

УДК 519.6

© С. А. Королев, С. А. Карсканов

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА<sup>1</sup>**

Рассматриваются два подхода к решению задачи математического моделирования обтекания метаемоых тел: численное решение уравнений движения сплошной среды Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу (RANS — Reynolds-averaged Navier–Stokes), с использованием модели турбулентности и прямое численное моделирование (DNS — Direct Numerical Simulation). Тестирование рассматриваемых подходов проводится при решении задачи обтекания тел вращения с простой геометрией: сферы и цилиндра с конической головной частью, для которых известны значения коэффициентов сопротивления при различных числах Маха. Проведено качественное и количественное сравнение результатов обтекания рассматриваемых тел сверхзвуковым потоком, полученным по методикам RANS и DNS. Апробация методики численного моделирования проводится для метаемого тела (снаряда) характерной формы. Представлены результаты численного моделирования обтекания снаряда для широкого диапазона параметров: чисел Маха и углов нутации. Выполнено сравнение расчетных значений коэффициентов сопротивления с эмпирическими эталонными зависимостями по законам 1943 и 1958 годов.

*Ключевые слова:* задача внешнего обтекания, уравнения Навье–Стокса, осреднение по Рейнольдсу, прямое численное моделирование, коэффициент аэродинамического сопротивления, вычислительная гидромеханика.

**Введение**

Проектирование и разработка новых видов снарядов различного типа и назначения относятся к такому типу прикладных задач, когда существенное значение имеет форма разрабатываемого объекта. Снаряд относится к классу неуправляемых летательных аппаратов с траекторией полета в плотных слоях атмосферы [1]. Он представляет собой тело вращения, форма которого зависит от назначения и условий применения. Среди данной категории летательных аппаратов можно выделить баллистические снаряды с настильными траекториями, стабилизация которых в полете осуществляется за счет вращения вокруг своей продольной оси. Создание нового образца снаряда подразумевает решение задачи по определению рациональной формы, так как основополагающее значение имеет поведение снаряда на траектории, что представляет собой аэродинамическую задачу. До сих пор большинство научно-исследовательских опытно-конструкторских работ, в рамках которых решались аэродинамические задачи обтекания тела, опирались на данные физического эксперимента. Учитывая многообразие параметров, влияющих на характеристики разрабатываемого объекта, требуется большой объем данных, получение которого с помощью физического эксперимента может оказаться затруднительным и затратным.

Применение традиционных методов проектирования, основанных на различных законах сопротивления воздуха, таких как, например, закон Сиаччи, «закон 1943 года» или «закон 1958 года», является нецелесообразным из-за отличия форм головных частей эталонных и разрабатываемых тел вращения [2].

В контексте всего вышесказанного на первый план выходит численный эксперимент. Численное моделирование процесса обтекания тела вращения является прогрессивным методом исследования его аэродинамических характеристик. Современные вычислительные средства позволяют решать задачи численного моделирования в короткие сроки с высокой точностью.

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (Госзадание № 1.1481.2014/К).

Тем самым численный эксперимент способен если не полностью, то во многом заменить дорогостоящую стендовую обработку.

Основной целью работы является численное решение задачи внешнего обтекания для уточнения эталонных эмпирических законов распределения коэффициентов аэродинамического сопротивления при использовании метаемох тел сложной геометрической формы (в том числе для новых спроектированных конструкций).

### § 1. Методика решения задачи

Для учета влияния различных факторов на движение тела вращения по траектории (формы профиля, метеоусловий (температуры, давления, скорости и направления ветра), углов положения оси симметрии тела относительно вектора скорости (углов нутации и прецессии)) была разработана методика численного моделирования обтекания тела сверхзвуковым потоком газа. Рассматриваются два подхода к решению задачи: численное решение уравнений движения сплошной среды Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу (RANS — Reynolds-averaged Navier–Stokes), с использованием модели турбулентности и прямое численное моделирование (DNS — Direct Numerical Simulation). Первый подход требует намного меньше вычислительных ресурсов по сравнению со вторым, что позволяет проводить исследование распределений аэродинамических характеристик обтекаемого тела в широком диапазоне изменения параметров. Однако второй подход более совершенен, так как основан на численном интегрировании нестационарных уравнений Навье–Стокса без привлечения дополнительных эмпирических моделей и констант. С помощью многопроцессорных вычислительных систем за счет использования схем высокого порядка точности на ортогональных сетках могут быть получены точные результаты, используемые в дальнейшем для тестирования и отладки численной методики, основанной на решении уравнений движения сплошной среды, осредненных по Рейнольдсу.

В методе прямого численного моделирования интегрируются исходные уравнения Навье–Стокса для неосредненных параметров течения. Моделирование пульсаций параметров в турбулентном потоке достигается путем применения подробной расчетной сетки и методов аппроксимации высокого порядка точности. Согласно теории гидродинамического подобия распределение параметров потока должно в принципе зависеть от числа Рейнольдса, характеризующего влияние сил вязкости в газе. В условиях высокоскоростного сверхзвукового течения автомодельность по числу Рейнольдса наступает при  $Re > (1...5) \cdot 10^6$ . В работе [3], например, показано, что при числах Рейнольдса, больших  $10^6$ , величины параметров трансзвукового течения в канале близки к значениям невязкого расчета.

Систематическими экспериментами установлено, что влияние числа Маха на аэродинамические характеристики заметно проявляется при  $M_\infty > 0.7$ . Рассматриваемые в работе высокоскоростные сверхзвуковые течения имеют характерные числа Рейнольдса, превосходящие  $10^6$ , и числа Маха от 1.5 до 5. В этом случае картина течения будет определяться величиной числа Маха.

Система уравнений нестационарного вязкого теплопроводного течения в цилиндрической системе координат имеет следующий вид [4]:

– уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho V_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \rho V_\theta = 0; \quad (1)$$

– уравнения импульса

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} r \rho V_x + \frac{\partial}{\partial x} r \rho V_x^2 + \frac{\partial}{\partial r} r \rho V_r \cdot V_x + \frac{\partial}{\partial \theta} \rho V_\theta \cdot V_x = \\ & = -r \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{2 \cdot r}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \operatorname{div} V + 2 \cdot r \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial V_x}{\partial x} + \\ & + r \frac{\partial}{\partial r} \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \mu \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial \theta} \right) + \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} r \rho V_r + \frac{\partial}{\partial x} r \rho V_x \cdot V_r + \frac{\partial}{\partial r} r \rho V_r^2 + \frac{\partial}{\partial \theta} \rho V_\theta \cdot V_r = \\ & = \rho \cdot V_\theta^2 - \frac{\partial}{\partial r} r \cdot P - \frac{2 \cdot r}{3} \frac{\partial}{\partial r} \mu \operatorname{div} V + 2 \cdot r \frac{\partial}{\partial r} \mu \frac{\partial V_r}{\partial r} + \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & + r \frac{\partial}{\partial x} \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} \right) + 2 \mu \left( \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_r}{r} \right), \\ & \frac{\partial}{\partial t} r \rho V_\theta + \frac{\partial}{\partial x} r \rho V_x V_\theta + \frac{\partial}{\partial r} r \rho V_\theta V_r + \frac{\partial}{\partial \theta} \rho V_\theta^2 = \\ & = -\rho V_r \cdot V_\theta - \frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \theta} \mu \operatorname{div} V + 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right) + \end{aligned} \quad (4)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \mu \left( r \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial \theta} \right) + r \frac{\partial}{\partial r} \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} \right) + 2 \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} \right);$$

– уравнение энергии

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \rho r E + \frac{\partial}{\partial x} r \rho V_x E + \frac{\partial}{\partial r} r \rho V_r E + \frac{\partial}{\partial \theta} \rho V_\theta E = \\ & = -\frac{\partial}{\partial r} r V_r P - \frac{\partial}{\partial \theta} V_\theta P - \frac{\partial}{\partial x} r V_x P + \frac{\partial}{\partial r} r (V_r 2 \mu \Phi_{rr} + V_\theta 2 \mu \Phi_{\theta r} + V_x 2 \mu \Phi_{xr}) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} (V_r 2 \mu \Phi_{r\theta} + V_\theta 2 \mu \Phi_{\theta\theta} + V_x 2 \mu \Phi_{x\theta}) + \frac{\partial}{\partial x} r (V_r 2 \mu \Phi_{rx} + V_\theta 2 \mu \Phi_{\theta x} + V_x 2 \mu \Phi_{xx}) - \\ & - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial}{\partial r} r \mu V_r + \frac{\partial}{\partial \theta} \mu V_\theta + \frac{\partial}{\partial x} r \mu V_x \right) \operatorname{div} V + \frac{\partial}{\partial r} r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r} \lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial x} r \lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\Phi_{rr} = \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad \Phi_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r}, \quad \Phi_{xx} = \frac{\partial V_x}{\partial x},$$

$$\Phi_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} \right), \quad \Phi_{\theta x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial \theta} \right), \quad \Phi_{xr} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right),$$

а дивергенция вектора скорости равна

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \cdot V_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}.$$

Здесь  $x, r, \theta, t$  – цилиндрические координаты и время;  $\rho$  – плотность, кг/м;  $V_x, V_r, V_\theta$  – компоненты вектора скорости, м/с;  $P$  – давление, Па;  $T$  – температура, К;  $\rho E$  – полная энергия для единицы объема;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м К).

Переменные  $\rho, \rho V_x, \rho V_r, \rho V_\theta, \rho E$  являются неизвестными, определяемыми в результате решения уравнений (1)–(5). В уравнении (5) исключается температура с помощью уравнения состояния Менделеева–Клапейрона

$$P = \rho RT,$$

где  $R$  – удельная газовая постоянная.

Для интегрирования уравнений (1)–(5) была применена следующая методика. Первые производные по пространству аппроксимировались с помощью конечно-разностной WENO-схемы (Weighted Essentially Non-Oscillatory) пятого порядка точности [5]. Метод WENO относится

к методам реконструкции сеточных решений с автоматическим анализом гладкости численных решений, идея которого заключается в использовании комбинации всех допустимых шаблонов. Диффузионные слагаемые рассчитывались на симметричном шаблоне с помощью центральных разностей с шестым порядком точности. Стоит отметить, что схема WENO более затратна с точки зрения объема вычислений, чем, например, центрально-разностная схема, однако позволяет рассчитывать как ударные волны, так и сложные гладкие структуры, свойственные сверхзвуковым течениям. По времени уравнения (1)–(5) интегрировались со вторым порядком точности. TVD-схема (Total Variation Diminishing) Рунге–Кутты второго порядка, используемая в работе, выглядит следующим образом [6]:

$$\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^n + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^n),$$

$$\mathbf{U}^{(n+1)} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^n + \frac{1}{2} \mathbf{U}^1 + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{U}^{(1)}).$$

Здесь  $\mathbf{L}$  — конечно-разностная аппроксимация.

Таким образом, методика расчета с помощью прямого численного моделирования заключается в объединении идеи WENO, метода центрально-разностных аппроксимаций высокого порядка и TVD-метода Рунге–Кутты. Расчеты на основе метода DNS выполнялись на многопроцессорном суперкомпьютере с использованием процедур распараллеливания счета.

В основе подхода Рейнольдса лежит идея разделения всех входящих в уравнения движения величин на средние значения и пульсации [7]. Математическая постановка задачи решения уравнений Рейнольдса для осредненных параметров требует введения дополнительных уравнений, так как существует необходимость замыкания системы, ввиду появления новой неизвестной величины — тензора напряжений Рейнольдса. В качестве процедуры замыкания выбрана  $k$ - $\varepsilon$ -модель турбулентности. Уравнения движения преобразуются к виду, в котором добавлено влияние пульсации средней скорости (в виде турбулентной кинетической энергии) и процесса уменьшения этой пульсации за счет вязкости (диссипации). В данной модели решаются два дополнительных уравнения для транспорта кинетической энергии турбулентности  $k$  и скорости диссипации кинетической энергии турбулентности  $\varepsilon$  [8]:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu_m + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \mu_t S^2 - \rho \varepsilon, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu_m + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \mu_t S^2 - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (7)$$

где  $u_i$  — компоненты вектора скорости по координатным направлениям  $x_i$ ;  $C_\mu = 0.09$ ,  $C_{1\varepsilon} = 1.44$ ,  $C_{2\varepsilon} = 1.92$ ,  $\sigma_k = 1.0$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1.3$  — коэффициенты модели турбулентности;  $\mu_m$  — молекулярная вязкость;  $\mu_t$  — турбулентная вязкость. Параметр  $S^2$  определяется из выражения

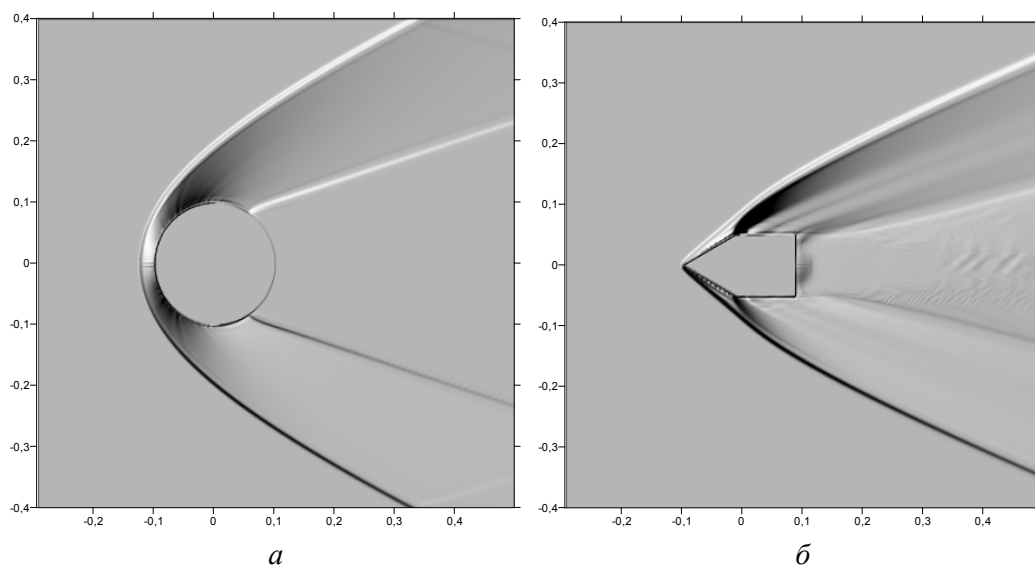
$$S^2 = 2S_{11}^2 + 2S_{22}^2 + 2S_{33}^2 + (S_{12} + S_{21})^2 + (S_{13} + S_{31})^2 + (S_{23} + S_{32})^2,$$

где  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  — матрица скоростей деформации.

Для определения турбулентной составляющей динамической вязкости используется выражение

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

Описанный выше подход на основе осредненных уравнений Рейнольдса RANS реализован с помощью модуля расчета динамики жидкостей и газов Fluent программного пакета ANSYS 15.0. Задача моделирования пространственного турбулентного течения при обтекании тела потоком газа решается в прямоугольной декартовой системе координат  $(x, y, z)$ . Дискретизация расчетной области производится методом конечных элементов. Конвективные



**Рис. 1.** Теневая картина распределения давления при обтекании тел сверхзвуковым потоком,  $M = 3.0$ :  
а) сфера; б) цилиндр с конической головной частью

члены уравнений неразрывности, импульса и энергии, а также уравнений модели турбулентности (6)–(7) аппроксимируются с помощью противопоточной схемы второго порядка точности. Диффузионные слагаемые аппроксимируются центральными разностями, также обладающими вторым порядком точности. Расчеты выполнялись на персональном компьютере.

## § 2. Тестовые расчеты

Для тестирования вышеописанных методик решалась задача обтекания тел вращения с фиксированной геометрией, для которых известны значения коэффициентов сопротивления при различных числах Маха. Теневые картины обтекания сферы и цилиндра с конической головной частью высокоскоростным потоком с числом Маха 3.0, полученные с помощью метода DNS, показаны на рисунке 1. Перед сферой видна отошедшая головная волна и примыкающая к носовой части ударная волна, имеющая место при обтекании цилиндра с конической головной частью.

Графики распределения давления по поверхности обтекаемых тел, полученные с помощью методики RANS с моделью турбулентности  $k - \epsilon$  и прямого численного моделирования DNS, представлены на рисунке 2. Видим хорошее соответствие результатов. Точка излома графика давления на поверхности сферы на рисунке 2, а соответствует косой ударной волне на рисунке 1, а), резкое уменьшение давления на рисунке 2, б соответствует переходу конической части тела в цилиндрическую.

На рисунке 3 приведено сравнение коэффициента сопротивления  $C_x$ , полученного расчетным путем, с данными физического эксперимента [9]. На рисунке приведена одна кривая, соответствующая численным экспериментам, так как методы RANS и DNS дают почти одинаковые (не отличающиеся более чем на 1 %) результаты. Данные, представленные на рисунке 2, могут свидетельствовать об этом. Графики давления, полученные различными методами, лежат близко друг к другу, соответственно, коэффициенты сопротивления, являясь интегральными величинами, будут совпадать.

## § 3. Результаты расчетов обтекания снаряда

Апробация методики численного моделирования проводилась для метаемого тела (снаряда) характерной формы, для которой можно выделить следующие части: носовая, оживальная,

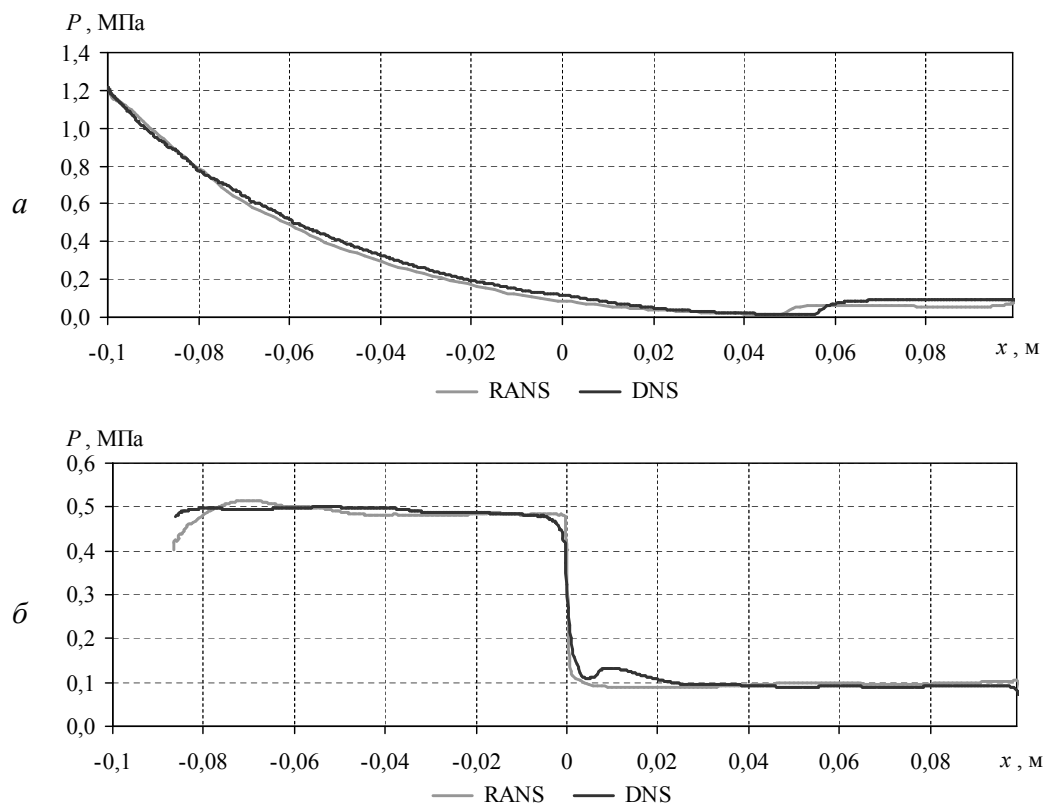


Рис. 2. Распределение давления по поверхности тела,  $M = 3.0$ :  
а) сфера; б) цилиндр с конической головной частью

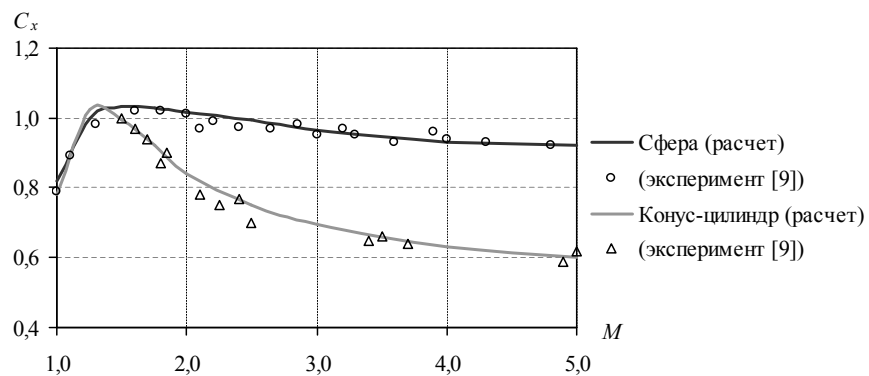
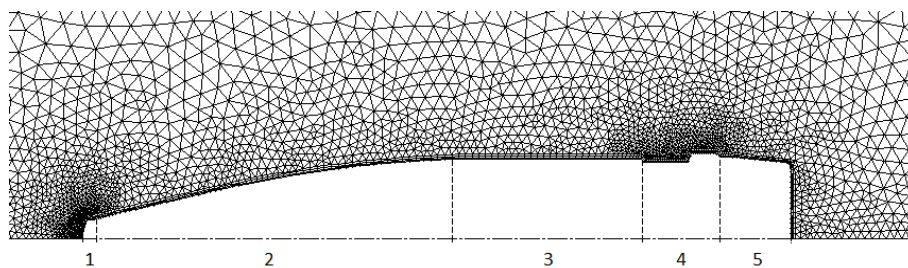
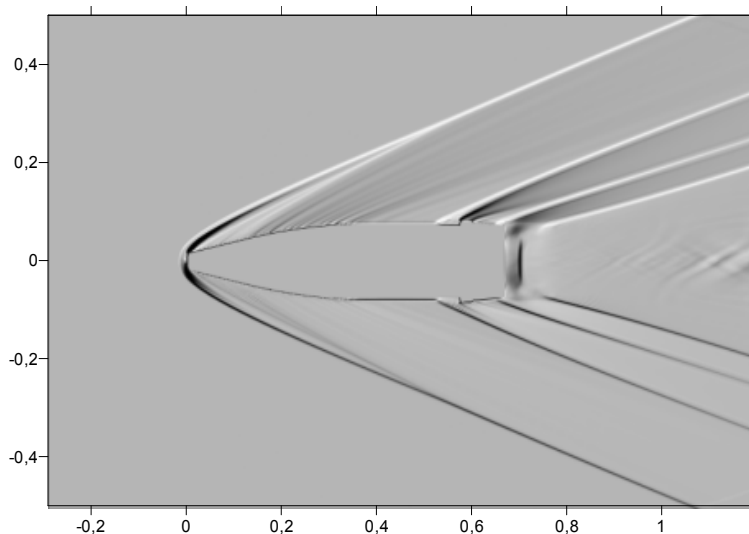


Рис. 3. Зависимость коэффициента сопротивления  $C_x$  от числа Маха



**Рис. 4.** Геометрия снаряда (1 — носовая; 2 — оживальная; 3 — цилиндрическая; 4 — поясковая; 5 — донная часть) и расчетная конечно-элементная сетка в методе RANS



**Рис. 5.** Теневая картина распределения давления при обтекании снаряда,  $M = 3.0$

цилиндрическая, поясковая, донная (рис. 4). В рассматриваемых подходах численного моделирования используются различные типы расчетных сеток. В методе RANS строится нерегулярная конечно-элементная сетка со сгущением узлов в областях высоких градиентов параметров (рис. 4). В методе DNS используется подробная регулярная конечно-разностная сетка.

При движении метаэемых тел со сверхзвуковой скоростью основную часть сопротивления движению снаряда составляют волновое сопротивление (60–70 %) и донное сопротивление (20–30 %), возникающие в результате образования ударных волн и зоны разряжения за дном снаряда. Сопротивление поверхностного трения составляет не более 10 % от общего сопротивления движению [10].

На рисунке 5 представлено поле градиента давления в плоскости симметрии снаряда. Перед носовой частью снаряда образуется коническая ударная волна, на фронте которой скачком меняется давление и скорость набегающего потока. Ударные волны меньшей интенсивности формируются в результате возмущения потока на выступах поясковой части и на донном срезе. За днищем снаряда образуется зона с пониженным давлением.

На рисунке 6 представлен график распределения давления по поверхности снаряда при обтекании его сверхзвуковым потоком с числом Маха  $M = 3.0$ .

Представленные данные показывают достаточно хорошее совпадение результатов расчета, полученных с помощью рассматриваемых методик численного моделирования RANS и DNS. Графики, как и поля распределения параметров, хорошо соотносятся. Наибольшие расхождения наблюдаются в носовой части в окрестности точки  $x = 0$  (в области высоких градиентов)

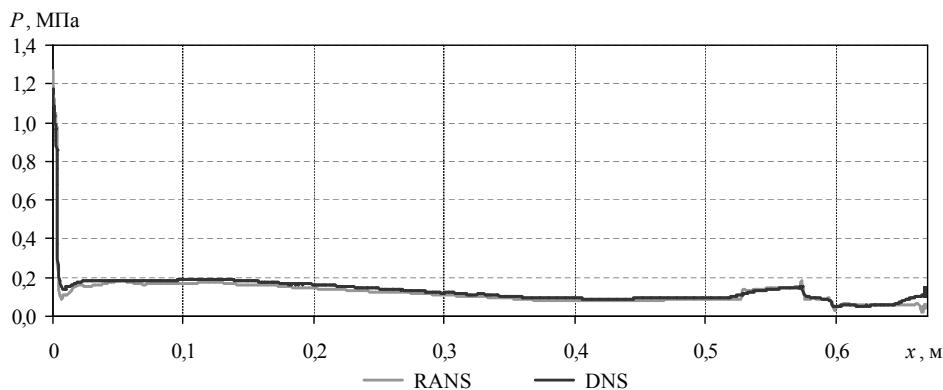


Рис. 6. Распределение давления по поверхности снаряда при лобовом обтекании,  $M = 3.0$

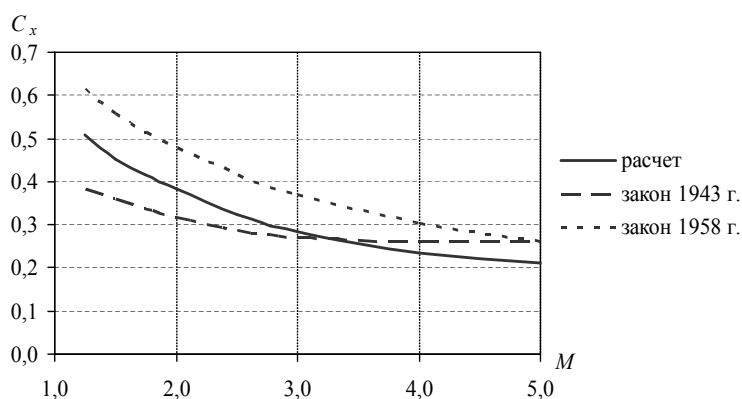


Рис. 7. Зависимость коэффициента сопротивления  $C_x$  от числа Маха

и на днище снаряда.

Для рассматриваемой формы снаряда был проведен расчет коэффициента лобового сопротивления для стабилизированного движения (угол между осью снаряда и вектором скорости  $\delta = 0^\circ$ ) в сверхзвуковом диапазоне чисел Маха. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Маха приведена на рисунке 7. Для сравнения на графике приведены также эмпирические эталонные зависимости коэффициента сопротивления по законам 1943 и 1958 годов.

Сравнение результатов расчета коэффициента сопротивления снаряда с эмпирическими зависимостями показывает, что качественно расчетная зависимость совпадает с зависимостью для коэффициента сопротивления по закону 1958 г., количественно расчетные значения на 10–20 % ниже эталонных значений, определенных по закону 1958 г. Сравнение расчетных значений с эталонными, определенными по закону 1943 г., показывает, что для  $M < 3.3$  расчетные значения выше эталонных, для  $M > 3.3$  расчетные значения оказываются ниже. В практике инженерных расчетов для учета реальных аэродинамических характеристик снаряда вводится коэффициент формы, определяемый соотношением [10]

$$i_x(M) = \frac{C_x(M)}{C_x^e(M)},$$

где  $C_x(M)$  — реальный коэффициент сопротивления;  $C_x^e(M)$  — эталонный коэффициент сопротивления.

Во время движения по траектории вследствие возмущений ось метаемого тела может совершать колебания относительно направления скорости движения, что существенно влияет на



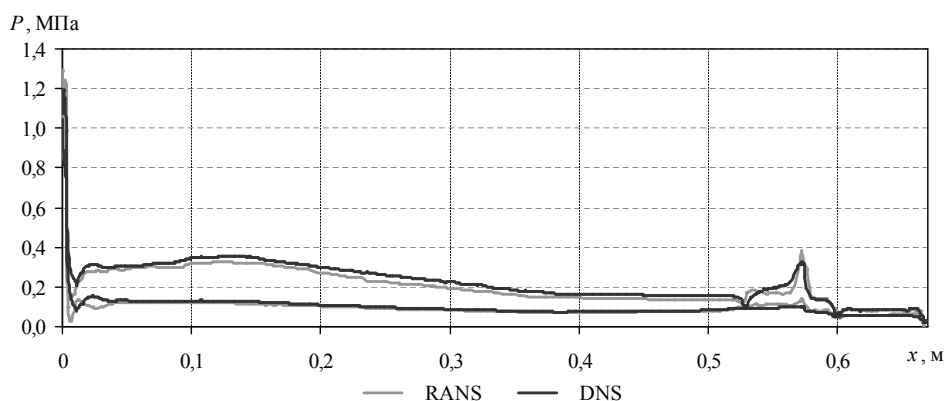


Рис. 8. Распределение давления по поверхности снаряда,  $M = 3.0$ ;  $\delta = 10^\circ$

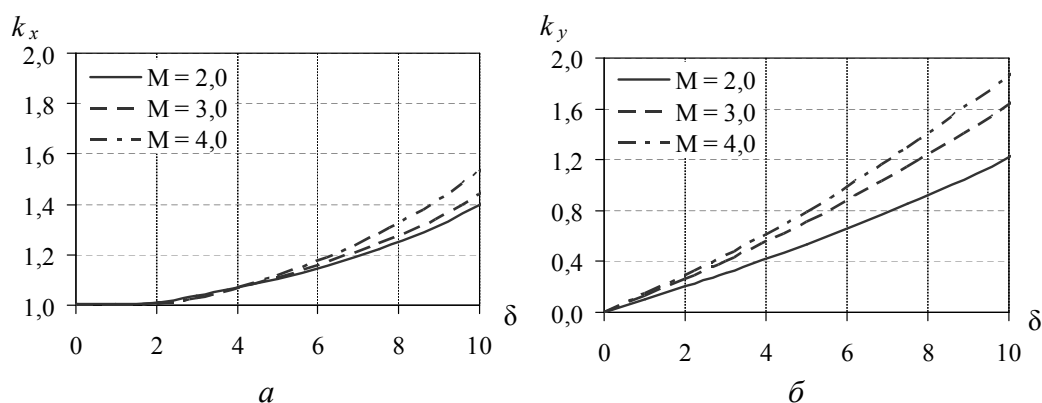


Рис. 9. Поправочные коэффициенты учета угла нутации снаряда для различных чисел Маха:  
а)  $k_x(\delta)$ ; б)  $k_y(\delta)$

аэродинамические характеристики. Отклонение оси снаряда от направления скорости определяется углом нутации  $\delta$ , движение считается устойчивым для диапазона углов  $\delta = 0 \div 20^\circ$ .

При несимметричном обтекании снаряда (угол нутации  $\delta = 10^\circ$ ) давление на двух сторонах снаряда будет различаться (рис. 8). В результате этого возникает нормальная составляющая силы сопротивления  $F_y$  (считаем, что отклонение происходит в плоскости  $xOy$ ).

Коэффициенты продольной (лобовой) и нормальной составляющих силы сопротивления можно представить в следующем виде:

$$C_x(M, \delta) = k_x(\delta)C_x(M),$$

$$C_y(M, \delta) = k_y(\delta)C_x(M),$$

где  $k_x(\delta)$ ,  $k_y(\delta)$  — поправочные коэффициенты, учитывающие угол нутации снаряда;  $C_x(M)$  — коэффициент лобового сопротивления стабилизированного снаряда ( $\delta = 0^\circ$ ).

С помощью вычислительного эксперимента получены зависимости аэродинамических коэффициентов от угла нутации. Графики поправочных коэффициентов  $k_x(\delta)$ ,  $k_y(\delta)$  для углов нутации  $\delta = 0 \div 10^\circ$  представлены на рисунке 9. Полученные зависимости позволяют определить изменение аэродинамических коэффициентов снаряда при отклонении оси снаряда от направления скорости.

Таким образом, численный эксперимент позволяет непосредственно определять аэродинамические характеристики обтекаемого тела произвольной формы (например, значения коэф-

фициентов сопротивления) без использования эмпирических аппроксимационных зависимостей и способен во многих случаях полностью заменить натурные испытания. Обе описанные методики, основанные на прямом численном моделировании и решении уравнений Рейнольдса, удачно справляются с задачей математического моделирования процесса обтекания. Стоит отметить, что при определении интегральных характеристик в указанном сверхзвуковом диапазоне изменения параметров предпочтительным вариантом выбора является метод RANS, так как требует значительно меньшего объема машинных ресурсов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коломийцев А.В., Ларьков С.Н. Исследование характеристик снарядов с вогнутой оживальной головной частью аэродинамическими методами // *Авиационно-космическая техника и технология*. 2004. Т. 6. № 11. С. 49–55.
2. Нилсен Дж. Аэродинамика управляемых снарядов: пер. с англ. М.: Оборонгиз, 1962. 474 с.
3. Липанов А.М., Карсканов С.А. Применение схем высокого порядка аппроксимации при моделировании процессов торможения сверхзвуковых течений в прямоугольных каналах // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2013. Т. 6. № 3. С. 292–299.
4. Липанов А.М. Теоретическая механика ньютоновских сред. М.: Наука, 2011. 551 с.
5. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // *Journal of Computational Physics*. 1996. Vol. 126. P. 202–228.
6. Gottlieb S., Shu C.-W. Total variation diminishing Runge–Kutta schemes // *Mathematics of computation*. 1998. Vol. 67. № 221. P. 73–85.
7. Фрик П.Г. Турбулентность: подходы и модели. М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 292 с.
8. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1974. Vol. 3. P. 269–289.
9. Черный Г.Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
10. Коновалов А.А., Николаев Ю.Ф. Внешняя баллистика. М.: ЦНИИ информации, 1979. 228 с.

Поступила в редакцию 28.08.2014

Королев Станислав Анатольевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического моделирования процессов и технологий, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова, 426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 7.  
E-mail: stkj@mail.ru

Карсканов Сергей Андреевич, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Институт механики УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.  
E-mail: ser@udman.ru

*S. A. Korolev, S. A. Karaskanov*

#### **Mathematical simulation of supersonic airflow around the rotary body**

*Keywords:* external flow, Reynolds-averaged Navier–Stokes, direct numerical simulation, drag coefficient, computational hydrodynamics.

MSC: 76N15

Two approaches to the problem of numerical simulation of streamlined bodies airflow are considered. These approaches are: numerical calculation of the Reynolds-averaged Navier–Stokes equations (RANS) using the turbulence model and direct numerical simulation (DNS). Testing of the considered approaches were conducted by solving the problem of flow past bodies of revolution with simple geometries: sphere and cone cylinder, for which values of drag coefficient at different Mach numbers are known. Qualitative and quantitative comparison of the results for the supersonic flow (modelled by RANS and DNS methods) around the bodies under consideration are carried out. The numerical simulation method is tested by considering

the missile body (projectile) of characteristic shape. The numerical simulation results for the flow around the projectile are presented for a wide range of parameters: Mach numbers and angles of nutation. The calculated values of the drag coefficients are compared to the empirical reference dependencies according to the laws of 1943 and 1958.

## REFERENCES

1. Kolomiitsev A.V., Lar'kov S.N. Application of aerodynamic methods of designing for working out flying vehicle of the maximum density of configuration with set path characteristics, *Aviatsionno-Kosmicheskaya Tekhnika i Tekhnologiya*, 2004, vol. 6, no. 11, pp. 49–55 (in Russian).
2. Nielsen J.N. *Missile aerodynamics*, New York: McGraw-Hill, 1960. Translated under the title *Aerodinamika upravlyayemykh snaryadov*, Moscow: Oborongiz, 1962, 474 p.
3. Lipanov A.M., Karskanov S.A. Application of high-order schemes for modeling the process of braking of supersonic flows in rectangular channels, *Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 3, pp. 292–299 (in Russian).
4. Lipanov A.M. *Teoreticheskaya mekhanika n'yutonovskikh sred* (Theoretical mechanics of newtonian quality), Moscow: Nauka, 2011, 551 p.
5. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes, *Journal of Computational Physics*, 1996, vol. 126, pp. 202–228.
6. Gottlieb S., Shu C.-W. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes, *Mathematics of Computation*, 1998, vol. 67, no. 221, pp. 73–85.
7. Frik P.G. *Turbulentnost': podkhody i metody* (Turbulence: Approaches and Models), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2003, 292 p.
8. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1974, vol. 3, pp. 269–289.
9. Chernyi G.G. *Techeniya gasa s bol'shoy sverkhzvukovoi skorost'yu* (Gas flow at hypersonic speeds), Moscow: Fizmatgiz, 1959, 220 p.
10. Konovalov A.A., Nikolaev Y.F. *Vneshnyaya ballistika* (External ballistics), Moscow: Central Research Institute of Information, 1979, 228 p.

Received 28.08.2014

Korolev Stanislav Anatol'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Modeling of Processes and Technologies, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, ul. Studencheskaya, 7, Izhevsk, 426069, Russia.  
E-mail: stkj@mail.ru

Karskanov Sergei Andreevich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.  
E-mail: ser@udman.ru