

УДК 519.6, 532.5

© Т. А. Дьяконова, С. С. Храпов, А. В. Хоперсков

ПРОБЛЕМА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ¹

Обсуждается проблема выбора граничных условий в случае численного интегрирования уравнений мелкой воды на существенно неоднородном рельефе местности. При моделировании нестационарных течений поверхностных вод имеется динамическая граница, разделяющая жидкость и сухое дно. Для задач сезонных пойменных затоплений, ливневых паводков, выходов волн цунами на берег ситуация осложняется возникновением до- и сверхкритических режимов течений. Анализ использования различных способов задания условий для физических величин при достижении жидкости границы расчетной области показывает преимущества при использовании условий типа «водопад» при наличии сильных неоднородностей рельефа земной поверхности. При наличии водопада на границе расчетной области и неоднородности рельефа в окрестности границы может возникать участок, на котором формируется область критического течения с образованием гидравлического скачка, что существенно ослабляет влияние водопада на структуру потока вверх по течению.

Ключевые слова: модель мелкой воды, численные схемы, граничные условия, неоднородное дно.

DOI: [10.20537/vm160309](https://doi.org/10.20537/vm160309)**Введение**

Решение широкого круга задач динамики поверхностных вод для самых различных приложений основывается на модели мелкой воды (уравнениях Сен-Венана) [1] и ее модификациях [2–7], включая многослойные модели [8], либо с учетом вертикальной структуры на примитивных уравнениях [9], с учетом дисперсионных эффектов в различных приближениях [1, 10, 11]. Укажем на направления, связанные с моделированием русловых объектов — водохранилищ [12] и речных систем [13–16], крупных озер, дождевых потоков [17], динамики плотных мелкозернистых геофизических потоков [18], волн цунами [19].

При наличии твердых границ мы имеем возможность корректного описания жидкости, как для эйлеровых численных схем, так и в случае лагранжева подхода, применяя, например, метод модифицированных виртуальных граничных частиц [20]. В случае озер или морей, если водный объект полностью находится в пределах расчетной сетки, проблема граничных условий по сути отсутствует, если применять алгоритмы «движения по сухому дну» [21]. В случае протяженных систем (водохранилищ и рек) практически всегда имеются границы, через которые вода поступает в расчетную область и уходит из нее, что требует аккуратной постановки граничных условий [22, 23]. Наиболее сложным оказывается режим, при котором граница «жидкость–сухое дно» достигает границы расчетной области. Такая ситуация имеется при численном исследовании динамики поверхностных стоков воды, возникающих при затоплении территории, движений мелкодисперсных потоков вещества [18], особенно на сложном горном рельефе [24], например в случае прорыва моренно-подпрудных приледниковых и ледниковых озерных систем [25], из-за дождевых осадков [26]. Сходная проблема возникает при использовании уравнений мелкой воды для моделирования динамики атмосферы [27]. При прохождении вещества через границу помимо численной устойчивости расчета важным является выполнение законов сохранения и построение неотражающих условий [28].

Хорошо известна проблема описания нестационарной линии уреза воды, связанная с необходимостью находить решение в области с подвижной границей (например, [4, 6] для различных

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области (гранты 16-07-01037, 15-02-06204, 15-45-02655-р_поволжье_а).

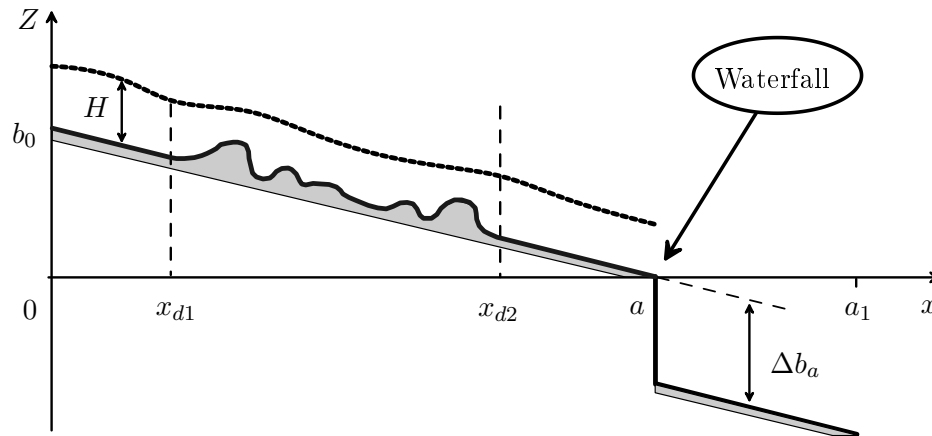


Рис. 1. Геометрия задачи: поток жидкости стекает по наклонной неоднородной поверхности. В точке $x = a$ дно терпит скачок Δb_a , создавая условия для водопада

моделей мелкой воды [29]). В численных подходах при ее решении используются различные методы [30, 31]. В случае достаточно гладкой функции дна $b(x, y)$ можно успешно использовать регуляризацию [32]. Использование модифицированного закона сохранения полного импульса с учетом образования локальных турбулентно-вихревых структур в поверхностном слое воды позволяет получить удовлетворительное согласие с экспериментальными данными [33]. Полученные результаты аналитического исследования решений использованы для разработки новых аппроксимаций краевых условий на подвижной линии уреза. Однако, учитывая нерегулярный характер изменений реального дна $b(x, y)$ на различных масштабах, включая $L/H \sim 1$ ($1/L = |\nabla b|/b$, H — глубина жидкости), возникает необходимость строить более сложные алгоритмы, специально предназначенные для моделирования динамической границы «жидкость–сухое дно» [34].

Выделим ситуации, требующие аккуратной постановки граничных условий: 1) жидкость свободно проходит через границу в докритическом режиме; 2) вблизи свободной границы имеются участки сильно неоднородного рельефа; 3) возникает поток жидкости внутрь расчетной области; 4) происходят существенно нестационарные процессы вблизи границы.

Целью данной работы является исследование влияния различных граничных условий в численной модели мелкой воды на структуру руслового потока.

§ 1. Основные уравнения и геометрия задачи

Рассмотрим одномерную модель на основе системы уравнений мелкой воды с учетом силы придонного трения [29, 36, 37]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(qu)}{\partial x} = -gH \frac{\partial \eta}{\partial x} - H \frac{\lambda}{2} u|u|, \quad (1.2)$$

где H — толщина слоя жидкости, $q = Hu$ — расход жидкости, $u = q/H$ — скорость потока, $g = 9.81 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения, $\eta = H + b$ — уровень свободной поверхности воды, $b(x)$ — функция дна, $\lambda = 2gn_M^2/H^{4/3}$ — величина гидравлического сопротивления, зависящая от коэффициента трения по Маннингу n_M . В качестве базового значения примем $n_M = 0.02 \text{ с/м}^{1/3}$, характерное для русла Волги в межень [35–37]. Мы ограничимся рассмотрением 1D-модели при постоянных значениях площади поперечного сечения A и смоченного периметра P . Учет зависимостей $A(x)$, $P(x)$ требует обобщенной формы записи для λ [23].

На рисунке 1 изображена геометрия базовой модели. Функцию рельефа дна представим

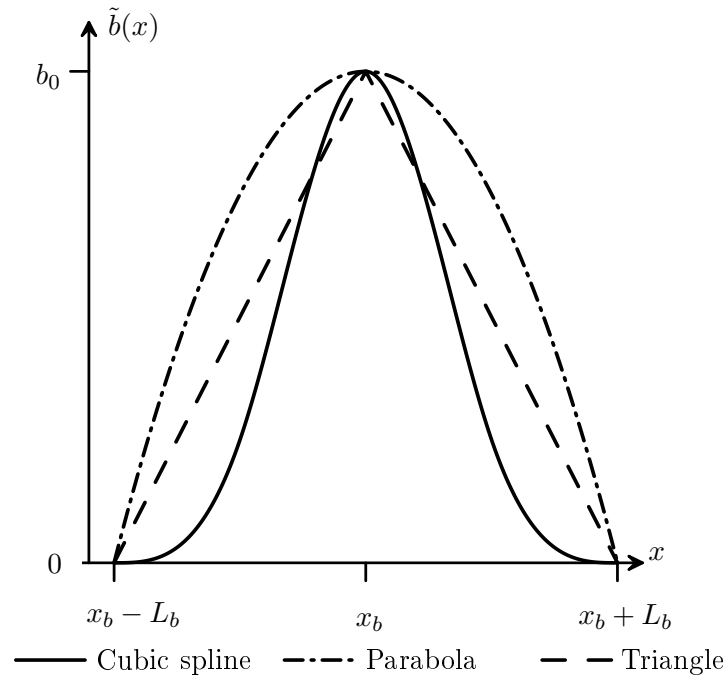


Рис. 2. Профили локальных симметричных неоднородностей дна

в виде

$$b(x) = -\tan(\alpha)x + \tilde{b}(x), \tag{1.3}$$

где $\alpha \simeq \tan(\alpha) = (b(0) - b(a))/a$ — средний угол наклона рельефа дна, приводящий к возникновению руслового течения в заданном направлении. Для гидрологических приложений, связанных с равнинными речными системами и поверхностными стоками, в качестве типичных значений выберем $a = 50$ км и $\tan(\alpha) = 0.1$ м/км. Вблизи границ в зонах $0 \leq x \leq x_{d1}$ и $x_{d2} \leq x \leq a$ считаем дно плоским с углом наклона α , а между точками x_{d1} и x_{d2} разместим различные локальные неоднородности дна $\tilde{b}(x)$, задавая их в виде аналитических функций: кубического сплайна

$$\tilde{b}(x) = b_0 \begin{cases} 1 - 6\bar{x}^2(1 - \bar{x}), & 0 \leq \bar{x} \leq 0.5; \\ 2(1 - \bar{x})^3, & 0.5 \leq \bar{x} \leq 1; \\ 0, & 1 \leq \bar{x}; \end{cases} \tag{1.4}$$

параболического и треугольного профилей

$$\tilde{b}(x) = b_0 \begin{cases} 1 - \bar{x}^k, & 0 \leq \bar{x} \leq 1; \\ 0, & 1 \leq \bar{x}; \end{cases} \tag{1.5}$$

где $\bar{x} = |x - x_b|/L_b$, x_b — положение центра профиля локальной неоднородности дна, L_b — полуширина профиля; при $k = 2$ в (1.5) имеем параболический профиль, а $k = 1$ соответствует треугольному профилю (рис. 2). Набором локальных неоднородностей вида (1.4), (1.5) с различными значениями параметров x_b , b_0 и L_b можно моделировать достаточно сложный неоднородный рельеф дна.

§ 2. Численный метод и граничные условия

Для интегрирования уравнений (1.1) и (1.2) воспользуемся лагранжево-эйлеровой численной схемой CSPH-TVD [34,37,38]. Данная численная схема является хорошо сбалансированной, консервативной, позволяет сквозным образом рассчитывать динамику воды на неоднородном

рельефе дна, содержащем изломы и скачки, а также моделировать гидродинамические течения на реалистичном нерегулярном рельефе при наличии в расчетной области нестационарных границ «жидкость–сухое дно» и водопадов.

Численное решение будем строить на пространственно-временной сетке $x_i = (i - 0.5)h$ ($i = \overline{-1, N+2}$) и $t_{n+1} = t_n + \tau_n$ ($n = \overline{0, t_{\max}}$), где $h = a/N$ — пространственный шаг, N — количество ячеек в расчетной области, τ_n — временной шаг интегрирования, определяемый из условия устойчивости CSPH-TVD-схемы [34, 37]. Величины H , q , u , входящие в уравнения (1.1) и (1.2), при численном интегрировании определяются в узлах пространственно-временной сетки H_i^n , q_i^n , u_i^n . Поскольку CSPH-TVD-метод основан на пятиточечной пространственной аппроксимации, то ячейки с индексами $i = -1, 0, N+1, N+2$ относятся к «фиктивным» ячейкам и для определения значений величин H , q , u в этих ячейках необходимо задать дополнительные условия на границах расчетной области. Из трех величин H , q , u только две являются независимыми.

На левой границе $x = 0$ наклонной поверхности $b(x)$ будем задавать контролируемый вток воды с расходом $q(x = 0, t) = Q(t)$:

$$q_{0-j}^n = Q(t_n), \quad H_{0-j}^n = 2H_{1-j}^n - H_{2-j}^n, \quad j = 0, 1. \quad (2.1)$$

Через правую границу расчетной сетки $x = a$ следует корректно задавать процесс прохождения потока воды, чтобы условия на границе в наименьшей степени влияли на решение в основной части расчетной области. Рассмотрим различные граничные условия и исследуем, как они влияют на характер течения $u(x, t)$, $H(x, t)$.

Свободные граничные условия

Значения параметров потока в фиктивных ячейках могут быть определены посредством кусочно-постоянной аппроксимации

$$H_{N+1+j}^n = H_{N+j}^n, \quad u_{N+1+j}^n = u_{N+j}^n, \quad j = 0, 1, \quad (2.2)$$

или кусочно-линейной аппроксимации

$$H_{N+1+j}^n = 2H_{N+j}^n - H_{N-1+j}^n, \quad u_{N+1+j}^n = 2u_{N+j}^n - u_{N-1+j}^n, \quad j = 0, 1. \quad (2.3)$$

В соотношениях (2.2) и (2.3) вместо H или u можно также использовать аппроксимацию величины расхода $q = Hu$.

Граничные условия (2.2) и (2.3) можно использовать только при сверхкритическом режиме течения с числом Фруда $Fr = u/\sqrt{gH} > 1$. При докритическом режиме течения $Fr < 1$ данные условия могут оказывать сильное влияние на структуру нестационарного потока из-за интенсивного отражения волн от границы расчетной области, а в случае наличия на границе локальных неоднородностей (отклонения от плоского наклонного профиля) становятся численно неустойчивыми.

Для обеспечения устойчивости граничных условий и уменьшения влияния границ на динамику потока в случае $Fr < 1$ применяют инварианты Римана [22, 23, 30, 39–41]. При таком подходе одна из величин H или u задается, а другая определяется из условия постоянства инвариантов Римана $u \pm 2\sqrt{gH}$ слева и справа от границы. Пусть, например, значение H в фиктивных ячейках задано, тогда для u имеем

$$u_{N+1+j}^n = u_{N+j}^n \pm 2\sqrt{g} \left(\sqrt{H_{N+j}^n} - \sqrt{H_{N+1+j}^n} \right), \quad j = 0, 1. \quad (2.4)$$

Аналогично, если задано u , то для H выполняется

$$H_{N+1+j}^n = \left(\sqrt{H_{N+j}^n} \pm \frac{u_{N+j}^n - u_{N+1+j}^n}{2\sqrt{g}} \right)^2, \quad j = 0, 1. \quad (2.5)$$

Знак «+» в соотношениях (2.4) и (2.5) соответствует вытекающему потоку, а знак «-» — втекающему.

Основная проблема использования граничных условий (2.4) и (2.5) связана с заданием одной из величин H или u на основе дополнительных соотношений, зависящих от конкретной постановки задачи, структуры течения и рельефа местности. Рассмотрим некоторые варианты определения величины H в фиктивных ячейках для условия (2.4):

$$H_{N+1+j}^n = H_{N+j}^n + b_{N+j} - b_{N+1+j} - \tan(\alpha_\eta)h, \quad j = 0, 1, \quad (2.6)$$

где α_η — свободный параметр, характеризующий угол наклона уровня воды η на правой границе расчетной области. Значение α_η зависит от профиля рельефа дна в окрестности границы и выбирается таким образом, чтобы обеспечить устойчивость граничных условий и минимизировать влияние границы на численное решение. Так, например, для плоского дна $b_{N+j} - b_{N+1+j} = \tan(\alpha)h$ (см. рис. 1) можно принять $\alpha_\eta = \alpha$. В этом случае условие (2.5) будет соответствовать условию для H в соотношении (2.2). При наличии на границе локальных неоднородностей дна $\tilde{b}(x)$ для руслового течения необходимо выбирать $\alpha_\eta \geq \alpha$.

Другим подходом, способным обеспечить устойчивость граничных условий (2.4)–(2.6), является модификация рельефа дна в окрестности границы

$$b_{N+1+j} = b_{N+j} - \tan(\tilde{\alpha})h, \quad j = 0, 1,$$

где $\tilde{\alpha}$ — свободный параметр, характеризующий угол наклона дна на правой границе расчетной области. Такой подход требует сильных изменений рельефа для двумерных течений вблизи границ.

Граничные условия (2.3) будем называть условиями типа I, а с применением инвариантов Римана — условиями типа II.

Граничные условия типа «поглощение»

Наиболее простым граничным условием, обеспечивающим устойчивый расчет и исключаяющим проникновение жидкости в расчетную область через правую границу, является условие типа «поглощение»:

$$H_{N+j}^n = 0, \quad u_{N+j}^n = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.7)$$

Граничные условия типа «поглощение» (2.7) соответствуют наличию водопада в точке $x = a$ (см. рис. 1). Если выполняется условие $H_{N+j}^n < \Delta b_a$, то течение в области $x > a$ не оказывает влияния на решение до водопада.

Ниже рассмотрим вопрос о применимости и влиянии на динамику течения граничных условий типа «поглощение» (тип III). В предельном случае $\alpha_\eta \rightarrow \pi/2$ получаем переход к условию (2.7) с учетом $H \geq 0$.

§ 3. Влияние граничных условий на стационарный поток

Точное решение

При стационарном течении $\partial H/\partial t \equiv \partial q/\partial t \equiv 0$ уравнения (1.1) и (1.2) принимают вид

$$\frac{dq}{dx} = 0 \quad \text{или} \quad q = \text{const}, \quad (3.1)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u^2}{2} + g\eta \right) = -\frac{\lambda}{2} u|u|. \quad (3.2)$$

Заметим, что величина $u^2/2 + g\eta$ в (3.2) является постоянной интеграла Бернулли и под действием сил придонного трения изменяется вдоль линий тока из-за диссипации энергии потока.

С учетом (1.3), (3.1) и выражения для коэффициента гидравлического сопротивления λ уравнение (3.2) может быть представлено в виде

$$\frac{dH}{dx} = \frac{-\frac{d\tilde{b}}{dx} + \tan(\alpha) \left[1 - (H_*/H)^{10/3} \right]}{1 - Fr^2}, \quad (3.3)$$

где $H_* = \left(\frac{q^2 n_M^2}{\tan(\alpha)} \right)^{3/10}$, Fr — число Фруда ($Fr = u/\sqrt{gH}$). При стационарном течении на плоском наклонном дне с $\alpha = \text{const}$ и $n_M = \text{const}$ решением уравнения (3.3) является $H(x) = H_* = \text{const}$. И в этом случае для числа Фруда имеем $Fr_* = \frac{q}{\sqrt{gH_*^3}} = \frac{q^{1/10} \tan^{9/20}(\alpha)}{g^{1/2} n_M^{9/10}}$.

Подчеркнем, что уравнение (3.3) можно использовать для построения стационарных решений только для гладких функций \tilde{b} и в отсутствии критических точек $Fr = 1$.

Ниже ограничимся рассмотрением решений (3.3) $Fr > 1$, либо $Fr < 1$.

Решение уравнения (3.3) для стационарного потока будем называть точными, а соответствующее решение системы уравнений (1.1), (1.2) на основе CSPH-TVD метода для установившегося течения (в пределе $t \rightarrow \infty$) — численным. Для получения установившегося течения при численном моделировании достаточно задать на левой границе постоянный приток жидкости $Q = \text{const}$ в (2.1). В качестве базовых параметров в численной модели примем $Q = 20 \text{ м}^2/\text{с}$, $N = 8000$. Начальные условия для системы уравнений (1.1), (1.2) будем задавать в виде пространственно-однородных распределений $H(x, t = 0) = H_*$, $q(x, t = 0) = Q$. Течения будем называть установившимися (стационарными) на временах $t \geq t_s$ при выполнении $\max_i |H_i^{n+1}/H_i^n - 1| < 10^{-10}$, что достигается в численной модели при $t_s \gtrsim 100$ ч для выбранных значений Q и a .

На рисунке 3 изображены точные и численные решения для стационарного потока воды на неоднородном дне при различных режимах течения. Относительное отклонение численного решения от точного на интервале (0; 2000) в случае докритического течения (см. рис. 3, а) не превышает 0.1% для граничных условий типа I, а для граничных условий типа III погрешность существенно возрастает до 10% ÷ 30%. В случае сверхкритического течения (см. рис. 3, б) относительная погрешность в рассматриваемой области не превышает 0.01% для обоих типов граничных условий. С увеличением N погрешность уменьшается пропорционально $1/N^2$, что свидетельствует о квадратичной сходимости численного метода [34]. Отметим, что численные решения для установившихся течений на плоском дне со свободными граничными условиями (2.2), (2.3), (2.4) и (2.6) тождественно совпадают с точными в пределах точности моделирования 10^{-15} (для 8 байтовых чисел).

§ 4. Плоское дно

Рассмотрим течение с постоянным уклоном дна во всей расчетной области $\alpha = -db/dx = \text{const} > 0$. Сравним решения при использовании различных граничных условий. Граничные условия при использовании инвариантов Римана (2.4) и линейной аппроксимации (2.3) совпадают для всей расчетной области (рис. 4, а).

Для гладкого дна влияние граничного условия типа поглощения (2.7) простирается на десятки километров выше по течению (см. рис. 4, а). При удалении от правой границы разность $\eta^{(I)} - \eta^{(III)}$ уменьшается достаточно медленно, и даже на расстоянии 20 км различие составляет около 1 метра ($\simeq 10\%$).

Варьирование угла уклона α в пределах от 0.04 м/км (случай реки Обь) до 4 м/км (случай реки Терек) и коэффициента шероховатости в пределах $n_M = 0 \div 0.1$ сохраняет данный результат.

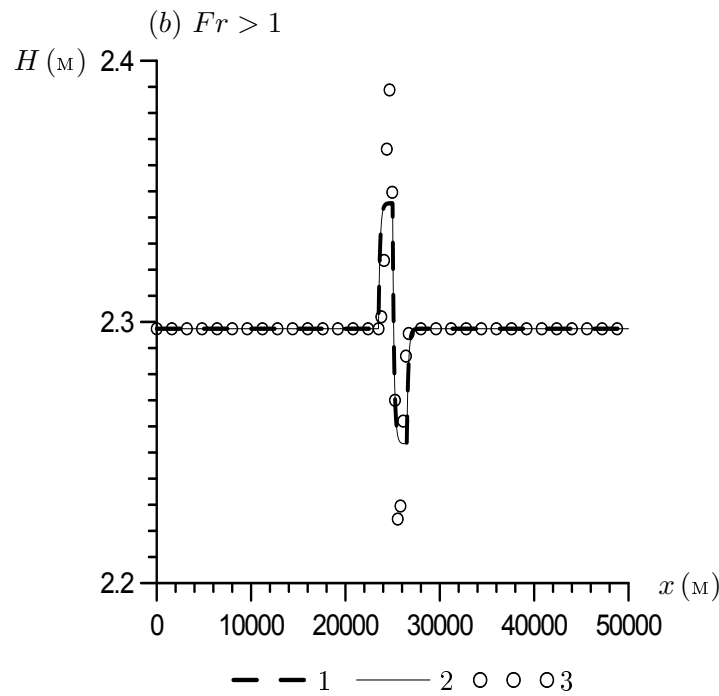
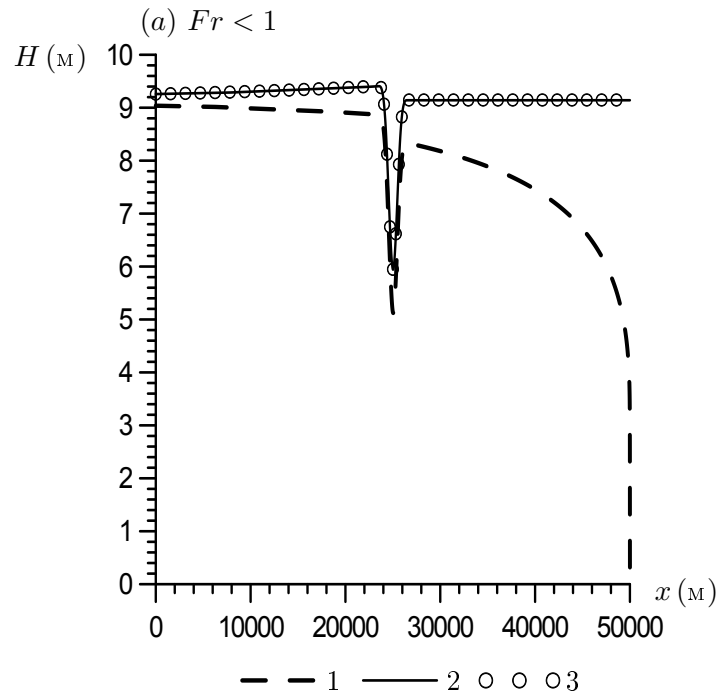


Рис. 3. Распределения глубины $H(x)$ для трех моделей в случае локальной неоднородности дна (см. рис. 2) с параметрами $x_b = 2500$ м, $L_b = 1500$ м, $b_0 = 7$ м для кубического сплайна (1.4): линия 1 — граничное условие типа III; линия 2 — типа I; линия 3 — точное решение (3.3); (a) случай докритического течения; (b) случай сверхкритического течения

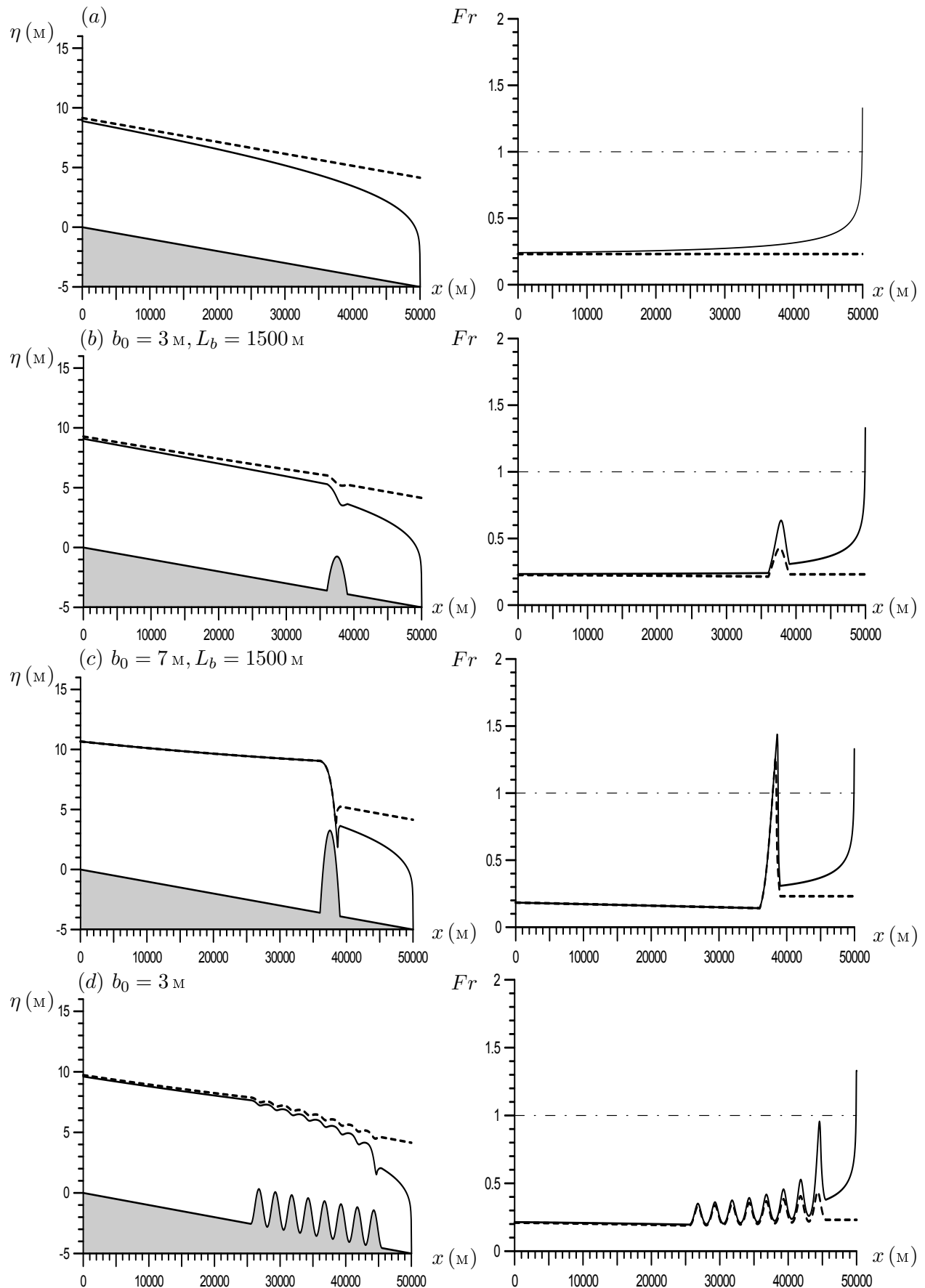


Рис. 4. Распределения уровней воды $\eta(x)$ и числа Фруда $Fr(x)$ (сплошная линия — граничное условие типа III, штриховая линия — граничное условие типа I): (a) гладкое дно; (b) возникновение области со сверхкритическим потоком на неоднородности; (c) докритический поток при наличии одной неоднородности; (d) докритический поток при наличии системы неоднородностей дна

§ 5. Дно с локальными неоднородностями

Неоднородности дна будем располагать в области $1/2 < x/a \leq 1$, а на однородном дне $0 \leq x/a < 1/2$ будем рассчитывать относительную интегральную разницу между решениями

$$\varepsilon = \frac{2}{a} \int_0^{a/2} \frac{|\eta^{(I)} - \eta^{(III)}|}{\eta^{(I)}} dx. \quad (5.1)$$

Рассмотрим влияние одиночных препятствий (рис. 4, *b, c*) и сложных неоднородностей дна (рис. 4, *d*) на стационарные решения с использованием различных граничных условий, ограничившись достаточно крупномасштабными неоднородностями с относительной высотой $b_0/H \simeq 0.1 \div 0.7$ и горизонтальной шкалой $L_b \simeq (10 \div 400)H \gg H$. Неоднородность дна может существенно изменять структуру потока выше по течению. Появление зоны сверхкритического течения $Fr > 1$ и гидравлического скачка качественно изменяют ситуацию выше по течению (рис. 4, *c*), где решения $\eta^{(III)}(x)$ и $\eta^{(I)}(x)$ практически совпадают. Существует набор параметров, характеризующих локальные неоднородности дна, обеспечивающие возникновение сверхкритической зоны ($Fr > 1$). Во всех случаях ниже по течению от зоны неоднородности дна разность $|\eta^{(I)} - \eta^{(III)}|$ велика (см. область $x = 40\text{--}50$ км на рис. 4, *b, c*). А выше по течению от этих неоднородностей величина $|\eta^{(I)} - \eta^{(III)}|$ уменьшается и в случае докритического течения (рис. 4, *b, d*). Причем более сложный характер неоднородного рельефа существенно ослабляет влияние граничных условий выше по течению (рис. 4, *d*). Рис. 4, *d* наглядно демонстрирует уменьшение влияния поглощающих граничных условий при наличии нескольких неоднородностей дна даже без формирования сверхкритического режима.

Рассмотрим влияние параметров b_0 и L_b , характеризующих неоднородность различного вида, на величину ε (5.1). На рисунке 5 показаны зависимости $\varepsilon(L_b)$, $\varepsilon(b_0)$ для трех характерных форм возмущений дна в виде (1.4) и (1.5) (см. рис. 2). Для выбранных значений расчетной области $a = 50$ км и величины стока $Q = 20 \text{ м}^2/\text{с}$ ($H \simeq 10$ м) на гладком дне имеем $\varepsilon = 0.05$ (см. рис. 3, *a* и предел $b_0 \rightarrow 0$ на рис. 5). При увеличении b_0 имеем уменьшение расхождения между решениями. Причем при определенных b_0 формируются критические течение, сопровождающиеся резким уменьшением ε (см. область $b_0 \simeq 5$ м в случае $L_b = 1500$ м). Этот результат слабо зависит от формы неоднородности. При больших амплитудах b_0 расхождение между решениями находится в пределах $\lesssim 10^{-5} \div 10^{-4}$.

Реальный рельеф дна существенно отличается от модельного на рис. 4, *d*. В качестве реального рельефа дна выберем двадцатикилометровый участок русла Волги вблизи Светлого Яра (примерно 50 км ниже плотины Волжской ГЭС), который расположим внутри расчетной области. На рис. 6 приведены результаты расчетов. Мы видим очень хорошее совпадение решений при использовании линейной аппроксимации на границе и условий в виде водопада уже при $x < 45$ км, причем граничные условия III дают зону критического течения вблизи $x \simeq 45$ км, а граничные условия I сохраняют докритический режим на всей расчетной области.

Заключение

При численном моделировании поверхностного потока мелкой воды в случае сложного неоднородного рельефа дна использование граничных условий типа поглощения (водопад) дает вполне адекватные результаты для широкого круга задач. Наличие неоднородностей дна (отмели, косы, ямы) качественно меняет характер течения по сравнению с плоским дном. Размеры области, на которую оказывают влияние граничные условия, существенно уменьшаются выше по течению. Выбор того или иного граничного условия влияет на структуру течения только в непосредственной близости от границы и разница между решениями становится исчезающе малой выше по течению. По-видимому, причина связана с эффективным отражением волны разрежения из-за частичных отражений от любых неоднородностей дна. На это указывает то, что влияние неоднородности рельефа $b(x)$ на структуру течения в виде ямы оказывается меньше, чем в форме поднятия дна русла. Если на неоднородности возникает сверхкритический поток с гидравлическим скачком, то это в наибольшей степени ослабляет влияние самой границы на структуру потока выше по течению.

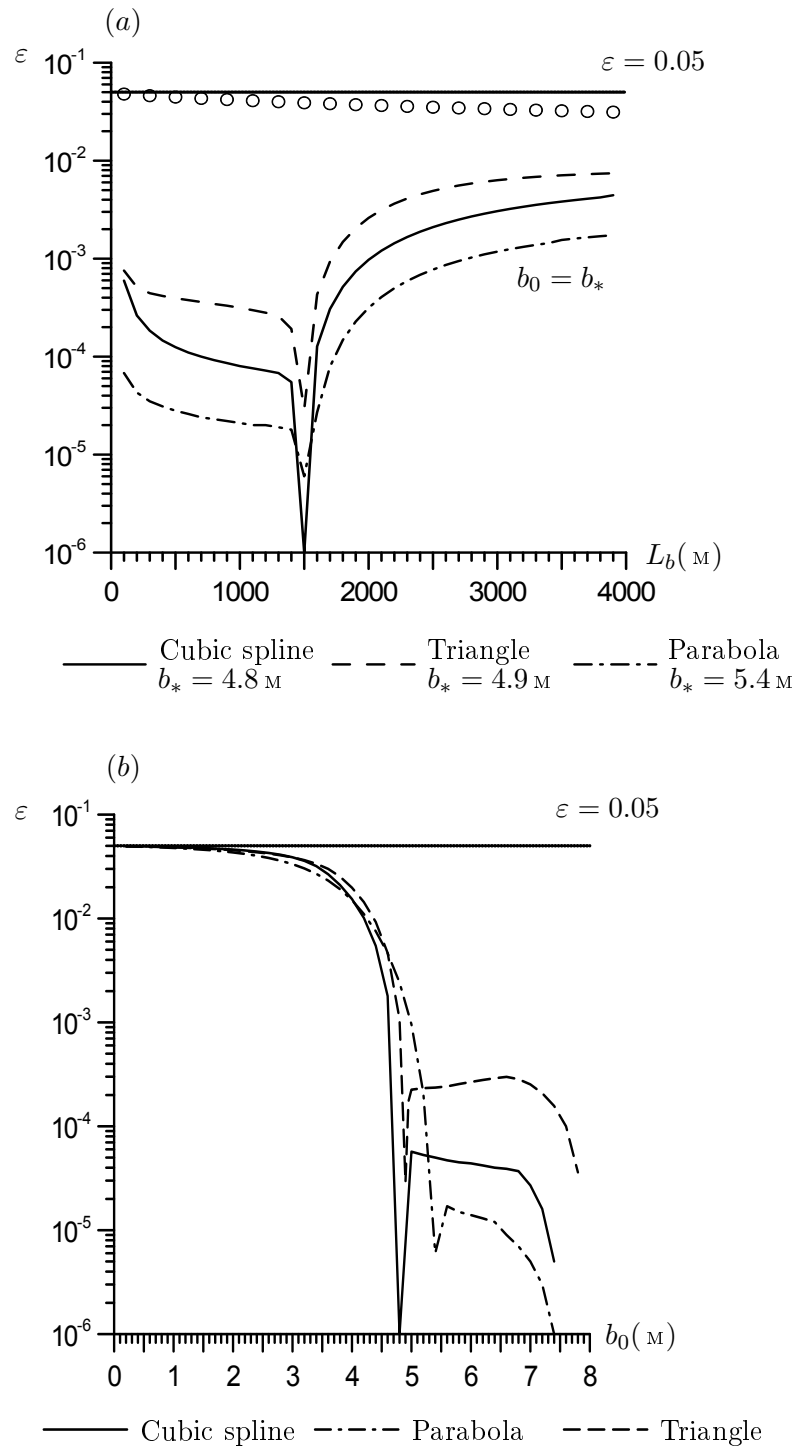


Рис. 5. Влияние параметров неоднородности дна на общую структуру течения; точечная линия соответствует течению на плоском дне, а кружками обозначено докритическое течение для треугольного профиля с $b_0 = 3$:
 (a) зависимость $\varepsilon(L_b)$; (b) зависимость $\varepsilon(b_0)$ для фиксированного $L_b = 1500 \text{ м}$

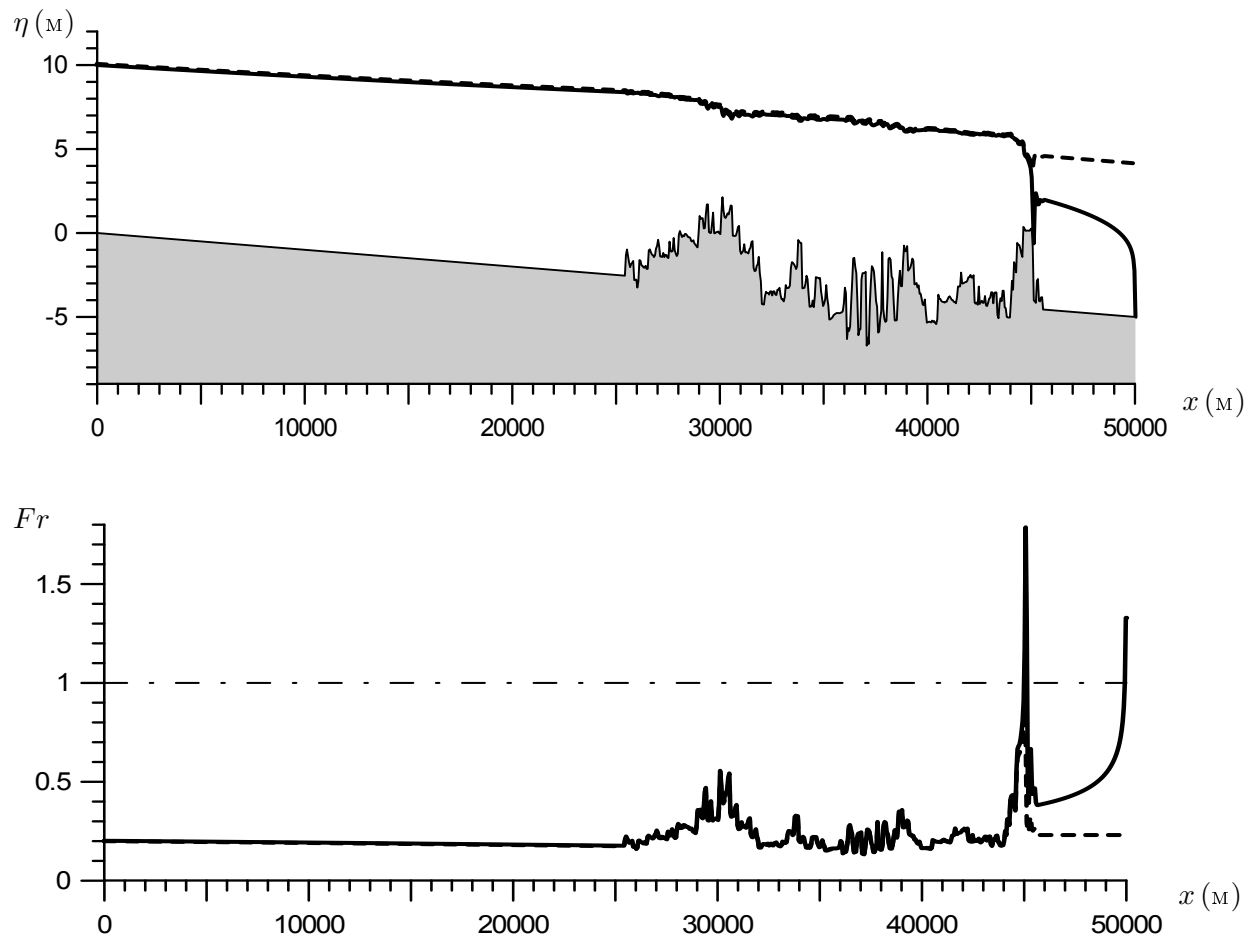


Рис. 6. Распределения уровней воды $\eta(x)$ и числа Фруда $Fr(x)$ (сплошная линия — граничное условие типа III, штриховая линия — граничное условие типа I) для модели с реальным профилем дна для участка р. Волга на интервале $x = (25-46)$ км.

Реальные русла характеризуются большим количеством неоднородностей рельефа дна на самых различных масштабах, что позволяет использовать более простые граничные условия в виде поглощения (типа водопад), обеспечивая погрешность лучше 1% уже на расстоянии несколько километров от границы. В случае двумерных течений дополнительными факторами неоднородности являются изменения ширины и формы поперечного профиля русла, изгибы и повороты, вплоть до меандрирования русла. Эти особенности вносят дополнительный вклад в ослабление влияния границы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шокин Ю.И., Федотова З.И., Хахимзянов Г.С. Иерархия нелинейных моделей гидродинамики длинных поверхностных волн // Доклады Академии наук. 2015. Т. 462. № 2. С. 168–172.
2. Федотова З.И., Хахимзянов Г.С. Нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на нестационарном дне // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13. № 4. С. 114–126.
3. Green A.E., Naghdi P.M. A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth // Journal of Fluid Mechanics. 1976. Vol. 78. Issue 2. P. 237–246. DOI: [10.1017/S0022112076002425](https://doi.org/10.1017/S0022112076002425)
4. Баутин С.П., Дерябин С.Л. Исследование начально-краевой задачи для системы уравнений Грина–Нагди // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2012. № 1 (13). С. 4–13.
5. Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996. 276 с.
6. Баутин С.П., Дерябин С.Л., Соммер А.Ф., Хахимзянов Г.С. Исследование решений уравнений мелкой воды в окрестности подвижной линии уреза // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15. № 6. С. 19–41.
7. Прокофьев В.А. Уточнение модели мелкой воды на основе спектрального представления профиля скорости по глубине // Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. 2000. Т. 236. С. 121–133.
8. Данилова К.Н., Ляпидевский В.Ю. Уединенные волны в двухслойной мелкой воде // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. 2014. Т. 14. № 4. С. 22–31.
9. Khakimzyanov G.S., Gusev O.I., Beizel S.A., Chubarov L.B., Shokina N.Yu. Simulation of tsunami waves generated by submarine landslides in the Black Sea // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2015. Vol. 30. Issue 4. P. 227–237. DOI: [10.1515/rnam-2015-0020](https://doi.org/10.1515/rnam-2015-0020)
10. Liapidevskii V.Yu. Shallow-water equations with dispersion. Hyperbolic model // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1998. Vol. 39. Issue 2. P. 194–199. DOI: [10.1007/BF02468084](https://doi.org/10.1007/BF02468084)
11. Зейтунян Р.Х. Нелинейные длинные волны на поверхности воды и солитоны // Успехи физических наук. 1995. Т. 165. № 12. С. 1403–1456. DOI: [10.3367/UFNr.0165.199512f.1403](https://doi.org/10.3367/UFNr.0165.199512f.1403)
12. Гусев О.И., Шокина Н.Ю., Кутергин В.А., Хахимзянов Г.С. Моделирование поверхностных волн, генерируемых подводным оползнем в водохранилище // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18. № 5. С. 74–90.
13. Horritt M.S., Di Baldassarre G., Bates P.D., Brath A. Comparing the performance of a 2-D finite element and a 2-D finite volume model of floodplain inundation using airborne SAR imagery // Hydrological Processes. 2007. Vol. 21. Issue 20. P. 2745–2759. DOI: [10.1002/hyp.6486](https://doi.org/10.1002/hyp.6486)
14. Bolgov M.V., Krasnozhan G.F., Shatalova K.Yu. Computer hydrodynamic model of the Lower Volga // Water Resources. 2014. Vol. 41. Issue 1. P. 19–31. DOI: [10.1134/S0097807814010047](https://doi.org/10.1134/S0097807814010047)
15. Писарев А.В., Храпов С.С., Агафонникова Е.О., Хоперсков А.В. Численная модель динамики поверхностных вод в русле Волги: оценка коэффициента шероховатости // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. № 1. P. 114–130. DOI: [10.20537/vm130111](https://doi.org/10.20537/vm130111)
16. Caviedes-Voulliéme D., Morales-Hernandez M., Lopez-Marijuan I., García-Navarro P. Reconstruction of 2D river beds by appropriate interpolation of 1D cross-sectional information for flood simulation // Environmental Modelling & Software. 2014. Vol. 61. P. 206–228. DOI: [10.1016/j.envsoft.2014.07.016](https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2014.07.016)
17. Costabile P., Costanzo C., Macchione F. A storm event watershed model for surface runoff based on 2D fully dynamic wave equations // Hydrological Processes. 2013. Vol. 27. Issue 4. P. 554–569. DOI: [10.1002/hyp.9237](https://doi.org/10.1002/hyp.9237)
18. Juez C., Caviedes-Voulliéme D., Murillo J., García-Navarro P. 2D dry granular free-surface transient flow over complex topography with obstacles. Part II: Numerical predictions of fluid structures and benchmarking // Computers & Geosciences. 2014. Vol. 73. P. 142–163. DOI: [10.1016/j.cageo.2014.09.010](https://doi.org/10.1016/j.cageo.2014.09.010)

19. Марчук А.Г., Мошкалев П.С. Численное моделирование наката волн цунами на берег произвольного профиля // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2014. Т. 12. № 2. С. 55–63.
http://www.nsu.ru/xmlui/bitstream/nsu/2189/1/2014_V12_No2_7.pdf
20. Vacondio R., Rogers B.D., Stansby P.K. Smoothed particle hydrodynamics: approximate zero-consistent 2-D boundary conditions and still shallow-water tests // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2012. Vol. 69. Issue 1. P. 226–253. DOI: [10.1002/fld.2559](https://doi.org/10.1002/fld.2559)
21. Bautin S.P., Deryabin S.L., Sommer A.F., Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Use of analytic solutions in the statement of difference boundary conditions on a movable shoreline // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2011. Vol. 26. Issue 4. P. 353–377. DOI: [10.1515/rjnamm.2011.020](https://doi.org/10.1515/rjnamm.2011.020)
22. Burguete J., García-Navarro P. Implicit schemes with large time step for non-linear equations: application to river flow hydraulics // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2004. Vol. 46. Issue 6. P. 607–636. DOI: [10.1002/fld.772](https://doi.org/10.1002/fld.772)
23. Burguete J., García-Navarro P., Murillo J. Numerical boundary conditions for globally mass conservative methods to solve the shallow-water equations and applied to river flow // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2006. Vol. 51. Issue 6. P. 585–615. DOI: [10.1002/fld.1127](https://doi.org/10.1002/fld.1127)
24. Burguete J., García-Navarro P., Aliod R. Numerical simulation of runoff from extreme rainfall events in a mountain water catchment // Natural Hazards and Earth System Science. 2002. Vol. 2. Issue 1/2. P. 109–117. DOI: [10.5194/nhess-2-109-2002](https://doi.org/10.5194/nhess-2-109-2002)
25. Westoby M.J., Glasser N.F., Brasington J., Hambrey M.J., Quincey D.J., Reynolds J.M. Modelling outburst floods from moraine-dammed glacial lakes // Earth-Science Reviews. 2014. Vol. 134. P. 137–159. DOI: [10.1016/j.earscirev.2014.03.009](https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2014.03.009)
26. Singh J., Altinakar M.S., Ding Y. Numerical modeling of rainfall-generated overland flow using nonlinear shallow-water equations // Journal of Hydrologic Engineering. 2015. Vol. 20. Issue 8. 04014089. DOI: [10.1061/\(ASCE\)HE.1943-5584.0001124](https://doi.org/10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0001124)
27. Skiba Yu.N. Total energy and mass conserving finite-difference schemes for the shallow water equations // Russian Meteorology and Hydrology. 1995. Vol. 2. P. 35–43.
28. Ильгамов М.А., Гильманов А.Н. Неотражающие условия на границах расчетной области. М.: Физматлит, 2003. 240 с.
29. Zokagoa J.M., Soulaïmani A. Modeling of wetting-drying transitions in free surface flows over complex topographies // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2010. Vol. 199. Issues 33–36. P. 2281–2304. DOI: [10.1016/j.cma.2010.03.023](https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.03.023)
30. Liang Q., Borthwick A.G.L. Adaptive quadtree simulation of shallow flows with wet-dry fronts over complex topography // Computers & Fluids. 2009. Vol. 38. Issue 2. P. 221–234. DOI: [10.1016/j.compfluid.2008.02.008](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2008.02.008)
31. Копысов С.П., Тонков Л.Е., Чернова А.А., Сармакеева А.С. Моделирование взаимодействия с преградой потока несжимаемой жидкости методами VOF и SPH // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. № 3. С. 405–420. DOI: [10.20537/vm150311](https://doi.org/10.20537/vm150311)
32. Vater S., Beisiegel N., Behrens J. A limiter-based well-balanced discontinuous Galerkin method for shallow-water flows with wetting and drying: One-dimensional case // Advances in Water Resources. 2015. Vol. 85. P. 1–13. DOI: [10.1016/j.advwatres.2015.08.008](https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2015.08.008)
33. Ostapenko V.V. Modified shallow water equations which admit the propagation of discontinuous waves over a dry bed // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2007. Vol. 48. Issue 6. P. 795–812. DOI: [10.1007/s10808-007-0103-y](https://doi.org/10.1007/s10808-007-0103-y)
34. Храпов С.С., Хоперсков А.В., Кузьмин Н.М., Писарев А.В., Кобелев И.А. Численная схема для моделирования динамики поверхностных вод на основе комбинированного SPH-TVD подхода // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12. № 2. С. 282–297.
35. Писарев А.В., Храпов С.С., Воронин А.А., Дьяконова Т.А., Циркова Е.А. Особенности динамики затопления Волго-Ахтубинской поймы в зависимости от режимов испарения и инфильтрации // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1. Математика. Физика. 2012. № 1 (16). С. 36–41. DOI: [10.15688/jvolsu1.2012.1.5](https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2012.1.5)
36. Дьяконова Т.А., Писарев А.В., Хоперсков А.В., Храпов С.С. Математическая модель динамики поверхностных вод // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1. Математика. Физика. 2014. № 1 (20). С. 35–44. DOI: [10.15688/jvolsu1.2014.1.4](https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2014.1.4)
37. Khrapov S., Pisarev A., Kobelev I., Zhumaliev A., Agafonnikova E., Losev A., Khoperskov A. The numerical simulation of shallow water: estimation of the roughness coefficient on the flood stage // Advances in Mechanical Engineering. 2013. Vol. 5. 787016. 11 p. DOI: [10.1155/2013/787016](https://doi.org/10.1155/2013/787016)

38. Шушкевич Т.С., Кузьмин Н.М., Бутенко М.А. Трехмерный параллельный численный газодинамический код на основе смешанного лагранжево-эйлерова подхода // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1. Математика. Физика. 2015. № 4 (29). С. 24–34.
DOI: [10.15688/jvolsu1.2015.4.3](https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2015.4.3)
39. Yee H.C., Beam R.M., Warming R.F. Boundary approximations for implicit schemes for one-dimensional inviscid equations of gasdynamics // AIAA Journal. 1982. Vol. 20. No. 9. P. 1203–1211.
DOI: [10.2514/3.51181](https://doi.org/10.2514/3.51181)
40. Jin M., Fread D.L. Dynamic flood routing with explicit and implicit numerical solution schemes // Journal of Hydraulic Engineering. 1997. Vol. 123. Issue 3. P. 166–173.
DOI: [10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1997\)123:3\(166\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1997)123:3(166))
41. Cozzolino L., Della Morte R., Cimorelli L., Covelli C., Pianese D. A broad-crested weir boundary condition in finite volume shallow-water numerical models // Procedia Engineering. 2014. Vol. 70. P. 353–362.
DOI: [10.1016/j.proeng.2014.02.040](https://doi.org/10.1016/j.proeng.2014.02.040)

Поступила в редакцию 25.05.2016

Дьяконова Татьяна Андреевна, аспирант, Волгоградский государственный университет, 400062, Россия, г. Волгоград, пр. Университетский, 100.

E-mail: dyakonova@volsu.ru

Храпов Сергей Сергеевич, к. ф.-м. н., доцент, Волгоградский государственный университет, 400062, Россия, г. Волгоград, пр. Университетский, 100.

E-mail: khrapov@volsu.ru

Хоперсков Александр Валентинович, д. ф.-м. н., профессор, Волгоградский государственный университет, 400062, Россия, г. Волгоград, пр. Университетский, 100.

E-mail: khoperskov@volsu.ru

T. A. D'yakonova, S. S. Khrapov, A. V. Khoperskov

The problem of boundary conditions for the shallow water equations

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, no. 3, pp. 401–417 (in Russian).

Keywords: shallow water model, numerical schemes, boundary conditions, irregular bottom.

MSC2010: 76D27

DOI: [10.20537/vm160309](https://doi.org/10.20537/vm160309)

The problem of choice of boundary conditions is discussed for the case of numerical integration of the shallow water equations on a substantially irregular relief. While modeling unsteady surface water flows there is a dynamic boundary that partitions liquid and dry bottom. The situation is complicated by the emergence of sub- and supercritical flow regimes for the problems of seasonal floodplain flooding, flash floods, tsunami landfalls. Analysis of the use of various methods of setting conditions for the physical quantities of liquid at the settlement of the boundary shows the advantages of using the waterfall type conditions in the presence of strong heterogeneities of landforms. When there is a waterfall on the border of computational domain and heterogeneity of the relief in the vicinity of the boundary, a portion may occur which is formed by the region of critical flow with the formation of a hydraulic jump, which greatly weakens the effect of the waterfall on the flow pattern upstream.

REFERENCES

1. Shokin Yu.I., Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S. Hierarchy of nonlinear models of the hydrodynamics of long surface waves, *Doklady Physics*, 2015, vol. 60, issue 5, pp. 224–228.
DOI: [10.1134/S1028335815050079](https://doi.org/10.1134/S1028335815050079)

2. Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S. Nonlinear dispersive shallow water equations for a non-stationary bottom, *Vychisl. Tekhnol.*, 2008, vol. 13, no. 4, pp. 114–126 (in Russian).
3. Green A.E., Naghdi P.M. A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth, *Journal of Fluid Mechanics*, 1976, vol. 78, issue 2, pp. 237–246. DOI: [10.1017/S0022112076002425](https://doi.org/10.1017/S0022112076002425)
4. Bautin S.P., Deryabin S.L. Research of the initial boundary value problem for the system of Green–Naghdi equations, *Vestn. Ural. Gos. Univ. Put. Soobshch.*, 2012, no. 1 (13), pp. 4–13 (in Russian).
5. Pelinovskii E.N. *Gidrodinamika voln tsunami* (Hydrodynamics of tsunami waves), Nizhni Novgorod: Institute of Applied Physics of RAS, 1996, 276 p.
6. Bautin S.P., Deryabin S.L., Sommer A.F., Khakimzyanov G.S. Investigation of solutions of the shallow water equations in the vicinity of the mobile run-up line, *Vychisl. Tekhnol.*, 2010, vol. 15, no. 6, pp. 19–41 (in Russian).
7. Prokof'ev V.A. Refinement shallow water model on the basis of spectral representation of the profile of depth speed, *Izvestiya Vserossiiskogo Nauchno-Issledovatel'skogo Instituta Gidrotekhniki Im. B.E. Vedeneeva*, 2000, vol. 236, pp. 121–133 (in Russian).
8. Danilova K.N., Liapidevskii V.Yu. Solitary waves in two-layer shallow water, *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, vol. 213, issue 6, pp. 802–810. DOI: [10.1007/s10958-016-2741-1](https://doi.org/10.1007/s10958-016-2741-1)
9. Khakimzyanov G.S., Gusev O.I., Beizel S.A., Chubarov L.B., Shokina N.Yu. Simulation of tsunami waves generated by submarine landslides in the Black Sea, *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2015, vol. 30, issue 4, pp. 227–237. DOI: [10.1515/rnam-2015-0020](https://doi.org/10.1515/rnam-2015-0020)
10. Liapidevskii V.Yu. Shallow-water equations with dispersion. Hyperbolic model, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1998, vol. 39, issue 2, pp. 194–199. DOI: [10.1007/BF02468084](https://doi.org/10.1007/BF02468084)
11. Zeytounian R.Kh. Nonlinear long waves on water and solitons, *Physics-Uspekhi*, vol. 38, no. 12, pp. 1333–1381. DOI: [10.1070/PU1995v038n12ABEH000124](https://doi.org/10.1070/PU1995v038n12ABEH000124)
12. Gusev O.I., Shokina N.Yu., Kutergin V.A., Khakimzyanov G.S. Numerical modelling of surface waves generated by underwater landslide in a reservoir, *Vychisl. Tekhnol.*, 2013, vol. 18, no. 5, pp. 74–90 (in Russian).
13. Horritt M.S., Di Baldassarre G., Bates P.D., Brath A. Comparing the performance of a 2-D finite element and a 2-D finite volume model of floodplain inundation using airborne SAR imagery, *Hydrological Processes*, 2007, vol. 21, issue 20, pp. 2745–2759. DOI: [10.1002/hyp.6486](https://doi.org/10.1002/hyp.6486)
14. Bolgov M.V., Krasnozhon G.F., Shatalova K.Yu. Computer hydrodynamic model of the Lower Volga, *Water Resources*, 2014, vol. 41, issue 1, pp. 19–31. DOI: [10.1134/S0097807814010047](https://doi.org/10.1134/S0097807814010047)
15. Pisarev A.V., Khrapov S.S., Agafonnikova E.O., Khoperskov A.V. Numerical model of shallow water dynamics in the channel of the Volga: estimation of roughness, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 1, pp. 114–130 (in Russian). DOI: [10.20537/vm130111](https://doi.org/10.20537/vm130111)
16. Caviedes-Voulliéme D., Morales-Hernandez M., Lopez-Marijuan I., García-Navarro P. Reconstruction of 2D river beds by appropriate interpolation of 1D cross-sectional information for flood simulation, *Environmental Modelling & Software*, 2014, vol. 61, pp. 206–228. DOI: [10.1016/j.envsoft.2014.07.016](https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2014.07.016)
17. Costabile P., Costanzo C., Macchione F. A storm event watershed model for surface runoff based on 2D fully dynamic wave equations, *Hydrological Processes*, 2013, vol. 27, issue 4, pp. 554–569. DOI: [10.1002/hyp.9237](https://doi.org/10.1002/hyp.9237)
18. Juez C., Caviedes-Voulliéme D., Murillo J., García-Navarro P. 2D dry granular free-surface transient flow over complex topography with obstacles. Part II: Numerical predictions of fluid structures and benchmarking, *Computers & Geosciences*, 2014, vol. 73, pp. 142–163. DOI: [10.1016/j.cageo.2014.09.010](https://doi.org/10.1016/j.cageo.2014.09.010)
19. Marchuk A.G., Moshkalev P.S. Numeric simulation of the tsunami runup process on the shore with arbitrary profile, *Vestn. Novosib. Gos. Univ. Ser. Inform. Tekhnol.*, 2014, vol. 12, no. 2, pp. 55–63 (in Russian). http://www.nsu.ru/xmlui/bitstream/nsu/2189/1/2014_V12_No2_7.pdf
20. Vacondio R., Rogers B.D., Stansby P.K. Smoothed particle hydrodynamics: approximate zero-consistent 2-D boundary conditions and still shallow-water tests, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2012, vol. 69, issue 1, pp. 226–253. DOI: [10.1002/fld.2559](https://doi.org/10.1002/fld.2559)
21. Bautin S.P., Deryabin S.L., Sommer A.F., Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Use of analytic solutions in the statement of difference boundary conditions on a movable shoreline, *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2011, vol. 26, issue 4, pp. 353–377. DOI: [10.1515/rjnamm.2011.020](https://doi.org/10.1515/rjnamm.2011.020)
22. Burguete J., García-Navarro P. Implicit schemes with large time step for non-linear equations: application to river flow hydraulics, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2004, vol. 46, issue 6, pp. 607–636. DOI: [10.1002/fld.772](https://doi.org/10.1002/fld.772)
23. Burguete J., García-Navarro P., Murillo J. Numerical boundary conditions for globally mass conservative methods to solve the shallow-water equations and applied to river flow, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2006, vol. 51, issue 6, pp. 585–615. DOI: [10.1002/fld.1127](https://doi.org/10.1002/fld.1127)

24. Burguete J., García-Navarro P., Aliod R. Numerical simulation of runoff from extreme rainfall events in a mountain water catchment, *Natural Hazards and Earth System Science*, 2002, vol. 2, issue 1/2, pp. 109–117. DOI: [10.5194/nhess-2-109-2002](https://doi.org/10.5194/nhess-2-109-2002)
25. Westoby M.J., Glasser N.F., Brasington J., Hambrey M.J., Quincey D.J., Reynolds J.M. Modelling outburst floods from moraine-dammed glacial lakes, *Earth-Science Reviews*, 2014, vol. 134, pp. 137–159. DOI: [10.1016/j.earscirev.2014.03.009](https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2014.03.009)
26. Singh J., Altinakar M.S., Ding Y. Numerical modeling of rainfall-generated overland flow using nonlinear shallow-water equations, *Journal of Hydrologic Engineering*, 2015, vol. 20, issue 8, 04014089. DOI: [10.1061/\(ASCE\)HE.1943-5584.0001124](https://doi.org/10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0001124)
27. Skiba Yu.N. Total energy and mass conserving finite-difference schemes for the shallow water equations, *Russian Meteorology and Hydrology*, 1995, vol. 2, pp. 35–43.
28. Il'gamov M.A., Gil'manov A.N. *Neotrazhayushchie usloviya na granitsakh raschetnoi oblasti* (Non-reflecting boundary conditions for computational domains), Moscow: Fizmatlit, 2003, 240 p.
29. Zokagoa J.M., Soulaïmani A. Modeling of wetting-drying transitions in free surface flows over complex topographies, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, vol. 199, issues 33–36, pp. 2281–2304. DOI: [10.1016/j.cma.2010.03.023](https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.03.023)
30. Liang Q., Borthwick A.G.L. Adaptive quadtree simulation of shallow flows with wet-dry fronts over complex topography, *Computers & Fluids*, 2009, vol. 38, issue 2, pp. 221–234. DOI: [10.1016/j.compfluid.2008.02.008](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2008.02.008)
31. Kopysov S.P., Tonkov L.E., Chernova A.A., Sarmakeeva A.S. Modeling of the incompressible liquid flow interaction with barriers using VOF and SPH methods, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, no. 3, pp. 405–420 (in Russian). DOI: [10.20537/vm150311](https://doi.org/10.20537/vm150311)
32. Vater S., Beisiegel N., Behrens J. A limiter-based well-balanced discontinuous Galerkin method for shallow-water flows with wetting and drying: One-dimensional case, *Advances in Water Resources*, 2015, vol. 85, pp. 1–13. DOI: [10.1016/j.advwatres.2015.08.008](https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2015.08.008)
33. Ostapenko V.V. Modified shallow water equations which admit the propagation of discontinuous waves over a dry bed, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2007, vol. 48, issue 6, pp. 795–812. DOI: [10.1007/s10808-007-0103-y](https://doi.org/10.1007/s10808-007-0103-y)
34. Khrapov S.S., Khoperskov A.V., Kuz'min N.M., Pisarev A.V., Kobelev I.A. A numerical scheme for simulating the dynamics of surface water on the basis of the combined SPH-TVD approach, *Vychisl. Metody Program.*, 2011, vol. 12, no. 2, pp. 282–297 (in Russian).
35. Pisarev A.V., Khrapov S.S., Voronin A.A., Dyakonova T.A., Tsyrkova E.A. The role of infiltration and evaporation in the flooding dynamics of the Volga-Akhtuba floodplain, *Vestnik Volgogradskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Fizika*, 2012, no. 1 (16), pp. 36–41 (in Russian). DOI: [10.15688/jvolsu1.2012.1.5](https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2012.1.5)
36. Dyakonova T.A., Pisarev A.V., Khoperskov A.V., Khrapov S.S. Mathematical model of surface water dynamics, *Vestnik Volgogradskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Fizika*, 2014, no. 1 (20), pp. 35–44 (in Russian). DOI: [10.15688/jvolsu1.2014.1.4](https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2014.1.4)
37. Khrapov S., Pisarev A., Kobelev I., Zhumaliev A., Agafonnikova E., Losev A., Khoperskov A. The numerical simulation of shallow water: estimation of the roughness coefficient on the flood stage, *Advances in Mechanical Engineering*, 2013, vol. 5, 787016, 11 p. DOI: [10.1155/2013/787016](https://doi.org/10.1155/2013/787016)
38. Shushkevich T.S., Kuzmin N.M., Butenko M.A. The three-dimensional parallel numerical code on the base of mixed Lagrange–Eulerian approach, *Vestnik Volgogradskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Fizika*, 2015, no. 4 (29), pp. 24–34 (in Russian). DOI: [10.15688/jvolsu1.2015.4.3](https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2015.4.3)
39. Yee H.C., Beam R.M., Warming R.F. Boundary approximations for implicit schemes for one-dimensional inviscid equations of gasdynamics, *AIAA Journal*, 1982, vol. 20, no. 9, pp. 1203–1211. DOI: [10.2514/3.51181](https://doi.org/10.2514/3.51181)
40. Jin M., Fread D.L. Dynamic flood routing with explicit and implicit numerical solution schemes, *Journal of Hydraulic Engineering*, 1997, vol. 123, issue 3, pp. 166–173. DOI: [10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1997\)123:3\(166\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1997)123:3(166))
41. Cozzolino L., Della Morte R., Cimorelli L., Covelli C., Pianese D. A broad-crested weir boundary condition in finite volume shallow-water numerical models, *Procedia Engineering*, 2014, vol. 70, pp. 353–362. DOI: [10.1016/j.proeng.2014.02.040](https://doi.org/10.1016/j.proeng.2014.02.040)

МЕХАНИКА

2016. Т. 26. Вып. 3

D'yakonova Tat'yana Andreevna, Post-Graduate Student, Volgograd State University, pr. Universitetskii, 100, Volgograd, 400062, Russia.

E-mail: dyakonova@volsu.ru

Khrapov Sergei Sergeevich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Volgograd State University, pr. Universitetskii, 100, Volgograd, 400062, Russia.

E-mail: khrapov@volsu.ru

Khoperskov Aleksandr Valentinovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Volgograd State University, pr. Universitetskii, 100, Volgograd, 400062, Russia.

E-mail: khoperskov@volsu.ru