УДК 517.977.1, 517.926

© *В. А. Зайцев*

РАВНОМЕРНАЯ ПОЛНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ И ГЛОБАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ ИНВАРИАНТАМИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В ФОРМЕ ХЕССЕНБЕРГА[1]

Доказано, что линейная управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

с коэффициентами в форме Хессенберга при достаточно широких условиях на коэффициенты обладает свойством равномерной полной управляемости в смысле Калмана. Показана существенность для некоторых полученных достаточных условий. Установлены следствия для квазидифференциальных уравнений. Исследуется задача о глобальном управлении асимптотическими инвариантами системы

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

полученной замыканием системы (1) обратной связью $u = Ux$. В известных результатах С. Н. Поповой ослабляются условия на коэффициенты. Для системы (2) с коэффициентами в форме Хессенберга, с помощью результатов С. Н. Поповой, получены достаточные условия глобальной скаляризуемости и глобальной управляемости показателей Ляпунова, а в случае когда $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ — ω-периодические и достаточные условия глобальной ляпуновской приводимости.

Ключевые слова: линейная управляемая система, равномерная полная управляемость, система в форме Хессенберга, глобальное управление асимптотическими инвариантами.

§ 1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ — линейное пространство вещественных векторов-столбцов размерности n с нормой $|x| = \sqrt{x^T x}$ (T — операция транспонирования вектора или матрицы); $e_1, \ldots, e_n$ — канонический ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$; $M_{n,m}$ — пространство вещественных $n \times m$-матриц (если $m = n$, то пишем M_n) со спектральной нормой $|A| = \max\limits_{|x|=1} |Ax|$, индуцированной евклидовыми нормами; $I = [e_1, \ldots, e_n] \in M_n$ — единичная матрица; $L_p(\Delta) = L_p(\Delta, X)$ — пространство Лебега измеримых функций $G : \Delta \to X$, где $p = 1, 2$, $\Delta = [\alpha, \beta]$, $X = M_{n,m}$ или $X = \mathbb{R}^n$, таких, что $\int_\alpha^\beta |G(t)|^p \, dt < \infty$ (множество X в записи опускаем, если из контекста понятно, какое оно); $L_p^{\mathrm{loc}}(\Omega, X) := \{G : \Omega \to X : G\big|_\Delta \in L_p(\Delta, X) \ \forall\, \Delta = [\alpha, \beta] \subset \Omega\}$ — пространство локально суммируемых функций на $\Omega \subset \mathbb{R}$ со степенью p ($p = 1, 2$); $\|G\|_{L_p(\Delta)} := \left(\int_\alpha^\beta |G(t)|^p \, dt\right)^{1/p}$ — норма функции $G \in L_p(\Delta, X)$ ($p = 1, 2$) (множество Δ в записи опускаем, если из контекста понятно, какое оно); $\|F\|_{C(\Omega)} := \sup\{|F(t)| : t \in \Omega\}$ — sup-норма функции F, заданной на $\Omega \subset \mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ или в $M_{n,m}(\mathbb{R})$. Квадратичную форму $V(x) = x^T Q x$, $x \in \mathbb{R}^n$, отождествляем с симметрической матрицей $Q = Q^T \in M_n$, ее задающей. Неравенства $Q > (\geqslant, <, \leqslant) P$ для симметрических матриц Q, P понимаются в смысле квадратичных форм. Записи $b := a$ и $a =: b$ означают, что элементу b присваивается значение a (то есть b по определению равно a).

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad u \in \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках базовой части (проект № 2003).

На протяжении всей работы предполагаем, что $A \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, M_n)$, $\quad B \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, M_{n,m})$. В качестве управлений в системе (1) будем рассматривать измеримые по Лебегу функции $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ ($\Omega \subset \mathbb{R}$ — промежуток) такие, что $Bu \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. При таких условиях решение задачи Коши $\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t)$, $x(t_0) = x_0$, существует для любого $(t_0, x_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$, единственно, определено при всех $t \in \Omega$, и это решение является абсолютно непрерывной функцией [1, с. 7–9].

Обозначим через $X(t, s)$ матрицу Коши свободной системы $\dot{x} = A(t)x$, то есть решение матричной задачи Коши $\dot{X} = A(t)X$, $X(s) = I$, $I \in M_n$. Эта функция является абсолютно непрерывной по каждой переменной. Все соотношения между измеримыми функциями будем предполагать выполняющимися почти всюду (п. в.).

Напомним, что матрица $A(\cdot)$ называется *интегрально ограниченной на* $\mathbb{R}$ [2, с. 252], если

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |A(s)|\, ds \leqslant a < \infty.$$

Предположим, что $B \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, M_{n,m})$. Тогда определена симметрическая $n \times n$-матрица

$$W(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} X(t_0, s)B(s)B^T(s)X^T(t_0, s)\, ds.$$

Она называется *матрицей управляемости* (*матрицей Калмана*) системы (1) на отрезке $[t_0, t_1]$.

Определение 1 (Р. Калман [3]). Система (1) называется:
равномерно вполне управляемой, если найдутся $\vartheta > 0$ и $\alpha_i = \alpha_i(\vartheta) > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, такие, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства

$$0 < \alpha_1 I \leqslant W(\tau, \tau + \vartheta) \leqslant \alpha_2 I, \tag{2}$$

$$0 < \alpha_3 I \leqslant X(\tau + \vartheta, \tau)W(\tau, \tau + \vartheta)X^T(\tau + \vartheta, \tau) \leqslant \alpha_4 I; \tag{3}$$

ϑ-равномерно вполне управляемой, если (1) равномерно вполне управляема на отрезках длины ϑ, т. е. существуют $\alpha_i = \alpha_i(\vartheta) > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, такие, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства (2), (3).

Е. Л. Тонков доказал [4,5] критерий равномерной полной управляемости по Калману (см. [6, теорема 1]) системы (1), который можно положить в основу определения равномерной полной управляемости системы (1) (см. [6, определение 3]). В работе [6] было введено еще одно определение некоторого свойства, которое связано с определениями Калмана и Тонкова (см. [6, определение 4, замечание 5]).

Определение 2. Будем говорить, что система (1):
обладает свойством $H(\vartheta)$ (где $\vartheta > 0$), если существуют $\beta_i = \beta_i(\vartheta) > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, такие, что для любого $\tau \in \mathbb{R}$ и для любого вектора $h \in \mathbb{R}^n$ такого, что $|h| = 1$, выполнены неравенства

$$\beta_1 \leqslant \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau, s)B(s)|\, ds \leqslant \beta_2, \tag{4}$$

$$\beta_3 \leqslant \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau + \vartheta, s)B(s)|\, ds \leqslant \beta_4; \tag{5}$$

обладает свойством H, если существует $\vartheta > 0$ такое, что система (1) обладает свойством $H(\vartheta)$.

В работе [6] исследована взаимосвязь между этими определениями. Показано, что определение свойства H является обобщением определения равномерной полной управляемости системы (1) в смысле Тонкова [6, теорема 4]. Доказано, что если матрица $B(\cdot)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |B(s)|^2\, ds \leqslant b_2 < \infty,$$

то свойство $H(\vartheta)$ влечет ϑ-равномерную полную управляемость в смысле определения 1 Калмана [6, теорема 5]. Доказано, что если $B(\cdot)$ ограничена, то определения 1 и 2 эквивалентны. Будем называть свойство $H(\vartheta)$ свойством *ϑ-равномерной полной управляемости в смысле определения* 2. Если $B(\cdot)$ ограничена, то не будем указывать, в каком именно смысле — определения 1 или определения 2 — понимается свойство равномерной полной управляемости.

Доказано [6, теорема 12], что система (1), имеющая каноническую форму Фробениуса, т. е. эквивалентная линейному дифференциальному уравнению n-го порядка, с интегрально ограниченными коэффициентами является ϑ-равномерно вполне управляемой в смысле определения 2 и определения 1 Калмана для любого $\vartheta > 0$. В настоящей работе этот результат обобщается на системы более общего вида — на системы вида (1) в форме Хессенберга. Здесь продолжаются исследования, проведенные в [6–8].

§ 2. Равномерная полная управляемость линейной системы в форме Хессенберга

Всюду далее считаем, что $m = 1$. Пусть коэффициенты системы (1) имеют следующий вид:

$$A(t) = \begin{Vmatrix} a_{11}(t) & b_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & b_2(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1}(t) & \dots & \dots & \dots & b_{n-1}(t) \\ a_{n1}(t) & \dots & \dots & \dots & a_{nn}(t) \end{Vmatrix}, \qquad B(t) = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n(t) \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Система (1) с коэффициентами вида (6) называется системой в (нижней) форме Хессенберга. Задачи, связанные с управляемостью таких систем и приводимостью к системам такого вида, рассматривались, в частности, в работах [9–12]. Хорошо известно следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть коэффициенты системы* (1), (6) *— непрерывные функции и существует промежуток $\mathcal{J}$ такой, что $b_i(t) \neq 0$ при $t \in \mathcal{J}$, $i = \overline{1,n}$. Тогда система* (1), (6) *вполне управляема на всяком отрезке $[\tau_0, \tau_1] \in \mathcal{J}$.*

Предложение 1, в частности, было получено Е. Л. Тонковым [5] как следствие результата о неосцилляции квазидифференциального уравнения. Этот результат также установлен в работах [10, § 4.4], [11, § 6]. В работе [8, теорема 3] это утверждение распространяется на системы с коэффициентами более общего типа: $A \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, M_n)$, $B \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, M_{n,m})$. В работе [8] выдвинута гипотеза о том, что система в форме Хессенберга обладает свойством равномерной полной управляемости. Один из основных результатов настоящей работы состоит в доказательстве этой гипотезы. Ранее [7] эта гипотеза была доказано только для $n = 2$. Введем некоторые определения.

Определение 3. Будем говорить, что измеримая функция $b : \mathbb{R} \to X$ *удовлетворяет условию Z_1*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $0 < h < \delta$, то $\displaystyle\int_\tau^{\tau+h} |b(s)|\,ds < \varepsilon$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$. Здесь $X = \mathbb{R}^k$ или $X = M_{m,k}(\mathbb{R})$.

Следующая лемма поясняет условие Z_1 (индекс 1 означает норму в L_1).

Лемма 1.
1. *Пусть $b(\cdot)$ измеримая и ограниченная на $\mathbb{R}$. Тогда $b(\cdot)$ удовлетворяет условию Z_1.*
2. *Пусть $b(\cdot)$ удовлетворяет условию Z_1. Тогда $b(\cdot)$ интегрально ограничена на $\mathbb{R}$.*
3. *Обратные импликации к высказываниям* 1, 2 *не верны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть $\|b\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant K$. Полагаем $\delta := \varepsilon/K$.

2. Пусть $\varepsilon = 1$. Построим по нему число $\delta > 0$ согласно свойству Z_1. Положим $N := [1/\delta]+1$. Тогда $\delta N > 1$. Пусть $\tau \in \mathbb{R}$ — любое. Построим разбиение $\tau = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = \tau+1$ отрезка

$[\tau,\tau+1]$ на промежутки $[\tau_{i-1},\tau_i]$, $i=1\ldots,N$, длины которых меньше δ. Тогда $\displaystyle\int_\tau^{\tau+1}|b(s)|\,ds=$ $\displaystyle=\sum_{i=1}^N\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}|b(s)|\,ds<N\varepsilon=N$. Следовательно, функция $b(\cdot)$ интегрально ограничена.

3. Условие Z_1 для функции $b(\cdot)$ означает равномерную непрерывность на $\mathbb{R}$ первообразной $F(t)=\displaystyle\int_0^t|b(s)|\,ds$ функции $|b(t)|$. Пусть $b(t)=p(t)$, где $p(t)$ — периодическая функция с периодом $\omega=1$ такая, что $p(t)=1/\sqrt{t}$ при $t\in(0,1]$. Найдем $F(t)$, получим, что $F(t)=2(\sqrt{t-n}+n)$, $t\in[n,n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$. Очевидно, эта функция равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, следовательно, условие Z_1 для функции $b(\cdot)$ выполнено; однако функция $b(\cdot)$ не ограничена на $\mathbb{R}$. Таким образом, обратная импликация к 1 не верна. Обратная импликация к 2 не верна. Пример:

$$b(t)=\begin{cases}1, & t<1,\\ k, & t\in\Big[k,k+\dfrac{1}{k}\Big),\quad k\in\mathbb{N},\\ 0 & \text{при других }\ t\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Для любого $k\in\mathbb{N}$ имеем $\displaystyle\int_k^{k+1}b(t)\,dt=1$, следовательно, функция $b(t)$ интегрально ограничена. Далее, пусть $\varepsilon=1$. Для любого $\delta>0$ выберем $h=\delta/2>0$ и $\tau=[2/\delta]+1$. Тогда $\displaystyle\int_\tau^{\tau+h}b(t)\,dt=$ $=\tau\cdot\frac{1}{\tau}=1\geqslant\varepsilon$. Следовательно, функция $b(\cdot)$ не удовлетворяет условию Z_1. □

Определение 4. Будем говорить, что функция $b\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *удовлетворяет условию* Y_1, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что если $0<h<\delta$, то выполнено неравенство $\displaystyle\int_\tau^{\tau+1}|b(t+h)-b(t)|\,dt<\varepsilon$ для всех $\tau\in\mathbb{R}$.

Условие Y_1 является некоторым ослаблением свойства кусочной равномерной непрерывности функции $b(\cdot)$ на $\mathbb{R}$.

Определение 5 (С. Н. Попова [13], [14, § 26]). Функция $b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называется *кусочно равномерно непрерывной на* $\mathbb{R}$, если она кусочно непрерывна на $\mathbb{R}$; существует такое $\Delta_0>0$, что длина каждого интервала непрерывности I_i, $i\in\mathbb{I}$, функции $b(\cdot)$ удовлетворяет условию $|I_i|\geqslant\Delta_0$; для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\Delta=\Delta(\varepsilon)>0$, что для каждого $i\in\mathbb{I}$ и всех $t,s\in I_i$ таких, что $|t-s|\leqslant\Delta$, выполнено неравенство $|b(t)-b(s)|\leqslant\varepsilon$.

Ясно, что если функция кусочно равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, то она удовлетворяет условию Y_1. Обратное утверждение не верно. Пример: $b(t)=1$, $t<1$; $b(t)=\chi_{[k,k+1/k)}(t)$, $t\in[k,k+1)$, $k\in\mathbb{N}$. Функция $b(t)$ не удовлетворяет определению 5, поскольку число $\Delta_0>0$ не существует. Однако условие Y_1 выполняется: всякий промежуток $[\tau,\tau+1)$ длины 1 содержит не более 3 точек разрыва; полагая $\delta=\varepsilon/3$, получаем требуемое неравенство в определении 4.

Замечание 1. Условие Y_1 использовалось в работе [15]. Согласно терминологии в [15], функция $b(\cdot)$ принадлежит пространству Степанова, если $b(\cdot)$ интегрально ограничена и удовлетворяет условию Y_1. Для функций $b_1(\cdot)$, $b_2(\cdot)$ из пространства Степанова определим расстояние по формуле $p(b_1,b_2)=\displaystyle\sup_{t\in\mathbb{R}}\Big[\min\Big(\int_t^{t+1}|b_1(s)-b_2(s)|\,ds,\frac{1}{|t|}\Big)\Big]$. Определим через $b_\tau(\cdot)$ сдвиг функции $b(\cdot)$ на τ, т. е. $b_\tau(t):=b(t+\tau)$, $t\in\mathbb{R}$. Через $\mathcal{R}(b)$ обозначим замыкание множества $\{b_\tau(\cdot),\tau\in\mathbb{R}\}$ сдвигов функции $b(\cdot)$ в метрике p. А. Г. Иванов доказал [16], что если $b(\cdot)$ принадлежит пространству Степанова, то $\mathcal{R}(b)$ — компактное (относительно метрики p) пространство.

Лемма 1 показывает, что условие интегральной ограниченности функции $b(\cdot)$ не влечет условие Z_1. Докажем, что если дополнительно потребовать условие Y_1 для функции $b(\cdot)$, то такая импликация будет верна.

Лемма 2. *Пусть функция $b \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ удовлетворяет условию Y_1 и интегрально ограничена. Тогда она удовлетворяет условию Z_1.*

Доказательство. Пусть $b_\tau(\cdot) = b(\cdot+\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, — сдвиг функции $b(\cdot)$. Рассмотрим семейство функций $\Phi = \{b_\tau(t),\ t \in [0,1] : \tau \in \mathbb{R}\} \subset L_1([0,1])$. В силу того что $b(\cdot)$ интегрально ограничена, выполнено неравенство $\displaystyle\int_0^1 |b_\tau(t)|\,dt \leqslant a < +\infty$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$ для некоторого a. Следовательно, семейство Φ равномерно ограничено в $L_1([0,1])$. В силу условия Y_1 для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $0 < h < \delta$, то для всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\displaystyle\int_0^1 |b_\tau(t+h) - b_\tau(t)|\,dt < \varepsilon$. Это означает, что семейство Φ равностепенно непрерывно в среднем в $L_1([0,1])$ (см. [17, с. 342]). В силу критерия М. Рисса (см. [18], [19, с. 320], [20, с. 176]) множество Φ относительно компактно в $L_1([0,1])$. Следовательно [21, с. 105], Φ вполне ограничено в $L_1([0,1])$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_1 := \varepsilon/2 > 0$. Построим конечную ε_1-сеть $z_1, \ldots, z_k \in L_1([0,1])$ для множества Φ. Поскольку $z_i \in L_1([0,1])$, $i = \overline{1,k}$, то в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега [21, с. 296] для каждого $i = 1, \ldots, k$ найдется $\delta_i = \delta_i(\varepsilon_1) > 0$ такое, что если $0 < h < \delta_i$, то $\displaystyle\int_0^h |z_i(t)|\,dt < \varepsilon_1$. Положим $\delta_0 := \min \delta_i$, $i = \overline{1,k}$; $\delta := \min\{\delta_0, 1\}$. Тогда $\delta > 0$. Пусть $0 < h < \delta$. Тогда, в частности, $h < 1$. В силу определения ε_1-сети, для всякого $\tau \in \mathbb{R}$ найдется $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$ такое, что $\displaystyle\int_0^1 |b_\tau(t) - z_{i_0}(t)|\,dt < \varepsilon_1$. Тогда имеем

$$\int_\tau^{\tau+h} |b(s)|\,ds = \int_0^h |b_\tau(t)|\,dt = \int_0^h |b_\tau(t) - z_{i_0}(t) + z_{i_0}(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^h |b_\tau(t) - z_{i_0}(t)|\,dt + \int_0^h |z_{i_0}(t)|\,dt < \int_0^1 |b_\tau(t) - z_{i_0}(t)|\,dt + \varepsilon_1 < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Таким образом, функция $b(\cdot)$ удовлетворяет условию Z_1. Лемма доказана. □

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что для системы* (1), (6) *выполнены следующие условия:*
(A) *коэффициенты $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ интегрально ограничены;*
(B) *коэффициенты $b_i(\cdot)$, $i = \overline{1, n-1}$, удовлетворяют условию Y_1;*
(C) $|b_i(t)| \geqslant \varkappa > 0$, $t \in \mathbb{R}$, *для всех $i = \overline{1,n}$.*
Тогда система (1), (6) *ϑ-равномерно вполне управляема для любого $\vartheta > 0$ в смысле определения* 2.

Доказательство. Из условий (A), (B) и леммы 2 следует, что коэффициенты $b_i(\cdot)$, $i = \overline{1, n-1}$, удовлетворяют условию Z_1. Пусть

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|A\|_{L_1([t,t+1])} \leqslant a, \qquad \sup_{t\in\mathbb{R}} \|B\|_{L_1([t,t+1])} \leqslant a. \tag{7}$$

Зафиксируем произвольное $\vartheta > 0$. Из (первого) неравенства (7) следует, что для любых $t, s \in \mathbb{R}$ таких, что $|t-s| \leqslant \vartheta$, выполнено неравенство

$$|X(t,s)| \leqslant e^{a(\vartheta+1)} \tag{8}$$

(см., например, [6, лемма 6]). Отсюда, в частности, следует неравенство $|X(s,t)| \geqslant e^{-a(\vartheta+1)}$.

Проведем доказательство индукцией по размерности n вектора состояния x. Пусть $n = 1$. Тогда система имеет вид

$$\dot{x} = a_{11}(t)x + b_1(t)u, \qquad x \in \mathbb{R}^1, \quad u \in \mathbb{R}^1. \tag{9}$$

Пусть заданы любое $\tau \in \mathbb{R}$ и любой вектор $h \in \mathbb{R}^n$ такой, что $|h| = 1$. Используя неравенства (7), (8), получим, что

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau, s)B(s)|\, ds \leqslant e^{a(\vartheta+1)}a(\vartheta + 1) =: \beta_2,$$
$$\int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau+\vartheta, s)B(s)|\, ds \leqslant e^{a(\vartheta+1)}a(\vartheta + 1) =: \beta_4.$$

Далее, учитывая условие (C) и неравенство (8), получим

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau, s)B(s)|\, ds = \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T||X(\tau, s)||b_1(s)|\, ds \geqslant \vartheta e^{-a(\vartheta+1)}\varkappa =: \beta_1,$$
$$\int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau+\vartheta, s)B(s)|\, ds = \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T||X(\tau+\vartheta, s)||b_1(s)|\, ds \geqslant \vartheta e^{-a(\vartheta+1)}\varkappa =: \beta_3.$$

Таким образом, неравенства (4), (5) выполнены. Следовательно, система (9) является ϑ-равномерно вполне управляемой в смысле определения 2. База индукции установлена.

Выдвигаем индуктивное предположение. Пусть $n \geqslant 2$. Предположим, что система

$$\dot{y} = P(t)y + R(t)v, \qquad y \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad v \in \mathbb{R}^1, \tag{10}$$

$$P(t) = \begin{Vmatrix} a_{11}(t) & b_1(t) & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & b_2(t) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-2,1}(t) & \ldots & \ldots & \ldots & b_{n-2}(t) \\ a_{n-1,1}(t) & \ldots & \ldots & \ldots & a_{n-1,n-1}(t) \end{Vmatrix}, \qquad R(t) = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{n-1}(t) \end{Vmatrix}, \tag{11}$$

является ϑ-равномерно вполне управляемой в смысле определения 2. Покажем тогда сначала, что система

$$\dot{z} = F(t)z + G(t)w, \qquad z \in \mathbb{R}^n, \quad w \in \mathbb{R}^1, \tag{12}$$

$$F(t) = \begin{Vmatrix} a_{11}(t) & b_1(t) & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & b_2(t) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1}(t) & \ldots & \ldots & \ldots & b_{n-1}(t) \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{Vmatrix}, \qquad G(t) = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \tag{13}$$

является ϑ-равномерно вполне управляемой в смысле определения 2. Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Пусть $Y(t, s)$ — матрица Коши системы $\dot{y} = P(t)y$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, где $P(t)$ имеет вид* (11)*; $Z(t, s)$ — матрица Коши системы $\dot{z} = F(t)z$, $z \in \mathbb{R}^n$, где $F(t)$ имеет вид* (13)*. Тогда $Z(\tau, t)$ имеет блочный вид: $Z(\tau, t) = \begin{Vmatrix} Z_1(\tau, t) & Z_2(\tau, t) \\ Z_3(\tau, t) & Z_4(\tau, t) \end{Vmatrix}$, где*

$$Z_1(\tau, t) = Y(\tau, t) \in M_{n-1}, \tag{14}$$

$$Z_2(\tau, t) = -\int_\tau^t Y(\tau, s)R(s)\, ds, \tag{15}$$

$$Z_3(\tau, t) \equiv 0 \in M_{1,n-1}, \tag{16}$$

$$Z_4(\tau, t) \equiv 1 \in M_1. \tag{17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Матрица $F(t)$ имеет блочный вид:

$$F(t)=\begin{Vmatrix} P(t) & R(t)\\ 0 & 0\end{Vmatrix}. \tag{18}$$

Из равенства $\dfrac{d}{dt}Z(\tau,t)=-Z(\tau,t)F(t)$ и начального условия $Z(\tau,t)\Big|_{t=\tau}=I$ имеем

$$\frac{d}{dt}Z_1(\tau,t)=-Z_1(\tau,t)P(t),\quad Z_1(\tau,t)\Big|_{t=\tau}=I\in M_{n-1}, \tag{19}$$

$$\frac{d}{dt}Z_2(\tau,t)=-Z_1(\tau,t)R(t),\quad Z_2(\tau,t)\Big|_{t=\tau}=0\in M_{n-1,1}, \tag{20}$$

$$\frac{d}{dt}Z_3(\tau,t)=-Z_3(\tau,t)P(t),\quad Z_3(\tau,t)\Big|_{t=\tau}=0\in M_{1,n-1}, \tag{21}$$

$$\frac{d}{dt}Z_4(\tau,t)=-Z_3(\tau,t)R(t),\quad Z_4(\tau,t)\Big|_{t=\tau}=1\in M_{1}. \tag{22}$$

Из (19) очевидно следует (14). Подставляя (14) в уравнение (20) и интегрируя его с учетом начального условия в (20), получаем (15). Из (21) очевидно следует (16). Подставляя (16) в уравнение (22) и интегрируя его с учетом начального условия в (22), получаем (17). Лемма доказана. □

П р о д о л ж е н и е д о к а з а т е л ь с т в а т е о р е м ы 1. Построим матрицы

$$Y(\tau,s)R(s)=:C(\tau,s)=:\operatorname{col}(c_1(\tau,s),\dots,c_{n-1}(\tau,s))\in M_{n-1,1},$$
$$Z(\tau,s)G(s)=:D(\tau,s)=:\operatorname{col}(d_1(\tau,s),\dots,d_{n}(\tau,s))\in M_{n,1}.$$

Из леммы 3 вытекает, что

$$d_i(\tau,s)=-\int_\tau^s c_i(\tau,\zeta)\,d\zeta,\quad i=\overline{1,n-1};\quad d_n(\tau,s)\equiv 1. \tag{23}$$

В силу индуктивного предположения и эквивалентности определения 2 и [6, определение 4] (см. [6, замечание 5]) существует $\beta_1>0$ такое, что для любого $\tau\in\mathbb{R}$ и для любого вектора $h\in\mathbb{R}^{n-1}$ выполнено неравенство

$$\beta_1|h|\leqslant\int_\tau^{\tau+\vartheta}|h^TC(\tau,s)|\,ds. \tag{24}$$

Докажем неравенства вида (4), (5) для системы (12), (13). Поскольку $F(t)$ имеет блочный вид (18), легко видеть, что $|F(t)|\leqslant|P(t)|+|R(t)|$, следовательно, $\|F\|_{L_1(\Delta)}\leqslant\|P\|_{L_1(\Delta)}+\|R\|_{L_1(\Delta)}$. В силу индуктивного предположения для матриц $P(\cdot)$, $R(\cdot)$ выполнены неравенства вида (7). Отсюда следует, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|F\|_{L_1([t,t+1])}\leqslant 2a$. Таким образом, для любых $t,s\in\mathbb{R}$ таких, что $|t-s|\leqslant\vartheta$, выполнено неравенство $|Z(t,s)|\leqslant e^{2a(\vartheta+1)}=:\mu$. Пусть даны любые $\tau\in\mathbb{R}$ и вектор $h\in\mathbb{R}^n$, $|h|=1$. Имеем следующие оценки сверху:

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta}|h^TZ(\tau,s)G(s)|\,ds\leqslant\vartheta\mu=:\beta_2',\qquad\int_\tau^{\tau+\vartheta}|h^TZ(\tau+\vartheta,s)G(s)|\,ds\leqslant\vartheta\mu=:\beta_4'.$$

Докажем, что выполнено неравенство

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta}|h^TZ(\tau,s)G(s)|\,ds\geqslant\beta_1' \tag{25}$$

для некоторого $\beta_1'>0$. Предположим противное. Тогда существуют последовательности $\tau_k\in\mathbb{R}$ и $h_k\in\mathbb{R}^n$, $|h_k|=1$, $k\in\mathbb{N}$, такие, что

$$\int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta}|h_k^TZ(\tau_k,s)e_n|\,ds<\frac{1}{k}\to 0\ \text{ при }\ k\to\infty. \tag{26}$$

Поскольку $|h_k| = 1$, $k \in \mathbb{N}$, то из последовательности h_k можно извлечь сходящуюся подпоследовательность (без ограничения общности, пусть сама последовательность h_k сходится) к $h_0 \in \mathbb{R}^n$, $|h_0| = 1$. Тогда

$$\int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} |h_0^T Z(\tau_k, s) e_n|\, ds \leqslant \int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} |h_0^T - h_k^T||Z(\tau_k, s)||e_n|\, ds + \\ + \int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} |h_k^T Z(\tau_k, s) e_n|\, ds \to 0 \ \text{ при } \ k \to \infty \tag{27}$$

в силу оценки $|Z(t,s)| \leqslant \mu$, условия $h_k \to h_0$ при $k \to \infty$ и соотношения (26). Обозначим $h_0 =: \operatorname{col}(h_1^0, \ldots, h_n^0) \in \mathbb{R}^n$, $\overline{h}_0 := \operatorname{col}(h_1^0, \ldots, h_{n-1}^0) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Тогда ясно, что $\overline{h}_0 \neq 0$. В противном случае если $\overline{h}_0 = 0$, то $|h_n^0| = 1$; тогда $|h_0^T Z(\tau_k, s) e_n| = 1$ в силу леммы 3 и $\displaystyle\int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} |h_0^T Z(\tau_k, s) e_n|\, ds = \vartheta \not\to 0$, т. е. предельное соотношение (27) не выполняется.

Введем функции $g_k(t) := h_0^T Z(\tau_k, \tau_k + t) e_n$, $f_k(t) := |g_k(t)|$, $k \in \mathbb{N}$, $t \in [0, \vartheta]$. Тогда $\displaystyle\int_0^{\vartheta} f_k(t)\, dt = \int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} |h_0^T Z(\tau_k, s) e_n|\, ds$. В силу (27) имеем

$$\int_0^{\vartheta} f_k(t)\, dt \to 0 \ \text{ при } \ k \to \infty. \tag{28}$$

Поскольку $f_k(t) \geqslant 0$, то из (28) следует (см. [22, с. 152, упр. 1]), что $f_k(t) \to 0$, $t \in [0, \vartheta]$, по мере. Тогда можно извлечь из $f_k(t)$ подпоследовательность, сходящуюся к нулю п. в. на $[0, \vartheta]$. Выберем такую подпоследовательность; вновь ее обозначим через $f_k(t)$. Тогда $f_k(t) \to 0$ п. в. $t \in [0, \vartheta]$, следовательно, $g_k(t) \to 0$ п. в. $t \in [0, \vartheta]$.

Имеем $|g_k(t)| \leqslant |h_0^T||Z(\tau_k, \tau_k + t)||e_n| \leqslant \mu$ для $t \in [0, \vartheta]$, для любого $k \in \mathbb{N}$. Значит, семейство функций $\mathcal{G} := \{g_k(t),\, t \in [0, \vartheta] : k \in \mathbb{N}\}$ равномерно ограничено в $C([0, \vartheta])$. Далее, пусть $0 \leqslant t < < s \leqslant \vartheta$, тогда

$$|g_k(t) - g_k(s)| = |h_0^T (Z(\tau_k, \tau_k + t) - Z(\tau_k, \tau_k + s)) e_n| = |h_0^T \int_t^s Z(\tau_k, \tau_k + \zeta) F(\tau_k + \zeta) e_n\, d\zeta| = \\ = |h_0^T \int_t^s Z(\tau_k, \tau_k + \zeta) e_{n-1} b_{n-1}(\tau_k + \zeta)\, d\zeta| \leqslant \mu \int_t^s |b_{n-1}(\tau_k + \zeta)|\, d\zeta. \tag{29}$$

Функция $b_{n-1}(\cdot)$ удовлетворяет условию Z_1. Отсюда и из неравенства (29) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $|t - s| < \delta$, то $|g_k(t) - g_k(s)| < \varepsilon$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Значит, семейство $\mathcal{G}$ равностепенно непрерывно. По теореме Арцела–Асколи [22, с. 452] из последовательности $g_k(t)$ можно выделить равномерно сходящуюся на $[0, \vartheta]$ подпоследовательность. Выделим ее и переобозначим вновь через $g_k(t)$. Предельная функция $g_0(t)$ является непрерывной. Поскольку $g_k(t) \to 0$ п. в. $t \in [0, \vartheta]$, значит, $g_0(t) = 0$ п. в. $t \in [0, \vartheta]$. Поскольку $g_0(t)$ непрерывна, следовательно, $g_0(t) = 0$ для всех $t \in [0, \vartheta]$ и $g_k(t) \rightrightarrows 0$, $t \in [0, \vartheta]$, $k \to \infty$.

В силу определения функций $g_k(t)$ выполнены равенства $g_k(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i^0 d_i(\tau_k, \tau_k + t)$. Пусть $p_k(t) = -g_k'(t)$. Тогда в силу (23) $p_k(t) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} h_i^0 c_i(\tau_k, \tau_k + t) = \overline{h}_0^T C(\tau_k, \tau_k + t)$. Имеем

$$p_k(t) = -(h_0^T Z(\tau_k, \tau_k + t) e_n)' = h_0^T Z(\tau_k, \tau_k + t) F(\tau_k + t) e_n = h_0^T Z(\tau_k, \tau_k + t) e_{n-1} b_{n-1}(\tau_k + t)$$

для п. в. $t \in [0, \vartheta]$.

Покажем, что семейство функций $\mathcal{P} := \{p_k(t),\, t \in [0, \vartheta] : k \in \mathbb{N}\}$ относительно компактно в пространстве $L_1([0, \vartheta])$. Воспользуемся критерием М. Рисса [18]. Имеем

$$\int_0^{\vartheta} |p_k(t)|\, dt = \int_0^{\vartheta} |h_0^T Z(\tau_k, \tau_k + t) e_{n-1} b_{n-1}(\tau_k + t)|\, dt \leqslant \mu a(\vartheta + 1). \tag{30}$$

Таким образом, $\mathcal{P}$ равномерно ограничено в $L_1([0,\vartheta])$. Покажем, что $\mathcal{P}$ равностепенно непрерывно в среднем в $L_1([0,\vartheta])$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $0 < \rho < \delta$, то $\displaystyle\int_0^{\vartheta-\rho} |p_k(t+\rho) - p_k(t)|\,dt < \varepsilon$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\rho \in (0,\vartheta)$, ρ — мало́, $k \in \mathbb{N}$ — любое. Имеем

$$\int_0^{\vartheta-\rho} |p_k(t+\rho) - p_k(t)|\,dt \leqslant \int_0^{\vartheta-\rho} \bigl|h_0^T\bigl(Z(\tau_k,\tau_k+t+\rho) - Z(\tau_k,\tau_k+t)\bigr)e_{n-1}b_{n-1}(\tau_k+t+\rho)\bigr|\,dt +$$
$$+\int_0^{\vartheta-\rho} |h_0^T Z(\tau_k,\tau_k+t)e_{n-1}\bigl(b_{n-1}(\tau_k+t+\rho) - b_{n-1}(\tau_k+t)\bigr)\bigr|\,dt =: N_1 + N_2. \tag{31}$$

Имеем $N_2 \leqslant \mu\displaystyle\int_0^{\vartheta-\rho} |b_{n-1}(\tau_k+t+\rho) - b_{n-1}(\tau_k+t)|\,dt$. Поскольку функция b_{n-1} удовлетворяет условию Y_1, то $N_2 \to 0$ при $\rho \to +0$ равномерно относительно k. Далее, рассмотрим первое слагаемое N_1 в (31). Пусть задано любое $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/(\mu a(\vartheta+1))$. Поскольку функция b_{n-1} удовлетворяет условию Z_1, найдется $\delta \in (0,\vartheta)$ такое, что если $0 < \rho < \delta$, то $\displaystyle\int_\tau^{\tau+\rho} |b_{n-1}(\zeta)|\,d\zeta < \varepsilon_1$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$. Имеем

$$N_1 = \int_0^{\vartheta-\rho} \Bigl|h_0^T\Bigl(-\int_t^{t+\rho} Z(\tau_k,\tau_k+s)F(\tau_k+s)\,ds\Bigr)e_{n-1}b_{n-1}(\tau_k+t+\rho)\Bigr|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^{\vartheta-\rho}\int_t^{t+\rho} \Bigl|h_0^T Z(\tau_k,\tau_k+s)F(\tau_k+s)e_{n-1}b_{n-1}(\tau_k+t+\rho)\Bigr|\,ds\,dt =: N_3. \tag{32}$$

Изменим порядок интегрирования в (32); получим, что

$$\begin{aligned} N_3 \leqslant &\int_0^{\rho} \Bigl|h_0^T Z(\tau_k,\tau_k+s)F(\tau_k+s)\Bigr|\Bigl(\int_0^{s} |b_{n-1}(\tau_k+t+\rho)|\,dt\Bigr)ds +\\ +&\int_\rho^{\vartheta-\rho} \Bigl|h_0^T Z(\tau_k,\tau_k+s)F(\tau_k+s)\Bigr|\Bigl(\int_{s-\rho}^{s} |b_{n-1}(\tau_k+t+\rho)|\,dt\Bigr)ds +\\ +&\int_{\vartheta-\rho}^{\vartheta} \Bigl|h_0^T Z(\tau_k,\tau_k+s)F(\tau_k+s)\Bigr|\Bigl(\int_{s-\rho}^{\vartheta-\rho} |b_{n-1}(\tau_k+t+\rho)|\,dt\Bigr)ds. \end{aligned} \tag{33}$$

Оценим внутренние интегралы в (33) при $\rho < \delta$ в каждом из слагаемых: учитывая диапазон изменения переменной s в каждом внешнем интеграле и условие Z_1, получим

$$\int_0^{s} |b_{n-1}(\tau_k+t+\rho)|\,dt \leqslant \int_0^{\rho} |b_{n-1}(\tau_k+t+\rho)|\,dt < \varepsilon_1, \quad \int_{s-\rho}^{s} |b_{n-1}(\tau_k+t+\rho)|\,dt < \varepsilon_1,$$
$$\int_{s-\rho}^{\vartheta-\rho} |b_{n-1}(\tau_k+t+\rho)|\,dt = \int_s^{\vartheta} |b_{n-1}(\tau_k+\zeta)|\,d\zeta \leqslant \int_{\vartheta-\rho}^{\vartheta} |b_{n-1}(\tau_k+\zeta)|\,d\zeta < \varepsilon_1. \tag{34}$$

Подставим оценки (34) в (33) и воспользуемся аддитивностью интеграла, получим

$$N_3 < \varepsilon_1 \int_0^{\vartheta} \Bigl|h_0^T Z(\tau_k,\tau_k+s)F(\tau_k+s)\Bigr|\,ds \leqslant \varepsilon_1\mu a(\vartheta+1) = \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $N_1 \to 0$ при $\rho \to +0$ равномерно относительно k. Таким образом, $\mathcal{P}$ равностепенно непрерывно в среднем в $L_1([0,\vartheta])$. В силу теоремы М. Рисса отсюда вытекает, что множество $\mathcal{P}$ относительно компактно в $L_1([0,\vartheta])$, а значит (см. [19, с. 46]), и относительно счетно компактно [19, с. 29]. Следовательно, можно извлечь подпоследовательность (которую вновь обозначим через $p_k(t)$), сходящуюся к некоторой функции $p_0 \in L_1([0,\vartheta])$, т. е. $\|p_k - p_0\|_{L_1([0,\vartheta])} := \displaystyle\int_0^{\vartheta} |p_k(t) - p_0(t)|\,dt \to 0$. Поскольку $|p_k(t) - p_0(t)| \geqslant 0$, тогда $|p_k(t) - p_0(t)| \to 0$ на $[0,\vartheta]$ по мере [22, с. 152, упр. 1]. Следовательно, $p_k(t) \to p_0(t)$, $t \in [0,\vartheta]$, по мере. Извлечем подпоследовательность (которую вновь обозначим через $p_k(t)$) такую, что $p_k(t) \to p_0(t)$ п. в. на $[0,\vartheta]$ при $k \to \infty$. Следовательно, $p_k(t) \to p_0(t)$ п. в. на $[0,s]$ для любого $s \in [0,\vartheta]$. Кроме того, в силу неравенства (30) функция $|p_k(\cdot)|$ ограничена сверху суммируемой на $[0,s]$ функцией. По теореме Лебега о предельном переходе получаем, что для всех $s \in [0,\vartheta]$ $\int_0^s p_k(t)\,dt \to \int_0^s p_0(t)\,dt$, $k \to \infty$. Имеем

$$\int_0^s p_k(t)\,dt = \int_0^s -g_k'(t)\,dt = -g_k(s) + g_k(0) = -g_k(s) \rightrightarrows g_0(s) \equiv 0, \quad s \in [0,\vartheta].$$

Следовательно, для всех $s \in [0,\vartheta]$ выполнено равенство $\int_0^s p_0(t)\,dt = g_0(s) = 0$. Таким образом, $0 \equiv g_0'(s) = p_0(s)$ для п. в. $s \in [0,\vartheta]$. Следовательно, $p_k(t) \to 0$ для п. в. $t \in [0,\vartheta]$. Тогда $|p_k(t)| \to 0$ для п. в. $t \in [0,\vartheta]$ и $|p_k(t)|$ ограничена сверху суммируемой функцией. По теореме Лебега о предельном переходе получаем, что $\int_0^\vartheta |p_k(t)|\,dt \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда для $\varepsilon = \beta_1|\overline{h}_0| > 0$ найдется $k \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\varepsilon = \beta_1|\overline{h}_0| > \int_0^\vartheta |p_k(t)|\,dt = \int_0^\vartheta |\overline{h}_0^T C(\tau_k, \tau_k + t)|\,dt = \int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} |\overline{h}_0^T C(\tau_k, s)|\,ds.$$

Получаем противоречие с неравенством (24). Таким образом, неравенство (25) доказано. Из него получаем неравенство

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta} |g^T Z(\tau+\vartheta, s)G(s)|\,ds \geqslant \beta_1'|Z^T(\tau+\vartheta,\tau)g| \geqslant \beta_1'\mu^{-1}|g| =: \beta_3'|g|.$$

Таким образом, из определения 2 с учетом замечания 5 [6] следует, что система (12), (13) является ϑ-равномерно вполне управляемой.

Теперь применим теорему 11 [6] к системе (12), (13): в качестве $Q(t)$ выбираем матрицу $Q(t) = [a_{n1}(t), \ldots, a_{nn}(t)]$. Она интегрально ограничена в силу условия (A). Поскольку $F(t) + Q(t)G(t) = A(t)$, следовательно, получаем, что система (1) с матрицей $A(t)$ вида (6) и матрицей $B(t) = e_n$ является ϑ-равномерно вполне управляемой в смысле определения 2. Поэтому для любых $\tau \in \mathbb{R}^n$ и $h \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства

$$\beta_1''|h| \leqslant \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau,s)e_n|\,ds \leqslant \beta_2''|h|, \qquad \beta_3''|h| \leqslant \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau+\vartheta,s)e_n|\,ds \leqslant \beta_4''|h|.$$

Отсюда и из условия (C) следуют неравенства

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau,s)B(s)|\,ds = \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau,s)e_n b_n(s)|\,ds = \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau,s)e_n||b_n(s)|\,ds \geqslant$$
$$\geqslant \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau,s)e_n|\varkappa\,ds \geqslant \varkappa\beta_1''|h| =: \beta_1'''|h|.$$

Аналогично $\int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau+\vartheta,s)B(s)|\,ds \geqslant \varkappa\beta_3''|h| =: \beta_3'''|h|$. Далее, очевидны неравенства

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau,s)B(s)|\,ds \leqslant e^{a(\vartheta+1)}a(\vartheta+1)|h| =: \beta_2'''|h|,$$
$$\int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau+\vartheta,s)B(s)|\,ds \leqslant e^{a(\vartheta+1)}a(\vartheta+1)|h| =: \beta_4'''|h|.$$

Таким образом, система (1), (6) ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения 2. Индукция завершена. Теорема доказана. □

Замечание 2. Условие (C) в теореме 1 является естественным для системы (1), (6). Очевидно, что оно существенно. Условие (B) теоремы 1 является существенным. Это показывает пример 1 ниже.

Пример 1. Условие Y_1 для функции $b(\cdot)$ можно назвать «равномерной непрерывностью на $\mathbb{R}$ по норме в L_1» функции $b(\cdot)$. По-другому: это свойство означает равностепенную непрерывность в среднем (т. е. по норме в $L_1([0,1])$) множества $b_\tau(\cdot) := b(\tau + \cdot)$ сдвигов функции $b(\cdot)$. Покажем, что условие равномерности в этом свойстве в условии (B) теоремы 1 существенно. Положим

$$f_0(t) := \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/2), \\ -1, & t \in [1/2, 1), \end{cases} \qquad g_0(t) := \int_0^t f_0(s)\,ds = \begin{cases} t, & t \in [0, 1/2), \\ 1 - t, & t \in [1/2, 1). \end{cases}$$

Продолжим функции $f_0(t)$, $g_0(t)$ на $\mathbb{R}$ периодически с периодом $\omega = 1$. Положим

$$f_k(t) := f_0(2^k t), \quad g_k(t) := \frac{1}{2^k} g_0(2^k t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда $g_k'(t) = f_k(t)$ для всех точек $t \in \mathbb{R}$ дифференцируемости функции $g_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, $g_k(t_0) = 0$ для всякого $t_0 \in \mathbb{Z}$. Положим

$$b(t) := \begin{cases} 1, & t < 0, \\ f_k(t), & t \in [k, k+1), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Рассмотрим систему (1), где

$$A(t) = \begin{Vmatrix} 0 & b(t) \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B(t) = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}. \tag{35}$$

Для такой системы условие (C) теоремы 1 выполнено. Далее, коэффициенты (35) ограничены на $\mathbb{R}$, следовательно, условие (A) теоремы 1 также выполнено. Функция $b(\cdot)$ является кусочно непрерывной. Однако она не является кусочно равномерно непрерывной и не удовлетворяет условию Y_1. Покажем это. Положим $\varepsilon = 1$. Для любого $\delta > 0$ выберем $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $1/2^{k_0} < \delta$. Положим $h := 1/2^{k_0}$. Тогда $0 < h < \delta$. Положим $\tau := k_0 - 1$. Для всякого $t \in [k_0 - 1, k_0)$ имеем $\left| b\Big(t + \dfrac{1}{2^{k_0}}\Big) - b(t) \right| = 2$. Тогда

$$\int_\tau^{\tau+1} |b(t+h) - b(t)|\,dt = \int_{k_0-1}^{k_0} \left| b\Big(t + \frac{1}{2^{k_0}}\Big) - b(t) \right| dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_{k_0-1}^{k_0-h} \left| b\Big(t + \frac{1}{2^{k_0}}\Big) - b(t) \right| dt = 2(1-h) \geqslant 1 = \varepsilon.$$

Значит, $b(\cdot)$ не удовлетворяет условию Y_1 (и не является кусочно равномерно непрерывной).

Покажем, что система (1) с матрицами (35) не является равномерно вполне управляемой в смысле определения 2 (и, в силу [6, следствие 2], в смысле определения 1 Калмана).

Пусть заданы произвольное целое число $\vartheta > 0$ и любое $\beta_1 > 0$. Выберем $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\dfrac{1}{2^{k_0+1}} < \beta_1$. Положим $\tau := k_0$, $h := \operatorname{col}(1, 0) \in \mathbb{R}^2$. Покажем, что (левое) неравенство (4) не выполнено. Имеем

$$X(\tau, s) = \begin{Vmatrix} 1 & \displaystyle\int_s^\tau b(\zeta)\,d\zeta \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad X(\tau, s) B(s) = \begin{Vmatrix} \displaystyle\int_s^\tau b(\zeta)\,d\zeta \\ 1 \end{Vmatrix},$$

$$|h^T X(\tau, s) B(s)| = \int_{k_0}^s b(\zeta)\,d\zeta =: r(s), \quad s \in [\tau, \tau + \vartheta] = [k_0, k_0 + \vartheta].$$

Имеем $r(k_1)=0$ для всех $k_1\in\mathbb{Z}\cap[\tau,\tau+\vartheta]$. Отсюда следует, что $r(s)=g_k(s)$, $s\in[k,k+1)$, $k=k_0,k_0+1,\ldots,k_0+\vartheta-1$. Имеем

$$\int_k^{k+1} g_k(s)\,ds=\int_0^1 g_k(s)\,ds=2^{k+1}\int_0^{1/2^{k+1}} s\,ds=\frac{1}{2^{k+2}}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta}|h^TX(\tau,s)B(s)|\,ds=\int_{k_0}^{k_0+\vartheta}r(s)\,ds=\int_{k_0}^{k_0+1}g_{k_0}(s)\,ds+\ldots+\int_{k_0+\vartheta-1}^{k_0+\vartheta}g_{k_0+\vartheta-1}(s)\,ds=$$

$$=\frac{1}{2^{k_0+2}}+\ldots+\frac{1}{2^{k_0+\vartheta+1}}=\frac{1}{2^{k_0+1}}\left(1-\frac{1}{2^{\vartheta}}\right)<\frac{1}{2^{k_0+1}}<\beta_1.$$

Таким образом, (левое) неравенство (4) не выполнено. Следовательно, свойство $H(\vartheta)$ не выполнено ни для какого целого $\vartheta>0$, а в силу [6, предложение 4, свойство (c)] ни для какого $\vartheta>0$. Следовательно, система (1), (35) не является равномерно вполне управляемой. □

Теорема 2. *Предположим, что для системы* (1), (6) *выполнены условия* (A)–(C) *теоремы* 1 *и функция* $b_n^2(\cdot)$ *интегрально ограничена. Тогда система* (1), (6) ϑ*-равномерно вполне управляема по Калману для любого* $\vartheta>0$.

Теорема 2 вытекает из теоремы 1 и [6, теорема 5].

Теорема 3. *Предположим, что коэффициенты* $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ *системы* (1), (6) *ограничены, коэффициенты* $b_i(\cdot)$, $i=\overline{1,n-1}$, *удовлетворяют условиям* Y_1, *и выполнены неравенства* $|b_i(t)|\geqslant\varkappa>0$, $t\in\mathbb{R}$, *для всех* $i=\overline{1,n}$. *Тогда для любого* $\vartheta>0$ *система* (1), (6) ϑ*-равномерно вполне управляема.*

Теорема 3 вытекает из теоремы 1 и леммы 1.

Замечание 3. Рассмотрим систему (1). Положим $Q(t)=[P_0(t),P_1(t),\ldots,P_{n-1}(t)]$, где

$$P_0(t)=B(t),\quad P_k(t)=-A(t)P_{k-1}(t)+\dot P_{k-1}(t),\quad k\geqslant1. \tag{36}$$

Имеет место следующее утверждение (см. [23, теорема 6]): *пусть* $m=1$, *матрицы* $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ *ограничены, функции* $P_i(t)$, $t\in\mathbb{R}$, *в* (36) *определены для всех* $i=0,\ldots,n$, *непрерывны, ограничены и* $|\det Q(t)|\geqslant\varkappa_1>0$, $t\in\mathbb{R}$; *тогда система* (1) *равномерно вполне управляема.* Предположим, что система (1) имеет вид (6) и для нее выполнены условия теоремы 6 работы [23]. Покажем, что в этом случае выполнены условия теоремы 3 и, следовательно, такая система является равномерно вполне управляемой (как это и должно иметь место согласно теореме 6 [23]). Построим матрицы $P_i(t)$, $i=0,\ldots,n$, и $Q(t)\in M_n$. Тогда матрица $Q(t)=\{q_{ij}(t)\}$, $i,j=\overline{1,n}$, является треугольной; элементы выше ее побочной диагонали равны нулю, а элементы ее побочной диагонали имеют вид $q_{n+1-j,j}(t)=\prod\limits_{\nu=n+1-j}^{n}b_\nu(t)(-1)^{j-1}$, $j=\overline{1,n}$. По условию $P_i(t)$, $i=0,\ldots,n$, ограничены, следовательно, $|q_{n+1-j,j}(t)|\leqslant K_j$ для всякого $j=\overline{1,n}$. Кроме того, $|\prod\limits_{j=1}^{n}q_{n+1-j,j}(t)|=|\det Q(t)|\geqslant\varkappa_1>0$. Значит, $|\prod\limits_{j=1}^{n}\bigl(q_{n+1-j,j}(t)\bigr)^{-1}|\leqslant\varkappa_1^{-1}$. Тогда для всякого $j=\overline{1,n}$ выполнено $\bigl|\bigl(q_{n+1-j,j}(t)\bigr)^{-1}\bigr|\leqslant\varkappa_1^{-1}\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}K_i=:M_j$. Имеем

$$\bigl|1/b_n(t)\bigr|=\bigl|1/q_{n1}(t)\bigr|\leqslant M_1,\quad\bigl|1/b_{n-1}(t)\bigr|=\bigl|q_{n1}(t)/q_{n-1,2}(t)\bigr|\leqslant K_1M_2,\quad\ldots,$$

$$\bigl|1/b_{n+1-j}(t)\bigr|=\bigl|q_{n+2-j,j-1}(t)/q_{n+1-j,j}(t)\bigr|\leqslant K_{j-1}M_j$$

для любого $j\in\{\overline{2,n}\}$. Таким образом, $|b_i(t)|$, $t\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$, отделены от нуля.

Далее, поскольку $P_{i+1}(t)=\dot{P}_i(t)-A(t)P_i(t)$, $i=\overline{0,n-1}$, и функции $P_{i+1}(t)$ и $A(t)P_i(t)$ ограничены для всех $i=\overline{0,n-1}$, отсюда следует, что $\dot{P}_i(t)$, $i=\overline{0,n-1}$, ограничены. Следовательно, $|\dot{q}_{n+1-j,j}(t)|\leqslant R_j$, $t\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,n}$. Тогда

$$\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{q_{n+1-j,j}(t)}\right)\right|=\left|-\frac{\dot{q}_{n+1-j,j}(t)}{q^2_{n+1-j,j}(t)}\right|\leqslant R_jM_j^2=:S_j.$$

Имеем $|\dot{b}_n(t)|=|\dot{q}_{n1}(t)|\leqslant R_1$ и т. д., для любого $j\in\{\overline{2,n}\}$

$$\left|\dot{b}_{n+1-j}(t)\right|=\left|-\frac{d}{dt}\left(\frac{q_{n+1-j,j}(t)}{q_{n+2-j,j-1}(t)}\right)\right|\leqslant R_jM_{j-1}+K_jS_{j-1}.$$

Таким образом, производные функций $b_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, ограничены на $\mathbb{R}$. Отсюда следует равномерная непрерывность функций $b_i(t)$ на $\mathbb{R}$. Значит, функции $b_i(t)$, $i=\overline{1,n-1}$, удовлетворяют условию Y_1. Следовательно, условия теоремы 3 выполнены.

Таким образом, для систем (1) вида (6) теорема 3 является распространением теоремы 6 [23] на системы с коэффициентами $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ из более широкого класса. □

Введем в рассмотрение квазидифференциальное уравнение в соответствии с работой [24]. Пусть задана нижняя треугольная матрица $\mathcal{P}(t)=\{p_{ik}(t)\}_{i,k=0}^n$ такая, что выполнены следующие условия на некотором интервале $\mathcal{J}\subset\mathbb{R}$.

У1. Функции $p_{00}(\cdot)$ и $p_{nn}(\cdot)$ измеримы, п. в. конечны и п. в. отличны от нуля на $\mathcal{J}$.

У2. Функции $\dfrac{1}{p_{ii}(\cdot)}$, $i=\overline{1,n-1}$, измеримы и локально суммируемы на $\mathcal{J}$.

У3. Функции $\dfrac{p_{ik}(\cdot)}{p_{ii}(\cdot)}$, $i=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,i-1}$, измеримы и локально суммируемы на $\mathcal{J}$.

Определим квазипроизводные ${}^{k}_{\mathcal{P}}x$ $(k=\overline{0,n})$ функции $x:\mathcal{J}\to\mathbb{R}$ равенствами

$${}^0x:={}^0_{\mathcal{P}}x:=p_{00}(t)x,\qquad {}^kx:={}^k_{\mathcal{P}}x:=p_{kk}(t)\frac{d}{dt}\left({}^{k-1}_{\mathcal{P}}x\right)+\sum_{\nu=0}^{k-1}p_{k\nu}(t)\left({}^{\nu}_{\mathcal{P}}x\right),\quad k=\overline{1,n}.$$

Квазидифференциальным уравнением (*КдУ*) *n-го порядка* называется уравнение

$${}^nx=f(t),\qquad t\in\mathcal{J}.\tag{37}$$

Решением уравнения (37) называется всякая функция $x(t)$, $t\in\mathcal{J}$, имеющая локально абсолютно непрерывные квазипроизводные ${}^kx$, $k=\overline{0,n-1}$, и п. в. на $\mathcal{J}$ удовлетворяющая уравнению (37).

Пусть заданы начальные условия

$$({}^kx)(\tau)=\gamma_k,\quad k=\overline{0,n-1},\quad \tau\in\mathcal{J},\quad \gamma_k\in\mathbb{R}.\tag{38}$$

Обозначим $\gamma=\operatorname{col}(\gamma_0,\ldots,\gamma_{n-1})$. Построим по матрице $\mathcal{P}(t)$ матрицу

$$A(t)=\begin{Vmatrix}-\dfrac{p_{10}(t)}{p_{11}(t)} & \dfrac{1}{p_{11}(t)} & 0 & \ldots & 0\\ -\dfrac{p_{20}(t)}{p_{22}(t)} & -\dfrac{p_{21}(t)}{p_{22}(t)} & \dfrac{1}{p_{22}(t)} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -\dfrac{p_{n-1,0}(t)}{p_{n-1,n-1}(t)} & \ldots & \ldots & \ldots & \dfrac{1}{p_{n-1,n-1}(t)}\\ -\dfrac{p_{n0}(t)}{p_{nn}(t)} & \ldots & \ldots & \ldots & -\dfrac{p_{n,n-1}(t)}{p_{nn}(t)}\end{Vmatrix}\tag{39}$$

и вектор $\widehat{f}(t) = \operatorname{col}\big(0,\ldots,0,f(t)/p_{nn}(t)\big)$. В работе [24] показано, что задача Коши (37), (38) эквивалентна задаче
$$\dot{z} = A(t)z + \widehat{f}(t) \tag{40}$$
с начальным условием $z(\tau)=\gamma$, где $z=(_{\mathcal{P}}x):=\operatorname{col}(^0_{\mathcal{P}}x,\ldots,{}^{n-1}_{\mathcal{P}}x)$, $A(t)$ — матрица (39), и если выполнены условия У1–У3 и функция $f(\cdot)/p_{nn}(\cdot)$ локально суммируема на $\mathcal{J}$, то задача (40), $z(\tau)=\gamma$ (а вместе с ней и задача (37), (38)) имеет единственное решение, компоненты ${}^kx$, $k=\overline{0,n-1}$, которого локально абсолютно непрерывны.

Рассмотрим систему управления, которая задается квазидифференциальным уравнением
$${}^nx = u, \qquad u\colon \mathcal{J}\to\mathbb{R}. \tag{41}$$
Это КдУ эквивалентно линейной управляемой системе
$$\dot{z} = A(t)z + B(t)\mathfrak{u}, \quad \mathfrak{u}\in\mathbb{R}, \tag{42}$$
где $A(t)$ имеет вид (39), $B(t)=\operatorname{col}\big(0,\ldots,0,1/p_{nn}(t)\big)$, $\mathfrak{u}=u$, $z=\operatorname{col}({}^0x,\ldots,{}^{n-1}x)$. Будем предполагать, что выполнено следующее условие.

У4. Функция $\dfrac{1}{p_{nn}(\cdot)}$ локально суммируема по Лебегу на $\mathcal{J}$.

Допустимые управления $\mathfrak{u}(\cdot)=u(\cdot)$ — это функции такие, что $Bu\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathcal{J})$.

Будем говорить, что КдУ (41) *вполне управляемо на отрезке* $\Delta\subset\mathcal{J}$, если соответствующая система (42) обладает этим свойством.

Достаточные условия полной управляемости КдУ (41) получены в [8]. Здесь установлены достаточные условия равномерной полной управляемости КдУ (41).

Пусть $\mathcal{J}=\mathbb{R}$. Будем говорить, что КдУ (41) *ϑ-равномерно вполне управляемо* (в смысле определения 1 или 2), если соответствующая система (42) обладает этим свойством.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* У1–У4 *на* $\mathbb{R}$ *и выполнены следующие условия.*

У5. *Функции* $\dfrac{p_{ik}(\cdot)}{p_{ii}(\cdot)}$, $i=\overline{1,n}$, $k=\overline{0,i-1}$, *и* $\dfrac{1}{p_{ii}(\cdot)}$, $i=\overline{1,n}$, *интегрально ограничены на* $\mathbb{R}$.

У6. *Функции* $\dfrac{1}{p_{ii}(\cdot)}$, $i=\overline{1,n-1}$, *удовлетворяют условию* Y_1.

У7. *Функции* $p_{ii}(\cdot)$, $i=\overline{1,n}$, *ограничены на* $\mathbb{R}$.

Тогда КдУ (41) *ϑ-равномерно вполне управляемо в смысле определения* 2 *для любого* $\vartheta>0$.

Если дополнительно функция $\dfrac{1}{p^2_{nn}(\cdot)}$ *интегрально ограничена на* $\mathbb{R}$, *то для любого* $\vartheta>0$ *КдУ* (41) *ϑ-равномерно вполне управляемо в смысле Калмана.*

Теорема 4 вытекает из теорем 1 и 2.

§ 3. Управление асимптотическими инвариантами линейной системы в форме Хессенберга

Рассмотрим систему (1) с измеримыми, интегрально ограниченными на $\mathbb{R}$ коэффициентами. Пусть управление в системе (1) имеет вид линейной обратной связи $u=Ux$, где $U=U(\cdot)$ — измеримая ограниченная функция. Замкнутая система имеет вид
$$\dot{x} = (A(t)+B(t)U)x. \tag{43}$$
В работах [13, 14, 25–28] был получен ряд фундаментальных результатов о глобальном управлении асимптотическими инвариантами системы (43) на основе свойства равномерной полной управляемости системы (1). Приведем некоторые из этих результатов.

Определение 6 (см. [25, 26], [14, с. 259]). Система (43) обладает свойством *глобальной ляпуновской приводимости*, если для любой измеримой, интегрально ограниченной матрицы $C(\cdot)$

найдется измеримое и ограниченное управление $U = U(t)$, $t \in \mathbb{R}$, обеспечивающее асимптотическую эквивалентность системы

$$\dot{z} = C(t)z, \quad t \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{44}$$

и системы (43) при $U = U(t)$, то есть существует преобразование Ляпунова (см. [2, с. 247], [29, с. 154]), связывающее эти системы.

Обозначим через $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ полный спектр показателей Ляпунова свободной системы $\dot{x} = A(t)x$. Теория характеристических показателей Ляпунова изложена в работах [2, 29]. Поскольку $A(\cdot)$ интегрально ограничена, числа $\lambda_i(A)$ конечны.

Определение 7 (см. [26, с. 111], [27], [14, с. 184]). Полный спектр показателей Ляпунова системы (43) называется *глобально управляемым*, если для любого набора чисел $\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$ существует измеримое ограниченное управление $U = U(t)$, $t \in \mathbb{R}$, такое, что $\lambda_j(A + BU) = \alpha_j$, $j = \overline{1, n}$.

Если система (43) обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости, то показатели Ляпунова системы (43) глобально управляемы [14, теорема 25.4].

Определение 8 (С. Н. Попова [28], [26, с. 234], [14, с. 326]). Система (43) называется *глобально скаляризуемой*, если для произвольной наперед заданной кусочно непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ скалярной функции $p(\cdot)$ существует измеримое, ограниченное управление $U = U(t)$, $t \in \mathbb{R}$, такое, что система (43) с этим управлением асимптотически эквивалентна системе (44) с матрицей $C(t) = p(t)I$.

Теорема 5 (С. Н. Попова). *Пусть $A(\cdot)$ кусочно непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$, $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$, и система* (1) *равномерно вполне управляема. Тогда:*
(A) *система* (43) *глобально скаляризуема* [28], [26, теорема 26.1], [14, теорема 30.1];
(B) *показатели Ляпунова системы* (43) *глобально управляемы* [27], [26, теорема 27.4], [14, теорема 31.4].

Далее, пусть система (1) ω-периодическая. Если $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ кусочно непрерывны и ограничены и система (1) вполне управляема, то она $n\omega$-равномерно вполне управляема. Это следует из [30, 31]. Легко доказывается, что этот результат сохраняется, если $A(\cdot)$ измеримая и интегрально ограниченная. Очевидно, что для периодической матрицы $A(\cdot)$ свойство интегральной ограниченности равносильно тому, что $A(\cdot)$ локально суммируема.

Теорема 6 (С. Н. Попова [13], [26, теорема 24.1], [14, теорема 28.1]). *Пусть $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ кусочно непрерывные, ограниченные и ω-периодические. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*
(1) *система* (1) *вполне управляема;*
(2) *система* (43) *обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости.*

Метод доказательства теорем 5, 6, применяемый в работах [13, 26–28], не позволяет ослабить условие ограниченности и кусочной равномерной непрерывности матрицы $B(\cdot)$. Однако условия на матрицу $A(\cdot)$ возможно несколько ослабить. Справедливо следующее предложение.

Предложение 2. *В теоремах* 5, 6 *условие кусочной непрерывности и ограниченности матрицы $A(\cdot)$ можно заменить на более слабое предположение: матрица $A(\cdot)$ измерима и удовлетворяет условию Z_1.*

МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 3

Для доказательства предложения 2 нужно разобрать доказательства теорем 5, 6 и выяснить, как в этих доказательствах используется свойство кусочной непрерывности и ограниченности матрицы $A(\cdot)$. Если это сделать, то можно обнаружить, что это свойство используется лишь для выполнения свойства (d) предложения 3 [6], а именно:

$$\forall\,\vartheta > 0\ \ \exists\,\gamma = \gamma(\vartheta) > 0\ \ \forall\,t, s \in \mathbb{R}\ \ \big(|t - s| \leqslant \vartheta \ \implies\ |X(t, s)| \leqslant \gamma\big),$$

а также следующего свойства.

Предложение 3 (С. Н. Попова [26, предложение 22.1], [14, предложение 26.1]). *Пусть $A(\cdot)$ кусочно непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$, $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon, \vartheta) > 0$, что для всякого $\tau \in \mathbb{R}$ и для всех $t, s \in [\tau, \tau + \vartheta]$, принадлежащих одному и тому же интервалу непрерывности I_i, $i \in \mathbb{I}$, функции $B(\cdot)$ и удовлетворяющих неравенству $|t - s| \leqslant \delta$, выполнено соотношение*

$$|X(\tau, t)B(t) - X(\tau, s)B(s)| \leqslant \varepsilon.$$

Свойство Z_1 влечет интегральную ограниченность (лемма 1) матрицы $A(\cdot)$ и, следовательно, свойство (d) [6, лемма 6]. Покажем, что в предложении 3 условие на матрицу $A(\cdot)$ можно ослабить до условия Z_1.

Предложение 4. *Пусть в предложении 3 для матрицы $A(\cdot)$ выполнено более слабое предположение: матрица $A(\cdot)$ измерима и удовлетворяет условию Z_1. Тогда заключение предложения 3 справедливо.*

Доказательство. Пусть $\tau \in \mathbb{R}$ и $\vartheta > 0$ произвольные. Поскольку $A(\cdot)$ удовлетворяет условию Z_1, по лемме 1 она интегрально ограничена, т. е. $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \|A\|_{L_1([t,t+1])} \leqslant a$ для некоторого $a > 0$. Тогда в силу [6, лемма 6] $|X(t, s)| \leqslant e^{(\vartheta+1)a}$ для любых $t, s \in \mathbb{R}$ таких, что $|t - s| \leqslant \vartheta$. Далее, пусть $\|B\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant b$ для некоторого $b > 0$. Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/(2be^{(\vartheta+1)a}) > 0$. Построим по $\varepsilon_1 > 0$ число $\delta_1 > 0$ согласно определению 3 такое, что если $0 < h < \delta_1$, то $\displaystyle\int_t^{t+h} |A(\zeta)|\, d\zeta < \varepsilon_1$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Пусть $t_1, t_2 \in [\tau, \tau + \vartheta]$ и $|t_1 - t_2| < \delta_1$. По формуле Коши имеем

$$|X(\tau, t_1) - X(\tau, t_2)| = \Big| \int_{t_1}^{t_2} X(\tau, \zeta)A(\zeta)\, d\zeta \Big| \leqslant e^{(\vartheta+1)a} \Big| \int_{t_1}^{t_2} |A(\zeta)|\, d\zeta \Big| \leqslant e^{(\vartheta+1)a} \cdot \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2b}.$$

Положим $\varepsilon_2 = \varepsilon/(2e^{(\vartheta+1)a}) > 0$. Построим по $\varepsilon_2 > 0$ число $\Delta = \Delta(\varepsilon_2) > 0$ согласно определению 5. Положим $\delta := \min\{\delta_1, \Delta\}$. Пусть $t, s \in [\tau, \tau + \vartheta] \cap I_i$ при некотором фиксированном $i \in \mathbb{I}$ и $|t - s| \leqslant \delta$. Тогда $|t - s| \leqslant \Delta$, поэтому $|B(t) - B(s)| \leqslant \varepsilon_2$. Тогда

$$|X(\tau, t)B(t) - X(\tau, s)B(s)| \leqslant$$
$$\leqslant |X(\tau, t)||B(t) - B(s)| + |X(\tau, t) - X(\tau, s)||B(s)| \leqslant e^{(\vartheta+1)a} \frac{\varepsilon}{2e^{(\vartheta+1)a}} + \frac{\varepsilon}{2b} b = \varepsilon.$$

Предложение доказано. □

Таким образом, из предложения 4 вытекает предложение 2.

Замечание 4. Из предложения 4 следует, что условие на матрицу $A(\cdot)$ можно ослабить до условия Z_1 в следующих утверждениях о равномерной полной управляемости, глобальной достижимости и об управлении ляпуновскими инвариантами в § 26–31 [14]: в теоремах 26.1, 26.2, 26.3, 27.3, 27.4, 28.1, 29.1, 30.1, 30.2, 30.3, 31.1, 31.2, 31.3, 31.4; в следствиях 27.1, 27.2, 27.3, 28.1, 29.3, 30.1, 30.2, 30.3; в леммах 30.1, 31.1.

Выведем следствия из результатов § 2 и приведенных здесь теорем.

Теорема 7. *Пусть система* (1) *имеет форму Хессенберга* (6) *и ее коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:*
(*a*) $A(\cdot)$ *измеримая и удовлетворяет условию* Z_1*;*
(*b*) $b_i(\cdot)$, $i=\overline{1,n-1}$, *удовлетворяют условию* Y_1*;*
(*c*) $b_n(\cdot)$ *кусочно равномерно непрерывна и ограничена на* $\mathbb{R}$*;*
(*d*) $|b_i(t)|\geqslant \varkappa>0$, $t\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$.

Тогда:
(1) *система* (43) *глобально скаляризуема;*
(2) *показатели Ляпунова системы* (43) *глобально управляемы.*

Доказательство. Из условия (*a*) следует, что $A(\cdot)$ интегрально ограничена (по лемме 1). Из условия (*c*) следует, что $b_n(\cdot)$ интегрально ограничена, в том числе с квадратом нормы. Таким образом, выполнено условие (*A*) теоремы 1. Условия (*b*) и (*d*) совпадают соответственно с условиями (*B*) и (*C*) теоремы 1. Таким образом, из теорем 1 и 2 следует, что система (1) является ϑ-равномерно вполне управляемой в смысле определений 2 и 1 для любого $\vartheta>0$. Применяя теорему 5 и предложение 2, получаем требуемый результат. □

Лемма 4. *Пусть* $A\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},M_n)$ *и* $A(t)=A(t+\omega)$, $t\in\mathbb{R}$, $\omega>0$. *Тогда* $A(\cdot)$ *удовлетворяет условию* Z_1.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(t)=\int_0^t|A(\zeta)|\,d\zeta$. Функция $g(\cdot)$ абсолютно непрерывна на $[0,2\omega]$, значит, непрерывна, следовательно, равномерно непрерывна на $[0,2\omega]$; поэтому для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta\in(0,\omega)$ такое, что если $0<h<\delta$, то $|g(t+h)-g(t)|<\varepsilon$, т. е. $\int_t^{t+h}|A(\zeta)|\,d\zeta<\varepsilon$, если $t,t+h\in[0,2\omega]$. Для любых $s,s+h\in\mathbb{R}$, где $h\in(0,\delta)$, найдутся $t_s\in[0,2\omega]$ и $n_s\in\mathbb{Z}$ такие, что $s=t_s+n_s\omega$ и $t_s+h\in[0,2\omega]$. Тогда

$$\int_s^{s+h}|A(\zeta)|\,d\zeta=\int_{t_s}^{t_s+h}|A(\eta+n_s\omega)|\,d\eta=\int_{t_s}^{t_s+h}|A(\eta)|\,d\eta<\varepsilon.$$

Следовательно, $g(\cdot)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. Значит, выполнено свойство Z_1. □

Теорема 8. *Пусть система* (1) *имеет форму Хессенберга* (6) *и ее коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:*
(*a*) $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ — ω*-периодические функции* ($\omega>0$)*;*
(*b*) $A(\cdot)$ — *измеримая, локально суммируемая;*
(*c*) $b_n(\cdot)$ *кусочно непрерывна и ограничена на* $\mathbb{R}$*;*
(*d*) *существует промежуток* $\Delta:=(t_0,t_1)$ *такой, что* $b_i(t)\neq0$, $i=\overline{1,n}$, *для п. в.* $t\in\Delta$.

Тогда система (43) *обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости.*

Доказательство. Из условий (*a*), (*b*) по лемме 4 следует, что $A(\cdot)$ удовлетворяет условию Z_1. Из условий (*b*), (*c*), (*d*) в силу [8, теорема 3] следует, что система (1) вполне управляема на любом отрезке $\Delta_0=[\tau_0,\tau_1]\subset\Delta$ длины меньше ω. В силу [8, теорема 1] строки матрицы $X(\tau_0,t)B(t)$ линейно независимы на $[\tau_0,\tau_1]$, следовательно, на $[\tau_0,\tau_0+n\omega]$. Отсюда, в силу периодичности системы (1), из [30, 31] следует, что система (1) вполне управляема на любом отрезке длины $n\omega$. Применяя теорему 6 и предложение 2, получаем требуемое утверждение. □

МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
2. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
3. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1960. Vol. 5. № 1. P. 102–119.
4. Тонков Е.Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.
5. Тонков Е.Л. К теории линейных управляемых систем: дис. … д-ра физ.-матем. наук / Институт математики и механики. Уральский научный центр АН СССР. Свердловск, 1983. 267 с.
6. Зайцев В.А. Критерии равномерной полной управляемости линейной системы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 2. С. 157–179.
7. Зайцев В.А. Равномерная полная управляемость и ляпуновская приводимость двумерного квазидифференциального уравнения // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2007. № 1. С. 55–66.
8. Зайцев В.А. Управляемость квазидифференциального уравнения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 1. С. 90–100.
9. Тонков Е.Л. Равномерная достижимость и ляпуновская приводимость билинейной управляемой системы // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6. № 1. С. 209–238.
10. Астровский А.И., Гайшун И.В. Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений. Минск: Беларуская навука, 2013. 213 с.
11. Астровский А.И., Гайшун И.В. Управляемость линейных нестационарных систем со скалярным входом и квазидифференцируемыми коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 8. С. 1047–1055.
12. Астровский А.И., Гайшун И.В. Существование и способ построения канонических форм линейных нестационарных систем управления со скалярным входом // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 12. С. 1622–1628.
13. Попова С.Н. Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 12. С. 1627–1636.
14. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларус. навука, 2012. 407 с.
15. Иванов А.Г., Тонков Е.Л. О равномерной локальной управляемости линейной системы // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 12. С. 1499–1507.
16. Иванов А.Г. Линейные управляемые системы в пространстве Степанова // Препринт / Физико-технический институт. Уральский научный центр АН СССР. Свердловск, 1985. 32 с.
17. Кадец В.М. Курс функционального анализа. Харьков: Харьковский национальный университет, 2006. 607 с.
18. Riesz M. Sur les ensembles compacts de fonctions sommables // Acta Litt. Sci. Szeged. 1933. Vol. 6. № 2–3. P. 136–142.
19. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
20. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. М.: Наука, 1975. 302 с.
21. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.
22. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
23. Silverman L.M., Anderson B.D.O. Controllability, observability and stability of linear systems // SIAM Journal on Control. 1968. Vol. 6. № 1. P. 121–130.
24. Дерр В.Я. Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // Известия Института математики и информатики УдГУ. 1999. Вып. 1 (16). С. 3–105.
25. Макаров Е.К., Попова С.Н. О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 97–106.
26. Попова С.Н. Управление асимптотическими инвариантами линейных систем: дис. … д-ра физ.-матем. наук / УдГУ. Ижевск, 2004. 264 с.
27. Попова С.Н. О глобальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 8. С. 1048–1054.
28. Попова С.Н. Глобальная приводимость линейных управляемых систем к системам скалярного типа // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 1. С. 41–46.
29. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

30. Brunovsky P. Controllability and linear closed-loop controls in linear periodic systems // Journal of Differential Equations. 1969. Vol. 6. № 3. P. 296–313.
31. Тонков Е.Л. Замечание об управляемости линейной периодической системы // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14. № 9. С. 1715–1717.

Поступила в редакцию 15.05.2015

Зайцев Василий Александрович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: verba@udm.ru

V. A. Zaitsev

Uniform complete controllability and global control over asymptotic invariants of linear systems in the Hessenberg form

Keywords: linear control system, uniform complete controllability, system in the Hessenberg form, global control over asymptotic invariants.

MSC: 93B05, 93C05

We prove that a linear control system

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

with matrix coefficients of the Hessenberg form is uniformly completely controllable in the sense of Kalman under rather weak conditions imposed on coefficients. It is shown that some obtained sufficient conditions are essential. Corollaries are derived for quasi-differential equations. We construct feedback control $u = Ux$ for the system (1) and study the problem of global control over asymptotic invariants of the closed-loop system

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

The conditions on coefficients are weakened in the known results of S. N. Popova. For the system (2) with matrix coefficients of the Hessenberg form, the obtained results and the results of S. N. Popova are used to receive sufficient conditions for global reducibility to systems of scalar type and for global control over Lyapunov exponents and moreover, for global Lyapunov reducibility in the case of periodic $A(\cdot)$ and $B(\cdot)$.

REFERENCES

1. Filippov A.F. *Differential equations with discontinuous righthand sides*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988.
2. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoichivosti* (Theory of Lyapunov exponents and its application to problems of stability), Moscow: Nauka, 1966, 576 p.
3. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control, *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, 1960, vol. 5, no. 1, pp. 102–119.
4. Tonkov E.L. A criterion for uniform controllability and stabilization of a linear recurrent system, *Differ. Uravn.*, 1979, vol. 15, no. 10, pp. 1804–1813 (in Russian).
5. Tonkov E.L. On the theory of linear control systems, *Dr. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation*, Sverdlovsk, 1983, 267 p. (In Russian).
6. Zaitsev V.A. Criteria for uniform complete controllability of a linear system, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, no. 2, pp. 157–179 (in Russian).
7. Zaitsev V.A. Uniform complete controllability and Lyapunov reducibility of a two-dimensional quasi-differential equation, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat.*, 2007, no. 1, pp. 55–66 (in Russian).
8. Zaitsev V.A. Quasidifferential equation controllability, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 1, pp. 90–100 (in Russian).
9. Tonkov E.L. Uniform attainability and Lyapunov reducibility of bilinear control system, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2000, Suppl. 1, pp. S228–S253.

10. Astrovskii A.I., Gaishun I.V. *Lineinye sistemy s kvazidifferentsiruemymi koeffitsientami: upravlyaemost' i nablyudaemost' dvizhenii* (Linear systems with quasidifferentiable coefficients: controllability and observability of motions), Minsk: Belarus. Navuka, 2013, 213 p.
11. Astrovskii A.I., Gaishun I.V. Controllability of linear nonstationary systems with scalar input and quasidifferentiable coefficients, *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 8, pp. 1018–1026.
12. Astrovskii A.I., Gaishun I.V. Existence and a method for constructing canonical forms of linear time-varying control systems with scalar input, *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 12, pp. 1625–1631.
13. Popova S.N. Global controllability of the complete set of Lyapunov invariants of periodic systems, *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 12, pp. 1713–1723.
14. Makarov E.K., Popova S.N. *Upravlyaemost' asimptoticheskikh invariantov nestatsionarnykh lineinykh sistem* (Controllability of asymptotic invariants of non-stationary linear systems), Minsk: Belarus. Navuka, 2012, 407 p.
15. Ivanov A.G., Tonkov E.L. Uniform local controllability of a linear system, *Differential Equations*, 1992, vol. 28, no. 9, pp. 1222–1229.
16. Ivanov A.G. Linear control systems in the space of Stepanov, *Preprint*, Ural Science Center, Academy of Science of USSR, Sverdlovsk, 1985, 32 p. (In Russian).
17. Kadets V.M. *Kurs funktsional'nogo analiza* (Course of functional analysis), Kharkiv: Kharkiv National University, 2006, 607 p.
18. Riesz M. Sur les ensembles compacts de fonctions sommables, *Acta Litt. Sci. Szeged*, 1933, vol. 6, no. 2–3, pp. 136–142.
19. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyi analiz* (Functional analysis), Moscow: Nauka, 1977, 744 p.
20. Krasnov M.L. *Integral'nye uravneniya. Vvedenie v teoriyu* (Integral equations. Introduction to the theory), Moscow: Nauka, 1975, 302 p.
21. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii u funktsional'nogo analiza* (Elements of functions theory and functional analysis), Moscow: Nauka, 1968. 496 p.
22. Natanson I.P. *Teoriya funktsii veshchestvennoi peremennoi* (Theory of functions of real variable), Moscow: Nauka, 1974, 480 p.
23. Silverman L.M., Anderson B.D.O. Controllability, observability and stability of linear systems, *SIAM Journal on Control*, 1968, vol. 6, no. 1, pp. 121–130.
24. Derr V.Ya. Nonoscillation of solutions to a linear quasidifferential equation, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 1999, no. 1 (16), pp. 3–105 (in Russian).
25. Makarov E.K., Popova S.N. The global controllability of a complete set of Lyapunov invariants for two-dimensional linear systems, *Differential Equations*, 1999, vol. 35, no. 1, pp. 97–107.
26. Popova S.N. Control over asymptotic invariants of linear systems, *Dr. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation*, Izhevsk, 1992, 264 p. (In Russian).
27. Popova S.N. On the global controllability of Lyapunov exponents of linear systems, *Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 8, pp. 1072–1078.
28. Popova S.N. Global reducibility of linear control systems to systems of scalar type, *Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 1, pp. 43–49.
29. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* (Lectures on the mathematical stability theory), Moscow: Nauka, 1967, 472 p.
30. Brunovsky P. Controllability and linear closed-loop controls in linear periodic systems, *Journal of Differential Equations*, 1969, vol. 6, no. 3, pp. 296–313.
31. Tonkov E.L. Remark on controllability of linear periodic system, *Differ. Uravn.*, 1978, vol. 14, no. 9, pp. 1715–1717 (in Russian).

Received 15.05.2015

Zaitsev Vasilii Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: verba@udm.ru