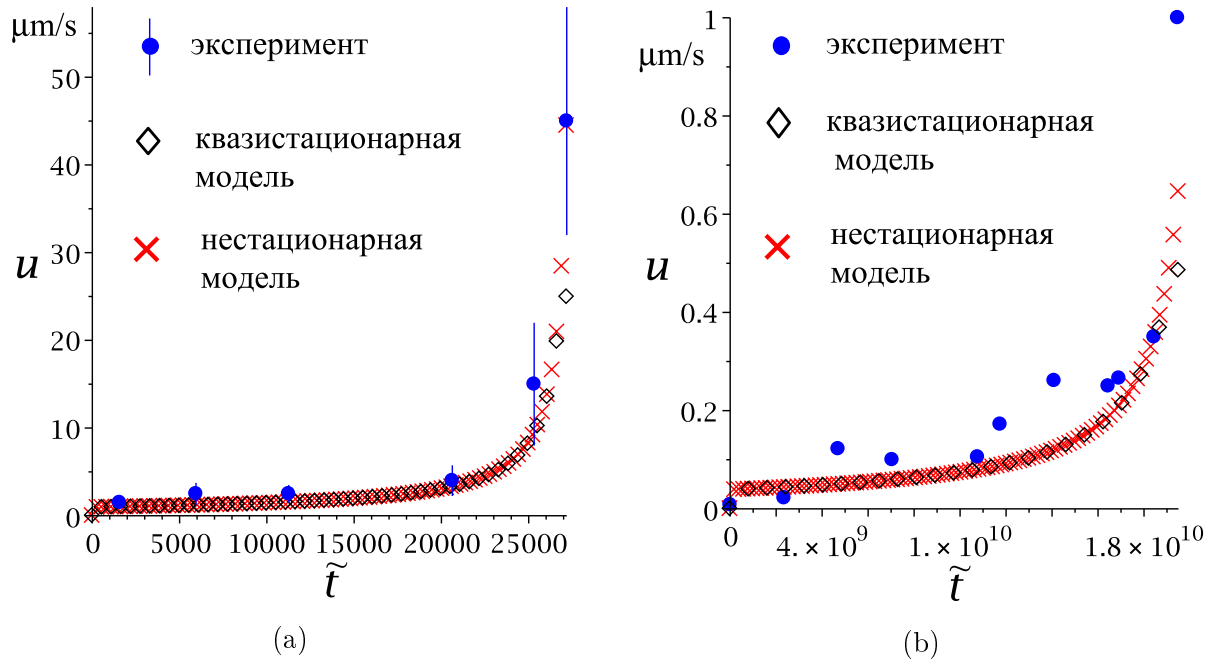


**Рис. 1.** Трехмерная пространственно-временная эволюция скорости радиального течения. Параметры модельного закона испарения: (a, b) в (2.12)  $A = 1$ ,  $K = 2.7$ ,  $E = 2.5525 \cdot 10^{-4}$ ; (c, d) в (2.13)  $E = 3.6 \cdot 10^{-10}$ ,  $m = 1$

и (3.7). Результаты расчетов представлены на рисунках 1 и 2.

В эволюции толщины жидкого слоя при заданных параметрах задачи заметных различий не наблюдается. Эксперименты [15, 18] показали, что радиальная скорость течения на финальной стадии увеличивается примерно на порядок. В случае с каплей воды на подложке по результатам, полученным с помощью нестационарной модели, максимальная скорость составляет примерно  $45 \mu\text{m/s}$  ( $t \approx 1.5 \text{ min}$ ), что хорошо согласуется с экспериментальным значением  $45 \pm 13 \mu\text{m/s}$  [15] (рис. 1, a, 2, a). Квазистационарная модель предсказывает финальное значение скорости около  $25 \mu\text{m/s}$  (рис. 1, b, 2, a). В случае с открытой цилиндрической ячейкой, заполненной этиленгликолем, рассчитанные значения скоростей с помощью двух моделей также расходятся на финальной стадии испарения ( $t \approx 2.4 \text{ min}$ , рис. 1, c, 1, d). Наибольшие скорости





**Рис. 2.** Сравнение результатов расчета скоростей течения с экспериментальными данными [15, 18]: (а) вода ( $\tilde{r} \approx 0.7\tilde{R}$ ), (б) этиленгликоль ( $\tilde{r} \approx 0.2\tilde{R}$ )

составляют примерно  $0.5$  и  $0.65 \mu\text{m/s}$  по данным, рассчитанным с помощью квазистационарной и нестационарной моделей соответственно (рис. 2, *b*). В [18] измеренная скорость варьировала в приблизительном диапазоне от  $0.1$  до  $1 \mu\text{m/s}$ . На экспериментальных графиках [18] для лучшего цветового отображения скорость «обрезана» по значению  $0.5 \mu\text{m/s}$  ( $u = 0$  обозначено черным цветом,  $u > 0.5 \mu\text{m/s}$  — белым, а промежуточные значения скоростей представлены разными оттенками серого цвета). Другая проблема заключается в том, что экспериментальный метод [18] не позволил получить достоверных данных вблизи оси симметрии на позднем временном этапе из-за малого количества микрочастиц, находящихся в этой области, по которым замерялась скорость (большую часть микрочастиц к этому времени снесло течением к стенке ячейки). Таким образом, экспериментальные данные [18] не позволяют определить, в какой точке скорость достигла максимума ( $\approx 1 \mu\text{m/s}$ ). Результаты расчетов приведенных здесь моделей, а также кинетических моделей [18, 23] показывают, что максимальное значение скорости достигается вблизи центра ячейки ( $0.1\tilde{R} \div 0.2\tilde{R}$ ).

При выбранном модельном законе испарения (2.12) наблюдается противоток вблизи периферии капли (рис. 1, *a*, 1, *b*), что было и ранее показано в предыдущей работе [11]. О возможности наличия точек стагнации в районе свободной границы говорилось Диганом и др. [1], данное явление наблюдалось при проведении эксперимента. Из графиков видно, что противоток в случае квазистационарного описания процесса нарастает с течением времени стремительнее, чем при использовании нестационарного подхода.

Использование аппроксимаций плотности потока пара (2.12), (2.13) и начального условия для скорости (3.6) приводит к скачкообразному нарастанию  $u$  в начальный момент времени (рис. 1, 2). После поднятия колпака насыщенная концентрация пара над каплей рассеивается не сразу, таким образом, значение  $J$  в начальный момент времени должно быть близко к нулю. В случае без колпака необходимо задавать начальные значения скорости. Тем не менее на расчет в целом этот скачок не влияет.

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что при уменьшении значения  $\text{Ca} \cdot E$  результаты, получаемые с помощью обеих моделей, сходятся, а при увеличении — расходятся. В случае с каплей воды  $\text{Ca} \cdot E \approx 5 \cdot 10^{-8}$ , а для капли этиленгликоля  $\text{Ca} \cdot E \approx 8 \cdot 10^{-9}$ .

### Заключение

В работе выполнено сравнение двух подходов в моделировании динамики испаряющейся жидкости. Рассмотрен случай с каплей, покоящейся на непромокаемой гидрофильной подложке, и с открытой цилиндрической ячейкой, заполненной жидкостью. Расчет модельных уравнений проведен при различных значениях капиллярного числа и скорости испарения. Показано, что в результатах, полученных применением обеих моделей, есть как сходства, так и различия. Основное расхождение заключается в следующем. Рассчитанные на базе нестационарной модели данные хорошо согласуются с экспериментальным измерением скорости течения в капле воды ( $Ca \ll 1$ ) [15] и этиленгликоля ( $Ca \gg 1$ ) [18] не только на начальной, но и на финальной стадии процесса, в отличие от результатов, полученных с помощью квазистационарного подхода. Для полученных максимальных значений скоростей несложно оценить погрешности относительно экспериментальных величин. В случае с водой возможная относительная погрешность результата расчета варьирует в диапазонах

- $0 \div 40.6\%$  (при использовании нестационарной модели);
- $21.9 \div 56.9\%$  (при использовании квазистационарной модели).

Для этиленгликоля относительная погрешность результата расчета составляет примерно

- $35\%$  (при использовании нестационарной модели);
- $50\%$  (при использовании квазистационарной модели).

В результате проведенного исследования установлены границы применимости квазистационарного подхода в математическом описании динамики жидкости высыхающей капли. Диапазоны значений параметров задачи проанализированы в §§ 1 и 4. Одним из серьезных ограничений является то, что квазистационарная модель не подходит для описания финальной стадии процесса. На последней стадии испарения квазистационарное приближение плохо работает ввиду стремительного относительного изменения толщины пленки и больших значений скоростей.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Deegan R.D., Bakajin O., Dupont T.F., Huber G., Nagel S.R., Witten T.A. Contact line deposits in an evaporating drop // *Physical Review E*. 2000. Vol. 62. № 1. P. 756–765.
2. Yakhno T. Salt-induced protein phase transitions in drying drops // *Journal of Colloid and Interface Science*. 2008. Vol. 318. № 2. P. 225–230.
3. Tarasevich Y.Y., Vodolazskaya I.V., Bondarenko O.P. Modeling of spatial–temporal distribution of the components in the drying sessile droplet of biological fluid // *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*. 2013. Vol. 432. P. 99–103.
4. Harris D.J., Hu H., Conrad J.C., Lewis J.A. Patterning colloidal films via evaporative lithography // *Physical Review Letters*. 2007. Vol. 98. № 14. P. 148301.
5. Takhistov P., Chang H.C. Complex stain morphologies // *Industrial & Engineering Chemistry Research*. 2002. Vol. 41. № 25. P. 6256–6269.
6. Ragoonanan V., Aksan A. Heterogeneity in desiccated solutions: implications for biostabilization // *Biophysical Journal*. 2008. Vol. 94. № 6. P. 2212–2227.
7. Layani M., Gruchko M., Milo O., Balberg I., Azulay D., Magdassi S. Transparent conductive coatings by printing coffee ring arrays obtained at room temperature // *ACS Nano*. 2009. Vol. 3. № 11. P. 3537–3542.
8. Лебедев–Степанов П.В., Кадушников Р.М., Молчанов С.П., Иванов А.А., Митрохин В.П., Власов К.О., Рубин Н.И., Юрасик Г.А., Назаров В.Г., Алфимов М.В. Самосборка наночастиц в микрообъеме коллоидного раствора: физика, моделирование, эксперимент // *Российские нанотехнологии*. 2013. Т. 8. № 3–4. С. 5–23.
9. Larson R.G. Transport and deposition patterns in drying sessile droplets // *AIChE Journal*. 2014. Vol. 60. № 5. P. 1538–1571.
10. Fischer B.J. Particle convection in an evaporating colloidal droplet // *Langmuir*. 2002. Vol. 18. № 1. P. 60–67.

11. Колегов К.С., Лобанов А.И. Сравнение квазистационарной и нестационарной математических моделей течений в испаряющейся капле // Компьютерные исследования и моделирование. 2012. Т. 4. № 4. С. 811–825.
12. Barash L.Yu., Bigioni T.P., Vinokur V.M., Shehur L.N. Evaporation and fluid dynamics of a sessile drop of capillary size // Physical Review E. 2009. Vol. 79. № 4. P. 046301.
13. Барташевич М.В., Марчук И.В., Кабов О.А. Численное моделирование естественной конвекции в лежащей капле жидкости // Теплофизика и аэромеханика. 2012. Т. 19. № 2. С. 171–182.
14. Dunn G.J., Wilson S.K., Duffy B.R., David S., Sefiane K. A mathematical model for the evaporation of a thin sessile liquid droplet: comparison between experiment and theory // Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects. 2007. Vol. 323. № 1–3. P. 50–55.
15. Hamamoto Y., Christy J.R.E., Sefiane K. Order-of-magnitude increase in flow velocity driven by mass conservation during the evaporation of sessile drops // Phys. Rev. E. 2011. Vol. 83. P. 051602.
16. Cachile M., Benichou O., Cazabat A.M. Evaporating droplets of completely wetting liquids // Langmuir. 2002. Vol. 18. № 21. P. 7985–7990.
17. Bhardwaj R., Attinger D. Non-isothermal wetting during impact of millimeter-size water drop on a flat substrate: numerical investigation and comparison with high-speed visualization experiments // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2008. Vol. 29. № 5. P. 1422–1435.
18. Rieger B., van den Doel L.R., van Vliet L.J. Ring formation in nanoliter cups: quantitative measurements of flow in micromachined wells // Physical Review E. 2003. Vol. 68. № 3. P. 036312.
19. Hu H., Larson R.G. Analysis of the microfluid flow in an evaporating sessile droplet // Langmuir. 2005. Vol. 21. № 9. P. 3963–3971.
20. Masoud H., Felske J.D. Analytical solution for inviscid flow inside an evaporating sessile drop // Physical Review E. 2009. Vol. 79. № 1. P. 016301.
21. Saverchenko V.I., Fisenko S.P., Khodyko Yu.A. Evaporation of a picoliter droplet on a wetted substrate at reduced pressure // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2011. Vol. 84. № 4. P. 723–729.
22. Saverchenko V.I., Fisenko S.P., Khodyko J.A. Low pressure evaporation of binary picoliter droplet on substrate // 5-th International Symposium on Flow Visualization. June 25–28, 2012. Minsk, Belarus. P. 12–17.
23. Tarasevich Y.Y., Vodolazskaya I.V., Isakova O.P., Abdel Latif M.S. Evaporation-induced flow inside circular wells: analytical results and simulations // Microgravity Science and Technology. 2009. Vol. 21. P. 39–44.

Поступила в редакцию 28.06.2014

Колегов Константин Сергеевич, старший преподаватель, кафедра математических и естественнонаучных дисциплин, Каспийский институт морского и речного транспорта — филиал Волжской государственной академии водного транспорта, 414014, Россия, г. Астрахань, ул. Костина, 2;  
младший научный сотрудник, Астраханский государственный университет, 414056, Россия, г. Астрахань, ул. Татищева, 20 а.  
E-mail: k\_k\_s\_87@mail.ru

***K. S. Kolegov***

**Comparison of quasisteady and nonsteady mathematical models of fluid flow in evaporating drop with due regard for the viscosity**

*Keywords:* evaporating drop, radial flow, drop on a substrate, pinning, circular well.

Mathematical Subject Classifications: 76D45

Applicability limits of a quasisteady approach to modelling the fluid dynamics in evaporated drop on a substrate (with constant contact area) and in circular well are defined in this paper. A nonsteady model is considered for comparison. Quasisteady and nonsteady (with the full-form equation of motion) sets of equations have been solved numerically. The modeling is carried out at different values of evaporation rate and capillary number. Water and ethylene glycol drops were taken as examples. Analysis of calculated data shows that results obtained for the final stage of pure solvent evaporation by using two models differ from

each other. Velocity of a radial flow calculated with the help of nonsteady model agrees with experimental data much better than the result obtained using a quasisteady approach at the final stage of process. This is because at the final stage of evaporation the quasisteady approach works poorly due to the rapid changes in the relative film thickness and high velocities.

## REFERENCES

1. Deegan R.D., Bakajin O., Dupont T.F., Huber G., Nagel S.R., Witten T.A. Contact line deposits in an evaporating drop, *Physical Review E*, 2000, vol. 62, no. 1, pp. 756–765.
2. Yakhno T. Salt-induced protein phase transitions in drying drops, *Journal of Colloid and Interface Science*, 2008, vol. 318, no. 2, pp. 225–230.
3. Tarasevich Y.Y., Vodolazskaya I.V., Bondarenko O.P. Modeling of spatial–temporal distribution of the components in the drying sessile droplet of biological fluid, *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 2013, vol. 432, pp. 99–103.
4. Harris D.J., Hu H., Conrad J.C., Lewis J.A. Patterning colloidal films via evaporative lithography, *Physical Review Letters*, 2007, vol. 98, no. 14, p. 148301.
5. Takhistov P., Chang H.C. Complex stain morphologies, *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2002, vol. 41, no. 25, pp. 6256–6269.
6. Ragoonanan V., Aksan A. Heterogeneity in desiccated solutions: implications for biostabilization, *Biophysical Journal*, 2008, vol. 94, no. 6, pp. 2212–2227.
7. Layani M., Gruchko M., Milo O., Balberg I., Azulay D., Magdassi S. Transparent conductive coatings by printing coffee ring arrays obtained at room temperature, *ACS Nano*, 2009, vol. 3, no. 11, pp. 3537–3542.
8. Lebedev-Stepanov P.V., Kadushnikov R.M., Molchanov S.P., Ivanov A.A., Mitrokhin V.P., Vlasov K.O., Rubin N.I., Yurasik G.A., Nazarov V.G., Alfimov M.V. Self-assembly of nanoparticles in the microvolume of colloidal solution: Physics, modeling, and experiment, *Nanotechnologies in Russia*, 2013, vol. 8, no. 3–4, pp. 137–162.
9. Larson R.G. Transport and deposition patterns in drying sessile droplets, *AIChE Journal*, 2014, vol. 60, no. 5, pp. 1538–1571.
10. Fischer B.J. Particle convection in an evaporating colloidal droplet, *Langmuir*, 2002, vol. 18, no. 1, pp. 60–67.
11. Kolegov K.S., Lobanov A.I. Comparing of a quasisteady and nonsteady mathematical models of fluid flow in evaporating drop, *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 4, pp. 811–825 (in Russian).
12. Barash L.Y., Bigioni T.P., Vinokur V.M., Shchur L.N. Evaporation and fluid dynamics of a sessile drop of capillary size, *Physical Review E*, 2009, vol. 79, no. 4, p. 046301.
13. Bartashevich M.V., Marchuk I.V., Kabov O.A. Numerical simulation of natural convection in a sessile liquid droplet, *Thermophysics and Aeromechanics*, 2012, vol. 19, no. 2, pp. 317–328.
14. Dunn G.J., Wilson S.K., Duffy B.R., David S., Sefiane K. A mathematical model for the evaporation of a thin sessile liquid droplet: comparison between experiment and theory, *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 2007, vol. 323, no. 1–3, pp. 50–55.
15. Hamamoto Y., Christy J.R.E., Sefiane K. Order-of-magnitude increase in flow velocity driven by mass conservation during the evaporation of sessile drops, *Phys. Rev. E*, 2011, vol. 83, p. 051602.
16. Cachile M., Benichou O., Cazabat A.M. Evaporating droplets of completely wetting liquids, *Langmuir*, 2002, vol. 18, no. 21, pp. 7985–7990.
17. Bhardwaj R., Attinger D. Non-isothermal wetting during impact of millimeter-size water drop on a flat substrate: numerical investigation and comparison with high-speed visualization experiments, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2008, vol. 29, no. 5, pp. 1422–1435.
18. Rieger B., van den Doel L.R., van Vliet L.J. Ring formation in nanoliter cups: quantitative measurements of flow in micromachined wells, *Physical Review E*, 2003, vol. 68, no. 3, p. 036312.
19. Hu H., Larson R.G. Analysis of the microfluid flow in an evaporating sessile droplet, *Langmuir*, 2005, vol. 21, no. 9, pp. 3963–3971.
20. Masoud H., Felske J.D. Analytical solution for inviscid flow inside an evaporating sessile drop, *Physical Review E*, 2009, vol. 79, no. 1, p. 016301.
21. Saverchenko V.I., Fisenko S.P., Khodyko Yu.A. Evaporation of a picoliter droplet on a wetted substrate at reduced pressure, *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2011, vol. 84, no. 4, pp. 723–729.
22. Saverchenko V.I., Fisenko S.P., Khodyko J.A. Low pressure evaporation of binary picoliter droplet on substrate, *15-th International Symposium on Flow Visualization*, June 25–28, 2012, Minsk, Belarus, pp. 12–17.
23. Tarasevich Y.Y., Vodolazskaya I.V., Isakova O.P., Abdel Latif M.S. Evaporation-induced flow inside circular wells: analytical results and simulations, *Microgravity Science and Technology*, 2009, vol. 21, pp. 39–44.

Received 28.06.2014

Kolegov Konstantin Sergeevich, Senior Lecturer, Caspian Institute of Sea and River Transport, Branch of the Volga State Academy of Water Transport, ul. Kostina, 2, Astrakhan, 414014, Russia;  
Junior Researcher, Astrakhan State University, ul. Tatishcheva, 20 a, Astrakhan, 414056, Russia.  
E-mail: k\_k\_s\_87@mail.ru