

УДК 531.011

© *А. И. Сафонов, О. В. Холостова*

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ НЕУСТОЙЧИВОГО РАВНОВЕСИЯ В СЛУЧАЕ ДВОЙНОГО РЕЗОНАНСА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА¹

Рассматриваются движения близкой к автономной периодической по времени гамильтоновой системе с двумя степенями свободы в окрестности тривиального равновесия, устойчивого в линейном приближении. Предполагается, что в системе реализуется двойной, основной и комбинационный, резонанс третьего порядка, при этом комбинационный резонанс может быть сильным или слабым. В обоих случаях в полной нелинейной системе указанное равновесие неустойчиво. Проведена нормализация гамильтонианов возмущенного движения в членах до четвертого порядка включительно относительно возмущений с учетом имеющихся резонансов. Решен вопрос о существовании и числе положений равновесия соответствующих приближенных (модельных) систем, найдены достаточные и необходимые условия их устойчивости. Методом малого параметра Пуанкаре построены периодические движения исходных полных систем, рождающиеся из положений равновесия модельных систем. Решен вопрос об их устойчивости в линейном приближении. В частности, получены условия существования (в малой окрестности неустойчивого тривиального равновесия) устойчивых (в линейном приближении) периодических движений.

Ключевые слова: гамильтонова система, кратный резонанс, устойчивость, периодические движения.

DOI: [10.20537/vm160310](https://doi.org/10.20537/vm160310)

Введение

При исследовании устойчивости частных движений механических систем, зависящих от нескольких параметров, нередки случаи, когда в пространстве параметров имеются точки или множество точек, для которых частоты малых колебаний линеаризованных уравнений возмущенного движения удовлетворяют линейным соотношениям специального вида, т.е. когда в системе имеются резонансы. Для резонансных случаев существенным образом меняется как характер устойчивости самого решения (по сравнению со случаями отсутствия резонансов), так и характер движений системы в его окрестности.

Первые публикации по исследованию влияния резонансов на устойчивость положений равновесия механических систем появились на рубеже XIX и XX веков [1–3]. Случаи, когда в системе имеется один резонанс, изучены весьма полно; с библиографией и обзором литературы по данному вопросу можно ознакомиться в работах [4–6] по гамильтоновым и работе [5] по негамильтоновым системам.

Нелинейные колебания периодических по времени гамильтоновых систем с одной степенью свободы в окрестности положения равновесия в резонансных и близких к резонансным случаям подробно исследованы с применением методов КАМ-теории. Описаны периодические и условно-периодические движения системы, определены области ограниченности движений для случаев резонанса в вынужденных колебаниях [7], параметрического резонанса [8–10], резонансах третьего [11, 12] и четвертого [13, 14] порядков. Бифуркация и устойчивость периодических решений в гамильтоновых системах с одной степенью свободы в случае вырождения гамильтониана возмущенного движения (в членах четвертого порядка) при наличии одного из резонансов до шестого порядка включительно исследованы в работах [15, 16]. В статьях [17]

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00380).

и [18] рассмотрены периодические движения близких к гамильтоновым системам с одной степенью свободы при резонансе в вынужденных колебаниях и резонансе четвертого порядка. В работе [19] изучены периодические движения неавтономных периодических по времени гамильтоновых систем с двумя степенями свободы при параметрическом резонансе основного типа.

Сравнительно недавно начато исследование устойчивости при наличии в системе кратных резонансов. Взаимное влияние нескольких резонансов одного порядка на устойчивость положения равновесия изучалось для многомерных автономных негамильтоновых [20–23] и гамильтоновых [24, 25] систем.

Случаи двукратного параметрического резонанса в близкой к автономной периодической по времени линейной гамильтоновой системе с двумя степенями свободы рассмотрены в работах [26–28]. Для каждого резонансного случая построены области устойчивости и неустойчивости. В качестве приложений решен ряд задач динамики спутников относительно центра масс [28–30].

В работе [31] доказана неустойчивость тривиального положения равновесия периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случаях кратных резонансов третьего порядка. Здесь же проведен подробный анализ нелинейных колебаний соответствующих приближенных (модельных) систем, при учете в гамильтонианах слагаемых до третьего порядка включительно относительно возмущений.

В статье [32] исследуется взаимное влияние слабого комбинационного резонанса третьего порядка и сильного основного резонанса четвертого порядка (в зоне его устойчивости) на движения гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности тривиального равновесия. Найдена область изменения параметров задачи (коэффициентов нормализованного гамильтониана), для которых все движения модельной системы в окрестности равновесия ограничены. В частности, в эту область попадают параметры задачи об устойчивости треугольных точек либрации плоской эллиптической ограниченной задачи трех тел в случае рассматриваемого кратного резонанса [33].

В данной работе изучается близкая к автономной периодическая по времени гамильтонова система с двумя степенями свободы в окрестности (неустойчивого) положения равновесия, в предположении, что в системе имеются основной и комбинационный (сильный или слабый) резонансы третьего порядка. Решается задача о существовании, числе и устойчивости (в линейном приближении) периодических движений системы. В частности, определяются области параметров, для которых в достаточно малой окрестности равновесия имеются устойчивые периодические решения.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим движения неавтономной, 2π -периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, описываемой функцией Гамильтона $H(q_j, p_j, t; \varepsilon)$. Здесь q_j и p_j ($j = 1, 2$) — обобщенные координаты и канонически сопряженные с ними импульсы, t — время, ε — малый параметр ($0 < \varepsilon \ll 1$). Предполагается, что при $\varepsilon = 0$ гамильтониан системы не содержит времени, т. е. система близка к автономной.

Пусть начало координат $q_j = 0$, $p_j = 0$ фазового пространства — положение равновесия рассматриваемой системы, в окрестности которого гамильтониан H аналитичен. Пусть это положение равновесия устойчиво в линейном приближении, и соответствующая линеаризованная система уравнений возмущенного движения имеет чисто мнимые характеристические показатели $\pm i\lambda_j$.

Будем считать, что величины λ_j , $2\lambda_j$ и $\lambda_1 \pm \lambda_2$ не являются целыми числами (в системе нет резонансов первого и второго порядков). Тогда выбором величин q_j и p_j ($j = 1, 2$) можно добиться того, чтобы в окрестности рассматриваемого равновесия гамильтониан представлялся в виде

$$H(q_j, p_j, t; \varepsilon) = \frac{1}{2}\lambda_1(q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}\sigma\lambda_2(q_2^2 + p_2^2) + H_3(q_j, p_j, t; \varepsilon) + H_4(q_j, p_j, t; \varepsilon) + O_5, \quad (1.1)$$

$$H_k(q_j, p_j, t; \varepsilon) = H_k^{(0)}(q_j, p_j) + \varepsilon H_k^{(1)}(q_j, p_j, t) + O(\varepsilon^2) \quad (k = 3, 4),$$

где величина σ принимает значение 1 или -1 , H_k — совокупности слагаемых k -й степени, а O_5 — не менее пятой степени, относительно q_j и p_j ($j = 1, 2$).

Если величины λ_1 и λ_2 таковы, что

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 = l, \quad (1.2)$$

где m_1, m_2, l — целые числа и $|m_1| + |m_2| = 3$, то в системе реализуется резонанс третьего порядка.

Следуя терминологии работ [5, 35] и статьи [31], будем называть резонанс *основным*, если в резонансном соотношении (1.2) присутствует только одна из величин λ_j ($j = 1, 2$), и *комбинационным*, если в (1.2) имеются обе величины λ_1 и λ_2 . Кроме того, назовем резонанс *сильным*, если он может привести к неустойчивости в системе, и *слабым*, если его наличие не приводит к неустойчивости.

В данной работе будем считать, что величины λ_1 и λ_2 задаются одним из наборов (k_1, k_2 — целые числа) [31]

$$\lambda_1 = k_1 + \frac{1}{3}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{5}{6}, \quad \lambda_1 = k_1 + \frac{2}{3}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{1}{6}, \quad (1.3)$$

$$\lambda_1 = k_1 + \frac{1}{3}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{1}{6}, \quad \lambda_1 = k_1 + \frac{2}{3}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{5}{6}. \quad (1.4)$$

Тогда комбинации $3\lambda_1, \lambda_1 + 2\lambda_2$ и $3\lambda_1, \lambda_1 - 2\lambda_2$ в случаях (1.3) и (1.4) соответственно являются целыми, и в системе реализуется двойной (основной и комбинационный) резонанс третьего порядка. Отметим, что в случаях (1.3) и (1.4) целыми являются также величины $2\lambda_1 - 2\lambda_2$ и $2\lambda_1 + 2\lambda_2$ соответственно, что означает наличие комбинационного резонанса четвертого порядка.

Ранее в работе [31] было показано, что для указанных случаев двойного резонанса третьего порядка тривиальное положение равновесия системы неустойчиво при любом соотношении между резонансными коэффициентами. Цель данной работы — решение вопроса о существовании (в ε -окрестности неустойчивого тривиального равновесия системы) периодических движений, их числе и устойчивости (в линейном приближении). В частности, будут найдены условия, при которых в системе имеются устойчивые периодические движения.

Исследование состоит из трех этапов. На первом этапе гамильтониан системы при помощи ряда канонических преобразований будет приведен к виду, главная (модельная) часть которого характерна для рассматриваемых резонансных случаев. Далее будет проведено подробное исследование существования и устойчивости (в линейном приближении) положений равновесия соответствующих модельных систем. Наконец, при помощи метода малого параметра Пуанкаре будут построены периодические (с периодом 12π) решения полной системы и сделаны выводы об их устойчивости (в линейном приближении) или неустойчивости.

§ 2. Преобразование гамильтониана. Модельные гамильтонианы

Осуществим в гамильтониане (1.1) ряд канонических замен переменных, упрощающих его структуру. Сначала рассмотрим автономную часть гамильтониана и сделаем близкую к тождественной замену переменных $q_j, p_j \rightarrow \tilde{q}_j, \tilde{p}_j$ ($j = 1, 2$), уничтожающую форму $H_3^{(0)}(q_j, p_j)$ третьей степени и нормализующую форму $H_4^{(0)}(q_j, p_j)$ четвертой степени. В «полярных» координатах φ_j, r_j , задаваемых формулами $\tilde{q}_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j, \tilde{p}_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j$ ($j = 1, 2$), преобразованный гамильтониан запишется в виде

$$\tilde{H}(\varphi_j, r_j, t) = \lambda_1 r_1 + \sigma \lambda_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \varepsilon \tilde{H}_3^{(1)}(\varphi_j, r_j, t) + \varepsilon \tilde{H}_4^{(1)}(\varphi_j, r_j, t) + O_{5/2}. \quad (2.1)$$

Здесь $O_{5/2}$ — совокупности слагаемых не менее пятой степени относительно $r_j^{1/2}$ ($j = 1, 2$), имеющих по угловым координатам φ_j и времени t период 2π .

Пусть в системе реализуется случай (1.3). При помощи близкой к тождественной 2π -периодичной по времени канонической замены переменных уничтожим в формах $H_k^{(1)}(\varphi_j, r_j, t)$

слагаемые с нерезонансными гармониками и приведем гамильтониан к виду (за переменными оставляем прежние обозначения)

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \lambda_1 r_1 + \sigma \lambda_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \varepsilon \left\{ a r_1^{3/2} \cos[3\varphi_1 - 3\lambda_1 t + 3\varphi_1^*] + \right. \\ & \left. + b r_1^{1/2} r_2 \cos[\varphi_1 + 2\sigma\varphi_2 - (\lambda_1 + 2\lambda_2)t + \varphi_1^* + 2\sigma\varphi_2^*] \right\} + \\ & + \varepsilon d r_1 r_2 \cos[2\varphi_1 - 2\sigma\varphi_2 - (2\lambda_1 + 2\lambda_2)t + 2\varphi_*] + O_{5/2}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $a, b, d, c_{kl}, \varphi_j^*, \varphi_*$ — константы.

Перейдем в ε -окрестность начала координат, делая в (2.2) каноническую замену переменных (с валентностью ε^{-2})

$$r_j = \varepsilon^2 R_j, \quad \varphi_j = \Phi_j, \quad (j = 1, 2).$$

Осуществим затем замену переменных $\Phi_j, R_j \rightarrow \tilde{\Phi}_j, \tilde{R}_j$ ($j = 1, 2$) по формулам

$$\tilde{R}_j = R_j, \quad \tilde{\Phi}_1 = \Phi_1 + \varphi_1^* - \lambda_1 t, \quad \tilde{\Phi}_2 = \Phi_2 + \varphi_2^* - \sigma \lambda_2 t. \quad (2.3)$$

Это унивалентное каноническое преобразование, задаваемое производящей функцией

$$S = (\Phi_1 + \varphi_1^* - \lambda_1 t) \tilde{R}_1 + (\Phi_2 + \varphi_2^* - \sigma \lambda_2 t) \tilde{R}_2.$$

В результате замены (2.3) линейная по R_j ($j = 1, 2$) часть гамильтониана уничтожится, в слагаемых с резонансными гармониками (третьего и четвертого порядка по $R_j^{1/2}$) исчезает время, и гамильтониан (2.2) преобразуется к виду

$$H^* = \varepsilon^2 \left[a \tilde{R}_1^{3/2} \cos 3\tilde{\Phi}_1 + b \tilde{R}_1^{1/2} \tilde{R}_2 \cos(\tilde{\Phi}_1 + 2\sigma\tilde{\Phi}_2) + c_{20} R_1^2 + c_{11} R_1 R_2 + c_{02} R_2^2 \right] + O(\varepsilon^3). \quad (2.4)$$

Слагаемое $O_{5/2}$ в (2.4) аналитично по переменным $\tilde{\Phi}_j, \tilde{R}_j^{1/2}$ ($j = 1, 2$) и t , периодически по $\tilde{\Phi}_j$ с периодом 2π и по t с периодом 12π . Период 12π получен как наименьшее общее кратное чисел 2π и $2\pi/\lambda_j$ ($j = 1, 2$), см. соотношения (2.3), (1.3), (1.4).

Заметим, что коэффициенты c_{11}, a и b в (2.4) можно считать положительными. Действительно, если $c_{11} < 0$, то каноническая замена $\tilde{\Phi}_j \rightarrow -\tilde{\Phi}_j$ (с валентностью -1) меняет знак c_{11} . Далее путем сдвига по угловым переменным можно добиться положительности резонансных коэффициентов a и b .

Сделаем еще одну каноническую замену переменных (с валентностью ξ^{-1}) вида

$$\tilde{R}_j = \xi \hat{R}_j, \quad \tilde{\Phi}_j = \hat{\Phi}_j \quad (j = 1, 2), \quad \xi = \frac{b^2}{c_{11}^2} \quad (2.5)$$

и введем новую независимую переменную τ по формуле $\tau = (\varepsilon^2 b^2 / c_{11}) t$.

Преобразованный гамильтониан принимает вид

$$\hat{\Gamma}_1 = \alpha \hat{R}_1^{3/2} \cos 3\hat{\Phi}_1 + \hat{R}_1^{1/2} \hat{R}_2 \cos(\hat{\Phi}_1 + 2\sigma\hat{\Phi}_2) + \gamma_{20} \hat{R}_1^2 + \hat{R}_1 \hat{R}_2 + \gamma_{02} \hat{R}_2^2 + O(\varepsilon), \quad (2.6)$$

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \gamma_{20} = \frac{c_{20}}{c_{11}}, \quad \gamma_{02} = \frac{c_{02}}{c_{11}}.$$

В случае (1.4) преобразование гамильтониана (2.1) проводится аналогичным образом; в результате получается гамильтониан вида (2.6), в котором надо поменять на противоположный знак при σ .

Полагая в полученных гамильтонианах $\sigma = 1$ и $\sigma = -1$, получим два гамильтониана, характерных для рассматриваемых случаев двойного резонанса третьего порядка (знаки $\hat{}$ над переменными опускаем):

$$\Gamma_1 = \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 + 2\Phi_2) + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2 + O(\varepsilon), \quad (2.7)$$

$$\Gamma_2 = \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 - 2\Phi_2) + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2 + O(\varepsilon). \quad (2.8)$$

Гамильтониан (2.7) отвечает случаю двух сильных (основного и комбинационного) резонансов третьего порядка, а гамильтониан (2.8) — случаю сильного основного и слабого комбинационного резонансов. Эти гамильтонианы зависят от трех параметров α , γ_{20} и γ_{02} . Резонансный коэффициент α в (2.7) и (2.8) считаем положительным, коэффициенты γ_{20} и γ_{02} в членах четвертой степени относительно $R_j^{1/2}$ могут принимать значения любого знака.

§ 3. Положения равновесия модельных систем

Отбрасывая в (2.7) и (2.8) слагаемые $O(\varepsilon)$, получаем приближенные (модельные) гамильтонианы:

$$\Gamma_1 = \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 + 2\Phi_2) + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2, \quad (3.1)$$

$$\Gamma_2 = \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 - 2\Phi_2) + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2. \quad (3.2)$$

Для дальнейшего исследования удобно ввести обозначения

$$\Psi_1 = 3\Phi_1, \quad \Psi_2 = \Phi_1 \pm 2\Phi_2. \quad (3.3)$$

Приближенные системы уравнений, описывающие изменения переменных Ψ_j , R_j ($j = 1, 2$), имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_1}{d\tau} &= \frac{9}{2} \alpha R_1^{1/2} \cos \Psi_1 + \frac{3}{2} \frac{R_2}{R_1^{1/2}} \cos \Psi_2 + 6\gamma_{20} R_1 + 3R_2, \\ \frac{d\Psi_2}{d\tau} &= R_1^{1/2} \left(\frac{3}{2} \alpha \cos \Psi_1 \pm 2 \cos \Psi_2 \right) + \frac{1}{2} \frac{R_2}{R_2^{1/2}} \cos \Psi_2 + 2(\gamma_{20} \pm 1) R_1 + (1 \pm 4\gamma_{02}) R_2, \\ \frac{dR_1}{d\tau} &= R_1^{1/2} (3\alpha R_1 \sin \Psi_1 + R_2 \sin \Psi_2), \\ \frac{dR_2}{d\tau} &= \pm 2R_1^{1/2} R_2 \sin \Psi_2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где верхний и нижний знаки соответствуют гамильтониану (3.1) и (3.2).

Найдем положения равновесия модельных систем. Приравняв нулю правые части систем (3.4), получим, что, кроме (неустойчивого) тривиального положения равновесия, имеются положения равновесия, для которых $R_2 \equiv 0$, а равновесные значения величин Ψ_1 и R_1 описываются соотношениями

$$\sin \Psi_1 = 0, \quad \frac{3}{2} \alpha \delta_1 + 2\gamma_{20} R_1^{1/2} = 0 \quad (\delta_1 = \cos \Psi_1 = \pm 1, \quad \delta_1 \gamma_{20} < 0).$$

Этот случай сводится к системе с одной степенью свободы при наличии резонанса третьего порядка [12, 36], в рамках этой системы указанные положения равновесия устойчивы.

Найдем положения равновесия модельных систем, отличные от описанных. Для обеих систем должны выполняться условия $\sin \Psi_j = 0$, $j = 1, 2$, а равновесные значения величин R_1 и R_2 задаются системой двух алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \alpha R_1^{1/2} \delta_1 + \frac{1}{2} \frac{R_2}{R_1^{1/2}} \delta_2 + 2\gamma_{20} R_1 + R_2 &= 0, \\ \delta_2 R_1^{1/2} + R_1 + 2\gamma_{02} R_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где введены обозначения $\delta_j = \cos \Psi_j$, ($\delta_j = \pm 1, j = 1, 2$).

При помощи второго уравнения системы (3.5) исключаем R_2 из первого уравнения и перепишем систему в виде

$$2(4g - 1)R_1 + 3(2\alpha\delta_1\gamma_{02} - \delta_2)R_1^{1/2} - 1 = 0, \quad g = \gamma_{02}\gamma_{20}, \quad (3.6)$$

$$R_2 = -\frac{\delta_2 + R_1^{1/2}}{\gamma_{02}}. \quad (3.7)$$

Уравнение (3.6) является квадратным относительно $R_1^{1/2}$. Необходимо найти условия, при которых оно имеет неотрицательные вещественные корни. Кроме того, найденные корни должны обеспечивать неотрицательность величины R_2 из (3.7). Последнее условие дает следующие ограничения на параметры задачи и величину R_1 :

$$\begin{aligned} \gamma_{02} > 0, \quad \delta_2 = -1 : \quad R_1 < 1; \\ \gamma_{02} < 0, \quad \delta_2 = 1 : \quad R_1 > 0; \\ \gamma_{02} < 0, \quad \delta_2 = -1 : \quad R_1 > 1. \end{aligned} \tag{3.8}$$

При $\gamma_{02} > 0, \delta_2 = 1$ величина R_2 из (3.7) отрицательна, и неравенство $R_2 > 0$ решения не имеет.

Рассмотрим уравнение (3.6). Его дискриминант имеет вид квадратного трехчлена по α :

$$D = 36\gamma_{02}^2\alpha^2 - 36\delta_1\delta_2\gamma_{02}\alpha + 32g + 1, \tag{3.9}$$

который, в свою очередь, имеет дискриминант, равный

$$D_\alpha = 1152\gamma_{02}^2(1 - 4g).$$

Найдем условия, при которых дискриминант D положителен.

Если $D_\alpha < 0$, т. е. $g > \frac{1}{4}$, то, в силу положительности старшего коэффициента в (3.9), величина D положительна при всех значениях α .

Пусть $D_\alpha \geq 0$, т. е. $g \leq \frac{1}{4}$, тогда квадратный трехчлен D имеет два вещественных корня

$$\alpha_{1,2} = \frac{3\delta_1\delta_2\gamma_{02} \pm 2\sqrt{2\gamma_{02}^2(1 - 4g)}}{6\gamma_{02}^2}, \quad \alpha_1 > \alpha_2.$$

Анализируя расположения этих корней относительно нуля с учетом условия $\alpha > 0$, найдем области значений параметров g, γ_{02} и α , в которых выполнено неравенство $D > 0$. Эти области представлены в таблице 1.

Таблица 1. Решение неравенства $D > 0$

g	γ_{02}	(δ_1, δ_2)	α
$\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$	$\forall \gamma_{02}$	$\forall (\delta_1, \delta_2)$	$\alpha > 0$
$\left(-\frac{1}{32}, \frac{1}{4}\right)$	$\gamma_{02} > 0$	$(-1, 1)$	
		$(1, -1)$	
	$\gamma_{02} < 0$	$(1, 1)$	
		$(-1, -1)$	
$\gamma_{02} > 0$	$(1, 1)$	$0 < \alpha < \alpha_2, \alpha > \alpha_1$	
	$(-1, -1)$		
$\gamma_{02} < 0$	$(-1, 1)$		
	$(1, -1)$		
$\left(-\infty, -\frac{1}{32}\right)$	$\forall \gamma_{02}$	$\forall (\delta_1, \delta_2)$	$\alpha > \alpha_1$

В найденных областях были проверены условия положительности корней $R_1^{1/2}$ уравнения (3.6) и условия (3.8). При этом часть решений была отброшена, а на параметр α в ряде случаев получены дополнительные ограничения.

В пространстве параметров g, γ_{02} и α выявлены области с различным числом (от нуля до двух) действительных положительных решений системы (3.5), удовлетворяющих условиям (3.8); эти области описаны в таблице 2.

Таблица 2. Положения равновесия

g	$\gamma_{02} < 0$	$\gamma_{02} > 0$
$\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$	корень R_{10}^+ : (-1, 1), $\alpha > 0$; (1, 1), $\alpha > 0$; (1, -1), $\alpha > \alpha'$;	корень R_{10}^+ : (1, -1), $\alpha > 0$; (-1, -1), $0 < \alpha < \alpha'$;
$\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$	корень R_{10}^- : (-1, -1), $\alpha > 0$; P_3 : (1, -1), $0 < \alpha < \alpha_1^{pm}$; P_4 : (-1, 1), $\alpha \geq \alpha_2^{mp}$; корень R_{10}^+ : (1, -1), $\alpha' < \alpha < \alpha_1^{pm}$; (-1, 1), $\alpha \geq \alpha_2^{mp}$;	корень R_{10}^+ : (1, -1), $\alpha > 0$; (-1, -1), $0 < \alpha < \alpha'$;
$\left(0, \frac{1}{8}\right)$	корень R_{10}^- : (-1, -1), $\alpha > 0$; P_5 : (1, -1), $0 < \alpha < \alpha'$; P_4 : (-1, 1), $\alpha \geq \alpha_2^{mp}$; корень R_{10}^+ : (-1, 1), $\alpha \geq \alpha_2^{mp}$;	корень R_{10}^+ : (1, -1), $\alpha > 0$; (-1, -1), $0 < \alpha < \alpha_2^{mm}$; корень R_{10}^- : (-1, -1), $\alpha' < \alpha < \alpha_2^{mm}$;
$\left(-\frac{1}{32}, 0\right)$	корень R_{10}^- : (-1, -1), $\alpha > \alpha'$; P_4 : (-1, 1), $\alpha \geq \alpha_2^{mp}$; корень R_{10}^+ : (-1, 1), $\alpha \geq \alpha_2^{mp}$;	корень R_{10}^+ : (1, -1), $\alpha > \alpha'$; (-1, -1), $0 < \alpha < \alpha_2^{mm}$; (1, -1), $0 < \alpha < \alpha'$; корень R_{10}^- : (-1, -1), $0 < \alpha < \alpha_2^{mm}$; P_1 : (1, -1), $0 < \alpha < \alpha'$;
$\left(-\infty, -\frac{1}{32}\right)$	корень R_{10}^- : (-1, -1), $\alpha > \alpha'$; P_4 : (-1, 1), $\alpha \geq \alpha_2^{mp}$; корень R_{10}^+ : (-1, 1), $\alpha \geq \alpha_2^{mp}$;	корень R_{10}^+ : (1, -1), $\alpha > \alpha'$; P_2: (1, -1), $\alpha_1^{pm} < \alpha < \alpha'$; корень R_{10}^- : (1, -1), $\alpha_1^{pm} < \alpha < \alpha'$

Действительная ось значений параметра g разделена на пять интервалов (первый столбец таблицы), ось параметра γ_{02} — на два интервала $\gamma_{02} < 0$ и $\gamma_{02} > 0$ (второй и третий столбцы). Для каждой области изменения параметров g и γ_{02} указаны возможные пары чисел (δ_1, δ_2) и отвечающий им диапазон изменения параметра α , в котором существуют равновесные точки. Для граничных значений α введены обозначения

$$\alpha_j^{pp} = \alpha_j \big|_{\delta_1=1, \delta_2=1}, \quad \alpha_j^{pm} = \alpha_j \big|_{\delta_1=1, \delta_2=-1}, \quad \alpha_j^{mp} = \alpha_j \big|_{\delta_1=-1, \delta_2=1}, \quad \alpha_j^{mm} = \alpha_j \big|_{\delta_1=-1, \delta_2=-1},$$

$$\alpha' = \frac{4}{3} |\gamma_{20}| \quad (j = 1, 2).$$

В ячейках таблицы указаны одно или два соответствующих рассматриваемому случаю равновесных значения $R_1 = R_{10}^\pm$, задаваемых равенствами

$$R_{10}^\pm = \left(\frac{3(2\alpha\delta_1\gamma_{02} - \delta_2) \pm \sqrt{D}}{4(1-4g)} \right)^2, \quad (3.10)$$

где D — дискриминант (3.9). Каждому значению R_{10}^+ или R_{10}^- отвечает единственное равновесное значение $R_2 = R_{20}$, вычисляемое по формуле (3.7).

Для значений параметров, не указанных в таблице 2, положения равновесия рассматриваемого вида отсутствуют.

В следующих разделах будет проведено исследование устойчивости найденных положений равновесия.

§ 4. Достаточные условия устойчивости положений равновесия

Введем возмущения координат и импульсов модельных систем с гамильтонианами (3.1) и (3.2) по формулам

$$\Phi_1 = \Phi_{10} + x_1, \quad \Phi_2 = \Phi_{20} + x_2, \quad R_1 = R_{10} + y_1, \quad R_2 = R_{20} + y_2,$$

причем равновесные значения Φ_{j0} ($j = 1, 2$) вычисляются, с учетом соотношений (3.3), по формулам

$$\Phi_{10} = \frac{\Psi_{10}}{3}, \quad \Phi_{20} = \frac{1}{2} \left(\Psi_{20} - \frac{\Psi_{10}}{3} \right), \quad \Psi_{j0} = \arccos \delta_j.$$

Квадратичная часть гамильтонианов возмущенного движения имеет вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,2}^* = & \left(-\frac{9}{2} R_{10}^{3/2} \delta_1 - \frac{1}{2} R_{10}^{1/2} R_{20} \delta_2 \right) x_1^2 \pm 2 R_{10}^{1/2} R_{20} \delta_2 x_1 x_2 - 2 R_{10}^{1/2} R_{20} \delta_2 x_2^2 + \\ & + \left(\gamma_{02} + \frac{3}{8} \alpha R_{10}^{-1/2} \delta_1 - \frac{1}{8} R_{20} R_{10}^{-3/2} \delta_2 \right) y_1^2 + \left(1 + \frac{1}{2} R_{10}^{-1/2} \delta_2 \right) y_1 y_2 + \gamma_{02} y_2^2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где верхний и нижний знак соответствуют (3.1) и (3.2).

Достаточные условия устойчивости положений равновесия будем рассматривать как условия знакоопределенности квадратичных форм $\Gamma_{1,2}^*$, проверяемые при помощи критерия Сильвестра.

Несложный анализ показывает, что для обеих систем условия положительной определенности форм (4.1) сводятся к соотношениям

$$\gamma_{02} > 0, \quad \delta_1 = \delta_2 = -1,$$

а условия отрицательной определенности — к соотношениям

$$\gamma_{02} < 0, \quad \delta_1 = \delta_2 = 1.$$

В таблице 2 имеются четыре равновесные точки, удовлетворяющие приведенным условиям. Соответствующие им строчки в ячейках второго и третьего столбцах выделены в таблице 2 жирным шрифтом и заключены в двойные рамки.

§ 5. Необходимые условия положений равновесия

Для остальных равновесных точек квадратичные формы $\Gamma_{1,2}^*$ не являются знакоопределенными. Для решения вопроса об их устойчивости рассмотрим характеристическое уравнение линеаризованной системы уравнений возмущенного движения, имеющее вид

$$\lambda^4 + p\lambda^2 + q = 0. \quad (5.1)$$

Если выполнены условия

$$p > 0, \quad q > 0, \quad \mathfrak{D} = p^2 - 4q > 0, \quad (5.2)$$

то корни уравнения (5.1) чисто мнимые, и исследуемое положение равновесия устойчиво в линейном приближении. Неравенства (5.2) составляют необходимые условия устойчивости. Если для рассматриваемого положения равновесия хотя бы одно из этих неравенств выполняется

с противоположным знаком, то характеристическое уравнение имеет корни с положительной вещественной частью, и по теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению данное положение равновесия неустойчиво, причем не только в линейном приближении, но и в полной нелинейной задаче.

Для обоих гамильтонианов коэффициенты уравнения (5.1) имеют вид:

$$p = -\frac{1}{128(4g-1)^3\gamma_{02}^2}(\pm\hat{p}\sqrt{D} + p'), \quad q = \pm 9\alpha\delta_1\delta_2 R_{10}^{3/2} R_{20}\sqrt{D}, \quad (5.3)$$

где D — дискриминант (3.9), верхний и нижний знаки соответствуют верхнему и нижнему знакам величины R_{10}^{\pm} из формулы (3.10).

Величины \hat{p} и p' в выражении для p из (5.3) равны

$$\begin{aligned} \hat{p} = & \pm 648\gamma_{02}^3\delta_1(1+4g)\alpha^3 \mp 36\delta_2\gamma_{02}^2(32\gamma_{02}^2 \pm 16\gamma_{02} + 7 + 124g)\alpha^2 \pm \\ & \pm 6\delta_1\gamma_{02}(320g^2 + 4(64\gamma_{02}^2 \pm 48\gamma_{02} + 49)g \pm 48\gamma_{02} - 3 + 128\gamma_{02}^2)\alpha \mp \\ & \mp \delta_2(64(5 \pm 8\gamma_{02})g^2 + 4(256\gamma_{02}^2 \pm 112\gamma_{02} - 3)g + 1 + 32\gamma_{02}^2); \\ p' = & -7776\gamma_{02}^4(1+4g)\alpha^4 + 6912\delta_2\gamma_{02}^3\delta_1(2\gamma_{02}^2 \pm \gamma_{02} + 10g + 1)\alpha^3 - \\ & - 144\gamma_{02}^2(256g^2 + 4(32\gamma_{02}^2 \pm 24\gamma_{02} + 71)g \pm 48\gamma_{02} + 112\gamma_{02}^2 + 3)\alpha^2 + \\ & + 192\delta_1\delta_2\gamma_{02}(8(21 \pm 4\gamma_{02})g^2 + 4(3 \pm 20\gamma_{02} + 36\gamma_{02}^2)g + \gamma_{02}(18\gamma_{02} \pm 5))\alpha - \\ & - 3072g^3 - 1024(1 \pm \gamma_{02})(1 \pm 8\gamma_{02})g^2 + 8(1 - 640\gamma_{02}^2 \mp 144\gamma_{02})g + 2 + 64\gamma_{02}^2, \end{aligned}$$

причем верхний и нижний знак соответствует гамильтонианам Γ_1^* и Γ_2^* из (4.1).

Все полученные выше достаточные условия устойчивости положений равновесия являются также и необходимыми условиями. Найдем случаи, когда выполнены только необходимые условия устойчивости, а также условия неустойчивости.

Условию $q > 0$ соответствуют пять положений равновесия, обозначим их через P_i ($i = 1, \dots, 5$); в таблице 2 соответствующие им строчки заключены в рамки. Ниже для каждой равновесной точки P_i ($i = 1, \dots, 5$) будут проанализированы первое и третье условия из (5.3).

Распределение точек P_i ($i = 1, \dots, 5$) в плоскости параметров g и γ_{02} показано на рисунке 1. Для каждой точки условие $q > 0$ реализуется для значений параметра α , указанных в таблице 2.

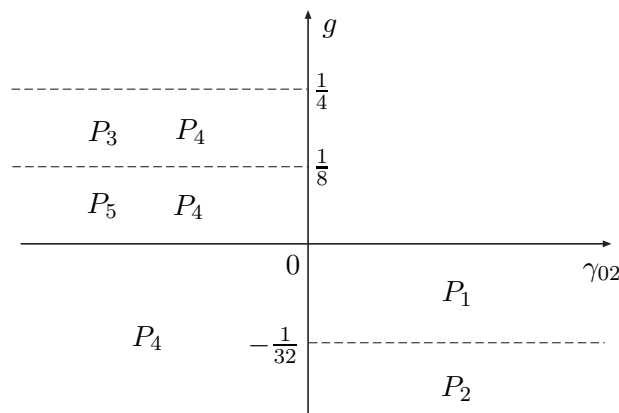


Рис. 1. Расположение положений равновесия, удовлетворяющих условию $q > 0$

Для остальных положений равновесия (не заключенных в рамки и не выделенных жирным шрифтом в таблице 2) выполняется условие $q < 0$, и имеет место неустойчивость.

Отметим, что сделанные выводы верны для гамильтонианов обоих типов, так как свободный член q в характеристическом уравнении для них одинаков.

5.1. Необходимые условия устойчивости равновесных точек P_i ($i = 1, \dots, 5$). Продолжим исследование устойчивости точек P_i ($i = 1, \dots, 5$). Будем проводить его по следующей схеме. Сначала в трехмерном пространстве параметров ищем случаи пересечения поверхностей $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ с верхней и нижней границами $\alpha = \alpha(\gamma_{02}, g)$, определенными в таблице 2. Из последующего анализа следует, что указанные пересечения имеются только на тех границах, на которых выполнено равенство $q = 0$, а значит, на них условия $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ выполняются одновременно. Геометрическое место точек пересечения строим в виде кривых в плоскости параметров γ_{02}, g . Выделяем качественно различные случаи, для каждого из них рассматриваем сечения пространства параметров плоскостями $g = \text{const}$. В сечениях, в плоскости параметров γ_{02}, α , численно и аналитически строим граничные кривые исследуемой области, а также кривые $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$. Эти кривые разбивают область на несколько подобластей, в каждой из которых знаки величин p и \mathfrak{D} сохраняются. В подобластях, для которых выполнены условия $p > 0$ и $\mathfrak{D} > 0$, исследуемые равновесные точки устойчивы в линейном приближении, в остальных подобластях неустойчивы.

Точки P_1 . Для точек P_1 систем первого и второго типа пересечений поверхностей $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ с верхней границей $\alpha = \alpha'$ исследуемой области нет. Геометрическое место точек пересечения поверхностей $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ с границей $\alpha = 0$ совпадают и представляют собой кривые, показанные на рис. 2, а и рис. 3, а для систем первого и второго типов соответственно. На рисунке 2, а выделены точки $A(0, 0)$, $B((-5 + 3\sqrt{3})/32, (4 - 3\sqrt{3})/64)$, $C(0, -1/36)$, а отмеченные на рисунке 3, а точки таковы: $A(0, -1/36)$, $B(1/16, -1/32)$, $C(1/4, 0)$, $D(1/6, -1/36)$.

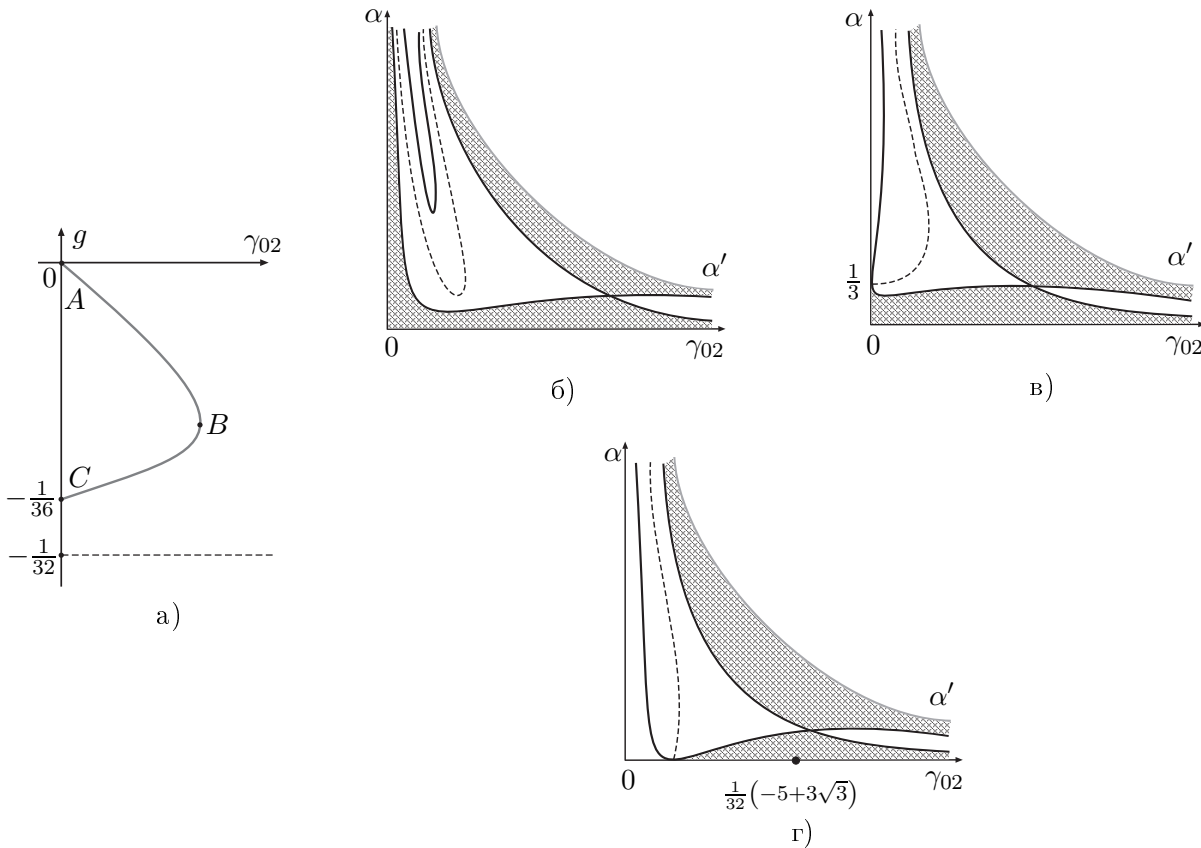


Рис. 2. Точка P_1 системы первого типа.

Для системы первого типа рассматриваем качественно различные случаи $g \in (-1/32, -1/36)$, $g = -1/36$ и $g \in (-1/36, 0)$. Характерный вид исследуемых сечений $g = \text{const}$ представлен на рисунках 2, б-г соответственно. Здесь и на последующих аналогичных рисунках тонкими лини-

ями показаны граничные кривые исследуемой области, пунктирной линией — кривые $p = 0$ и полуэллиптической линией — кривые $\mathfrak{D} = 0$. Отметим, что, как показывают расчеты в этом и во всех последующих случаях, кривые $p = 0$ всегда лежат в области, где $\mathfrak{D} < 0$ (в области неустойчивости). Области, в которых выполнены необходимые условия устойчивости, на рисунках заштрихованы.

На рисунках 2, б–г во всех сечениях имеется одна ветвь кривой $p = 0$ и три ветви кривой $\mathfrak{D} = 0$ (с одной точкой самопересечения). Вместе с верхней граничной кривой изображенные кривые неограниченно, при $\gamma_{02} \rightarrow 0$ и $\gamma_{02} \rightarrow \infty$, приближаются к осям координат.

В точке $g = -1/36$ характер картины скачкообразно меняется. На рис. 2, в две ветви кривой $\mathfrak{D} = 0$ и кривая $p = 0$ имеют общую точку $(0, 1/3)$ на оси ординат. Для меньших значений параметра g общая точка кривых исчезает, и они асимптотически стремятся к оси ординат (рис. 2, б). Для больших значений g (в сколь угодно малой окрестности значения $g = -1/36$) общая точка кривых перескакивает на ось γ_{02} (рис. 2, г). Этот факт подтверждается аналитически: в окрестности точки $\gamma_{02} = 0, g = -1/36, \alpha = 1/3$ соотношения $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ могут быть разрешены относительно параметра α и представлены в виде $\alpha = \alpha_p(\gamma_{02}, g)$ и $\alpha = \alpha_{\mathfrak{D}}(\gamma_{02}, g)$ соответственно, где

$$\alpha_p = -\frac{36g + 1}{\gamma_{02}f(\gamma_{02})} + F(\gamma_{02}, g), \quad \alpha_{\mathfrak{D}} = \frac{(36g + 1)^2}{\gamma_{02}\hat{f}(\gamma_{02})} + \hat{F}(\gamma_{02}, g). \tag{5.4}$$

При этом $f(0) \neq 0, \hat{f}(0) \neq 0, F(-1/36, 0) = \hat{F}(-1/36, 0) = 1/3$.

Из полученных разложений (5.4) следует, что при $g \rightarrow -1/36 - 0$ имеем $\alpha_p \rightarrow +\infty$, при $g \rightarrow -1/36 + 0$ имеем $\alpha_p \rightarrow -\infty$ (эта часть ветви $p = 0$ выходит за пределы исследуемой области и не показана на рис. 2, г), а при $g = -1/36$ получаем $\alpha_p = 1/3$. Эти же результаты относятся и к кривой $\alpha = \alpha_{\mathfrak{D}}(\gamma_{02}, g)$.

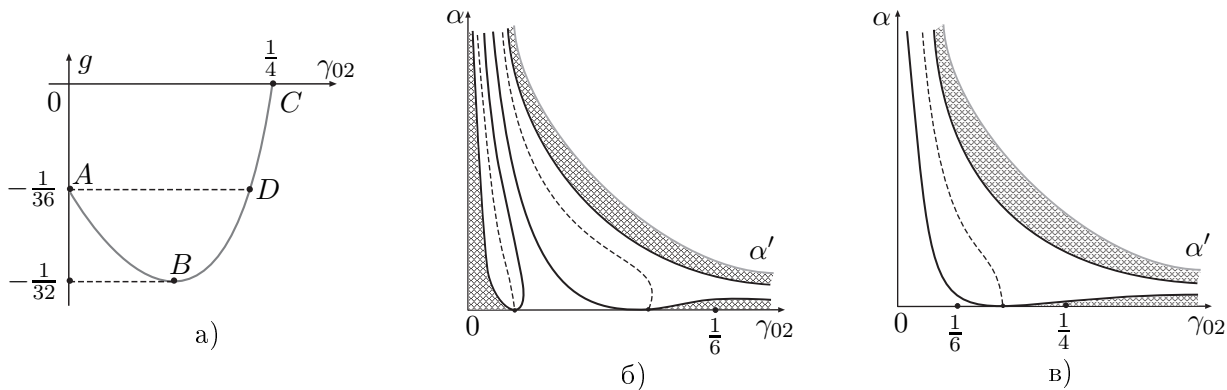


Рис. 3. Точка P_1 системы второго типа

При дальнейшем увеличении параметра g (рис. 2, г) общая точка кривых $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ скользит по оси абсцисс в сторону увеличения координаты γ_{02} . Дойдя до максимального значения $\gamma_{02} = (-5 + 3\sqrt{3})/32$, она движется в сторону уменьшения γ_{02} до нуля (см. рис. 2, а).

Во всех рассмотренных сечениях имеются две области устойчивости в линейном приближении равновесной точки P_1 для системы первого типа.

Для исследования устойчивости равновесной точки P_1 системы второго типа интервал изменения параметра g разобьем на те же подынтервалы.

При $g \in (-1/32, -1/36)$ кривые $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ имеют две общие точки на оси абсцисс, скользят по ней в разные стороны с ростом g . При этом в допустимой части плоскости параметров имеются три области устойчивости в линейном приближении (рис. 3, б). При $g = -1/36$ левая группа кривых вырождается в ось ординат и при переходе через эту точку исчезает. Одновременно с этим пропадает левая область устойчивости.

Для значений g из интервала $g \in (-1/36, 0)$ (рис. 3, в) общая точка кривых $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ на нижней границе $\alpha = 0$ скользит по оси абсцисс в сторону увеличения γ_{02} , доходя до максимального значения $\gamma_{02} = 1/4$ при $g = 0$.

Точки P_2 . Как и для точек P_1 , для значений параметров, соответствующих равновесным точкам P_2 систем обоих типов, поверхности $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ не имеют пересечений с верхней граничной поверхностью $\alpha = \alpha'$ исследуемой области. На нижней границе $\alpha = \alpha_1^{pm}$ условия $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ реализуются (одновременно) для точек, геометрическое место которых в плоскости параметров (γ_{02}, g) изображено на рис. 4, а и рис. 5, а для систем первого и второго типов соответственно. На рис. 4, а имеем характерные точки $A(0, -7/100)$, $B(0.0129, -0.1373)$, $C(0, -1/4)$, а на рис. 5, а — точки $A(0, -7/100)$, $B(1/16, -1/32)$, $C(1/10, -7/100)$, $D(0, -1/4)$. Качественно различными для систем обоих типов являются случаи $g \in (-\infty, -1/4)$, $g = -1/4$, $g \in (-1/4, -7/100)$, $g = -7/100$ и $g \in (-7/100, -1/32)$.

Характерный вид сечений $g = \text{const}$ исследуемой части пространства параметров для точки P_2 системы первого типа показан на рис. 4, б-д. Для всех значений параметра g ($g < -1/32$) имеются две подобласти выполнения необходимых условий устойчивости. Эволюция этих под областей и подобластей неустойчивости соответствует рис. 4, а.

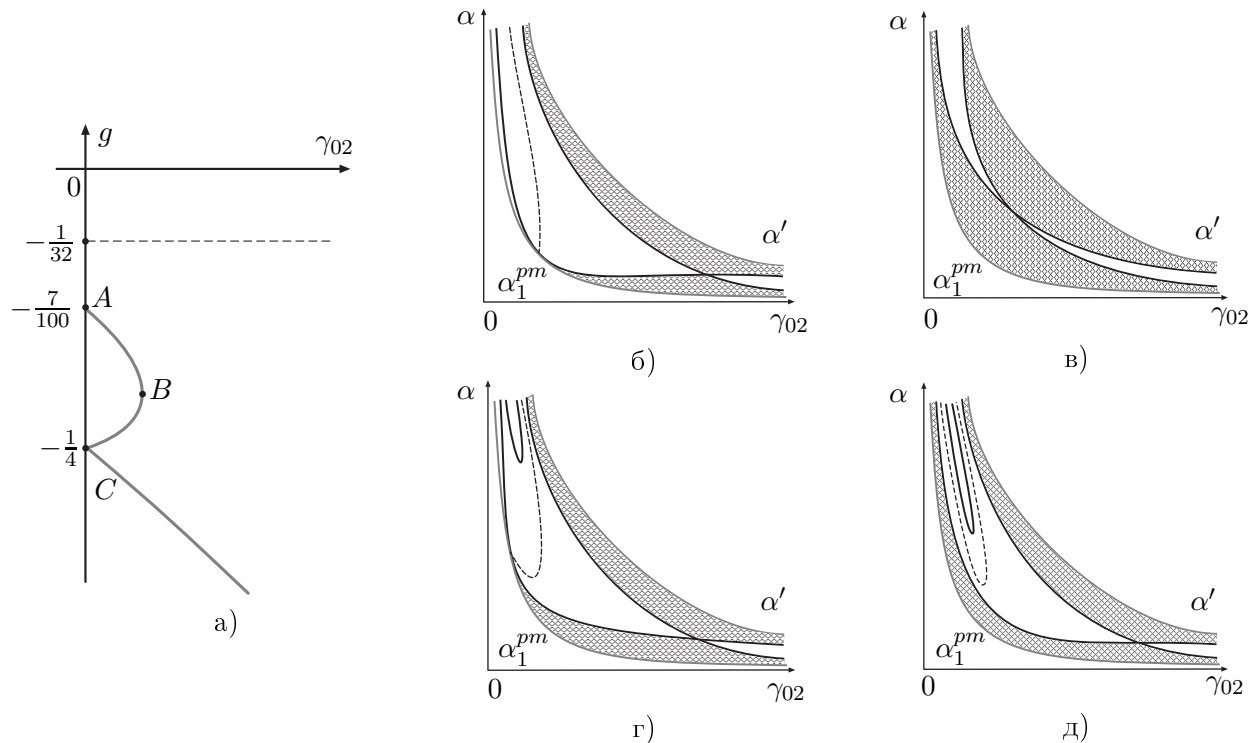


Рис. 4. Точка P_2 системы первого типа

При $g \in (-\infty, -1/4)$ и $g \in (-1/4, -7/100)$ кривые $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ имеют одну общую точку на нижней границе области (рис. 4, б). Для граничной точки $g = -1/4$ этих двух интервалов ордината общей точки кривых $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ неограниченно возрастает, и кривая $p = 0$ исчезает (рис. 4, в).

Внутри интервала $g \in (-1/4, -7/100)$ при увеличении параметра g картина меняется: кривая $p = 0$ приобретает изгиб и одновременно возникает еще одна ветвь кривой $\mathfrak{D} = 0$ (рис. 4, г). При подходе к граничному значению $g = -7/100$ общая точка кривых $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ на нижней границе области снова уходит на бесконечность, и при $g \in [-7/100, -1/32)$ общих точек у кривых нет; характерный вид сечений для значений g из этого интервала показан на рис. 4, д.

Для точки P_2 системы второго типа случаи $g \in (-\infty, -1/4)$, $g = -1/4$, $g \in (-1/4, -7/100)$, $g = -7/100$ и $g \in (-7/100, -1/32)$ соответствуют рис. 5, б-е.

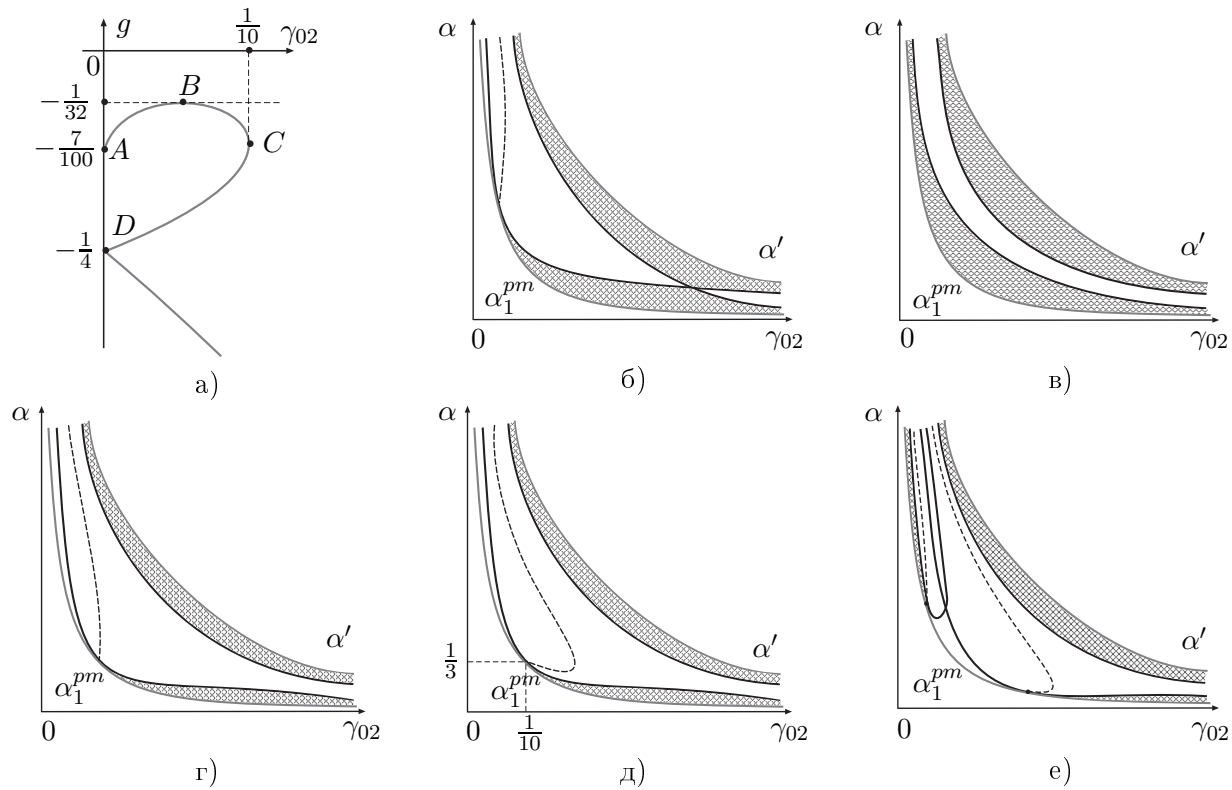


Рис. 5. Точка P_2 системы второго типа

Качественный вид сечений для интервала $g \in (-\infty, -1/4)$ такой же, как для системы первого типа (ср. с рис. 4, б); в сечениях имеются две области выполнения необходимых условий устойчивости. С ростом g ординаты точек пересечения кривых $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ и самопересечения двух ветвей кривой $\mathfrak{D} = 0$ растут и при $g = -1/4$ становятся неограниченными, при этом кривая $p = 0$ пропадает (см. рис. 5, в). Далее, при $g \in [-1/4, -7/100]$ (рис. 5, в-д), ветви кривой $\mathfrak{D} = 0$ не имеют точек самопересечения.

При переходе через точку $g = -1/4$ на нижней границе области кривые $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ вновь имеют общую точку, абсцисса которой растет с увеличением g и достигает максимального значения $\gamma_{02} = 0.1$ при $g = -7/100$ (рис. 5, з, д). Для значений g из интервала $(-7/100, -1/32)$ появляются еще одна ветвь кривой $\mathfrak{D} = 0$ (пересекающаяся с уже имеющейся ранее ветвью $\mathfrak{D} = 0$) и вторая ветвь кривой $p = 0$. Эти новые кривые выходят из общей точки нижней границы области (рис. 5, е), вместе с их появлением в сечении возникает третья область устойчивости.

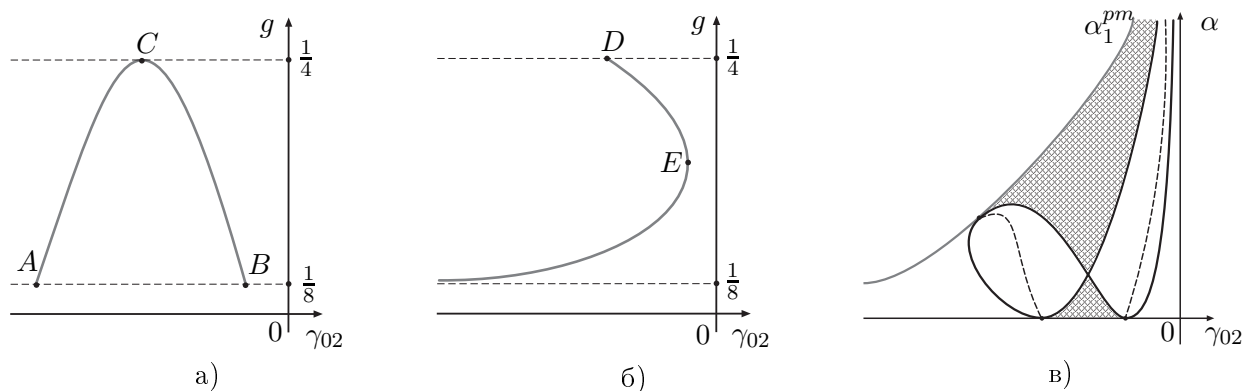


Рис. 6. Точка P_3 первого типа

Точки P_3 . Для равновесной точки P_3 системы первого типа геометрические места (общих) точек пересечения поверхностей $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ с нижней и верхней граничными

ми поверхностями $\alpha = 0$ и $\alpha = \alpha_1^{pm}$ показаны на рис. 6, а и 6, б соответственно. Отмеченные на этих рисунках точки имеют координаты $A \left(-(1 + \sqrt{5} + \sqrt{-10 + 6\sqrt{5}})/16, 1/8 \right)$, $B \left(-(1 + \sqrt{5} - \sqrt{-10 + 6\sqrt{5}})/16, 1/8 \right)$, $C(-1/4, 1/4)$, $D(-1, 1/4)$, $E(-0.8119, 0.1922)$. Характерный вид исследуемых сечений на всем интервале $g \in (1/8, 1/4)$ существования точек P_3 качественно не меняется и имеет вид, представленный на рис. 6, в; в каждом сечении имеются две области выполнения необходимых условий устойчивости.

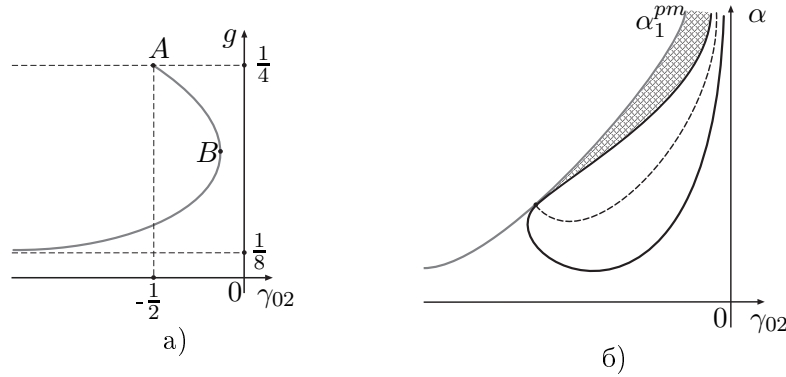


Рис. 7. Точка P_3 второго типа

Для системы второго типа поверхности $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ имеют (общие) точки пересечения только с верхней граничной поверхностью, геометрическое место которых показано на рис. 7, а, координаты точек A и B таковы: $A = (-1/2, 1/4)$, $B = (-0.4618, 0.2218)$. В исследуемых сечениях имеется одна область устойчивости (рис. 7, б).

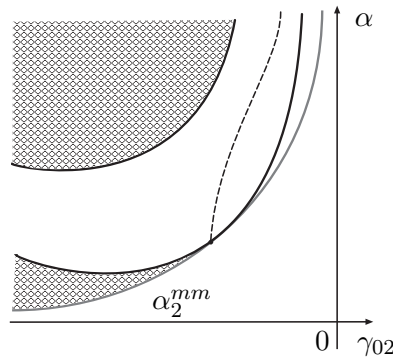


Рис. 8. Характерный вид графиков при фиксированном g точки P_4 первого и второго типа

Точки P_4 . Для системы первого типа характерный вид сечений $g = \text{const}$ на интервале $g \in (-\infty, -1/4)$ представлен на рис. 8; имеются две области выполнения необходимых условий устойчивости. При переходе через точку $g = -1/4$ и далее на интервале $g \in (-1/4, 1/4)$ верхняя ветвь кривой $\mathfrak{D} = 0$ исчезает вместе с верхней областью устойчивости (этот случай на рис. 8 не показан). С ростом g абсцисса общей точки кривых $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ на нижней границе рассматриваемой области растет, ее максимальное значение (при $g = 1/4$) равно -1 .

Для системы второго типа характерные сечения качественно такие же, как и для системы первого типа. Максимальное значение абсциссы общей точки кривых $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ на нижней границе области равно $-1/2$.

Точки P_5 . Для точки P_5 системы первого типа поверхности $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ имеют общие точки пересечения с нижней граничной плоскостью $\alpha = 0$, а в исследуемых сечениях — две общие точки на оси абсцисс; при этом в сечении имеются две области выполнения необходимых условий устойчивости (рис. 9, а).

Для точки P_5 системы второго типа поверхности $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ не пересекаются с граничными поверхностями; в сечениях, характерный вид которых представлен на рис. 9, б, имеется одна область устойчивости.

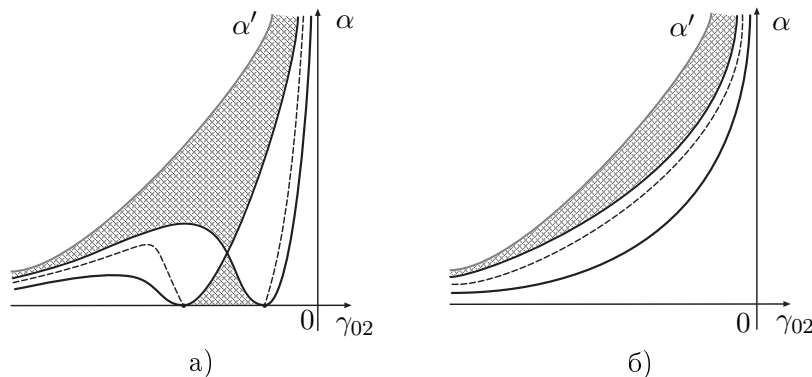


Рис. 9. Характерный вид графиков при фиксированном g точки P_5 первого и второго типа

Граничные значения параметра g . Рассмотрим три значения параметра g , лежащие на границах исследуемых интервалов.

В случае $g = 1/4$ уравнение (3.6) становится линейным относительно $R_1^{1/2}$ и имеет единственное решение

$$\hat{R}_1^{1/2} = \frac{1}{3}(2\alpha\delta_1\gamma_{02} - \delta_2)^{-1}. \quad (5.5)$$

Условия положительности величин \hat{R}_j ($j = 1, 2$) налагают следующие ограничения на параметры задачи:

$$\gamma_{02} > 0, \quad \delta_1 = 1, \quad \delta_2 = -1, \quad \alpha > 0; \quad (5.6)$$

$$\gamma_{02} > 0, \quad \delta_1 = -1, \quad \delta_2 = -1, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{3\gamma_{02}}; \quad (5.7)$$

$$\gamma_{02} < 0, \quad \delta_1 = -1, \quad \delta_2 = 1, \quad \alpha > -\frac{1}{2\gamma_{02}}; \quad (5.8)$$

$$\gamma_{02} < 0, \quad \delta_1 = 1, \quad \delta_2 = -1, \quad -\frac{1}{3\gamma_{02}} < \alpha < -\frac{1}{2\gamma_{02}}. \quad (5.9)$$

В каждом из этих случаев у систем обоих типов имеется единственное положение равновесия.

Исследуя квадратичные формы гамильтонианов возмущенного движения, найдем, что достаточные условия устойчивости сводятся к соотношениям $\gamma_{02} > 0$, $\delta_1 = \delta_2 = -1$, $\alpha < 1/(2\gamma_{02})$, которым удовлетворяет случай (5.7).

Для оставшихся положений равновесия исследуем необходимые условия устойчивости. Для обеих систем свободный член соответствующего характеристического уравнения (5.1) вычисляется по формуле

$$q = 27\alpha\hat{R}_1^{3/2}\hat{R}_2(2\delta_1\alpha\gamma_{02} - \delta_2)\delta_1\delta_2.$$

Отсюда следует, что для параметров задачи, удовлетворяющих условиям (5.6), (5.8), (5.9), справедливо соотношение $q < 0$, поэтому соответствующие положения равновесия неустойчивы.

В случае $g = 1/8$ границы $\alpha_1^{pm} |_{g=1/8} = \alpha' |_{g=1/8} = \alpha_2^{mm} |_{g=1/8}$ совпадают, обозначим их через α^* . В области, задаваемой условиями

$$\gamma_{02} > 0, \quad 0 < \alpha < \alpha^* \quad (\delta_1 = \delta_2 = -1),$$

имеется одно положение равновесия, для которого выполняются достаточные условия устойчивости (см. таблицу 2).

При исследовании необходимых условий устойчивости заметим, что для обоих гамильтонианов значение $g = 1/8$ является граничным между точками P_3 и P_5 (см. таблицу 2). Как следует из рис. 6, б и 7, а, при $g \rightarrow 1/8$ общая точка кривых $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ на верхней границе уходит в область неограниченных отрицательных значений γ_{02} , при этом для системы первого типа рис. 6, в переходит в рис. 9, а, а для системы второго типа рис. 7, б переходит в рис. 9, б. Области необходимых условий устойчивости и неустойчивости для рассматриваемой равновесной точки иллюстрируют рис. 9, а, б.

Значение $g = 1/8$ лежит также внутри области существования равновесной точки P_4 ; соответствующее сечение имеет вид, показанный на рис. 8.

В случае $g = -1/32$ на границах имеем: $\alpha_1^{pm} |_{g=-1/32} = \alpha_2^{mm} |_{g=-1/32} = 0$. Согласно таблице 2, часть положений равновесия, для которых эти значения являются верхними границами изменения α , пропадают. В частности, для рассматриваемого случая нет положений равновесия, для которых выполняются достаточные условия устойчивости.

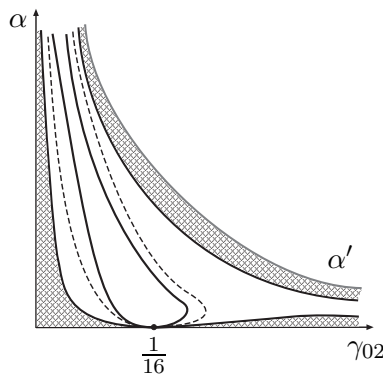


Рис. 10. Характерный вид сечения точки $P_{1,2}$ для гамильтонианов Γ_2

Исследуем необходимые условия устойчивости. Значение $g = -1/32$ является граничным между равновесными точками P_1 и P_2 (см. таблицу 2). Нижняя граница исследуемой области в этом сечении совпадает с осью абсцисс. Для системы первого типа качественный вид сечения, отвечающий данному случаю, имеет вид как на рис. 2, б. Для системы второго типа, в соответствии с рис. 3, а и 5, а, кривые $p = 0$ и $\mathfrak{D} = 0$ имеют на нижней границе $\alpha = 0$ одну общую точку с абсциссой $\gamma_{02} = 1/16$ (см. рис. 10).

Значение $g = -1/32$ содержится также внутри области существования равновесной точки P_4 , вид соответствующего сечения представлен на рис. 8.

§ 6. Периодические движения

Пусть $\Psi_j = \Psi_{j0} = \arccos \delta_j$, $R_j = R_{j0}$ ($j = 1, 2$) — одно из рассмотренных положений равновесия системы (3.4). Величина R_{10} вычисляется по формуле (3.10) (или (5.5)), а величина R_{20} связана с R_{10} соотношением (3.7). Гамильтоновым системам с модельными гамильтонианами (3.1), (3.2) указанному положению равновесия отвечает положение равновесия $\Phi_j = \Phi_{j0}$, $R_j = R_{j0}$ ($j = 1, 2$), где, согласно (3.3),

$$\Phi_{10} = \frac{\Psi_{10}}{3}, \quad \Phi_{20} = \pm \left(\frac{\Psi_{20}}{2} - \frac{\Psi_{10}}{6} \right).$$

Рассмотрим полные системы с гамильтонианами (2.7), (2.8). В окрестности описанных положений равновесия приближенной (модельной) системы полную систему можно рассматривать как квазилинейную с возмущениями порядка ϵ , имеющими по τ период $T \sim \epsilon^2$. При этом корни характеристических уравнений линеаризованных уравнений возмущенного движения модельных систем имеют порядок единицы, а частоты возмущений — порядок ϵ^{-2} . Таким образом,

имеет место нерезонансный случай теории Пуанкаре в задаче о периодических решениях квазилинейных систем [34], и из каждого положения равновесия модельной системы рождается единственное, T -периодическое по τ , аналитическое по ε решение соответствующей полной системы с гамильтонианом (2.7) или (2.8), имеющее вид

$$\Phi_j = \tilde{\Phi}_j(\tau) = \Phi_{j0} + O(\varepsilon), \quad R_j = \tilde{R}_j(\tau) = R_{j0} + O(\varepsilon) \quad (j = 1, 2).$$

Проводя в обратной последовательности замены переменных, описанные в §§ 1 и 2, найдем отвечающее ему периодическое движение системы с исходным гамильтонианом (1.1), аналитическое по ε и имеющее по t период, равный 12π . Это движение имеет вид (константа ξ определена в (2.5))

$$\begin{aligned} q_j &= \varepsilon\sqrt{2\xi R_{j0}} \sin \varphi_j + O(\varepsilon^2), & p_j &= \varepsilon\sqrt{2\xi R_{j0}} \cos \varphi_j + O(\varepsilon^2) \quad (j = 1, 2), \\ \varphi_1 &= \lambda_1 t + \Phi_{10} - \varphi_1^*, & \varphi_2 &= \sigma\lambda_2 t + \Phi_{20} - \varphi_2^*. \end{aligned} \quad (6.1)$$

В соотношениях (6.1) явно выписаны главные (порядка ε) части периодических движений, каждая из которых содержит только «свои» гармоники (синусы и косинусы) величин $\lambda_j t$. В то же время слагаемые $O(\varepsilon^2)$ в выражениях для q_j, p_j содержат, вообще говоря, любые гармоники величин $nt, n_1\lambda_1 t, n_2\lambda_2 t$ (n, n_1, n_2 — целые числа).

Неустойчивые положения равновесия модельных систем переходят в неустойчивые периодические движения полных систем. Положения равновесия, рассмотренные для значений параметров из областей выполнения достаточных или только необходимых условий устойчивости, переходят в периодические движения полных систем, устойчивые в линейном приближении. Эти утверждения следуют из свойства непрерывности по ε характеристических показателей соответствующих линеаризованных уравнений возмущенного движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Korteweg D.J. Sur certaines vibrations d'ordre supérieur et d'intensité anormale, vibrations de relation, dans les me Uchanismes'a plusieurs degres de liberté // Archives Neerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles. 1898. Ser. 2. Tom. 1. P. 229–260.
2. Beth H.I.E. Les oscillations autour d'une position d'équilibre dans le cas d'existence d'une relation linéaire simple entre les nombres vibratoires // Archives Neerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles. 1911. Ser. 2. Tom. 15. P. 246–283.
3. Beth H.I.E. Les oscillations autour d'une position d'équilibre dans le cas d'existence d'une relation linéaire simple entre les nombres vibratoires (suite) // Archives Neerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles. 1912. Ser. 3A. Tom. 1. P. 185–213.
4. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
5. Куницын А.Л., Маркеев А.П. Устойчивость в резонансных случаях // Итоги науки и техники. Серия «Общая механика». 1979. Т. 4. С. 58–139.
6. Маркеев А.П. Устойчивость гамильтоновых систем // Нелинейная механика. М.: Физматлит, 2001. С. 114–130.
7. Холостова О.В. О движении гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе в вынужденных колебаниях // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1996. № 3. С. 167–175.
8. Маркеев А.П. О поведении нелинейной гамильтоновой системы с одной степенью свободы на границе области параметрического резонанса // Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 569–580.
9. Маркеев А.П. Параметрический резонанс и нелинейные колебания тяжелого твердого тела в окрестности его плоских вращений // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1995. № 5. С. 34–44.
10. Холостова О.В. Параметрический резонанс резонанс в задаче о нелинейных колебаниях спутника на эллиптической орбите // Космические исследования. 1996. Т. 34. Вып. 3. С. 312–316.
11. Маркеев А.П. Резонанс третьего порядка в гамильтоновой системе с одной степенью свободы // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 37–48.
12. Холостова О.В. О нелинейных колебаниях спутника при резонансе третьего порядка // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 556–565.

13. Маркеев А.П. О критическом случае резонанса четвертого порядка в гамильтоновой системе с одной степенью свободы // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 369–376.
14. Холостова О.В. О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе четвертого порядка // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 957–967.
15. Холостова О.В. О бифуркациях и устойчивости резонансных периодических движений гамильтоновых систем с одной степенью свободы при вырождении гамильтониана // Нелинейная динамика. 2006. Т. 2. № 1. С. 87–108. DOI: [10.20537/nd0601005](https://doi.org/10.20537/nd0601005)
16. Холостова О.В. О резонансных периодических движениях гамильтоновых систем с одной степенью свободы при вырождении гамильтониана // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 4. С. 568–580.
17. Холостова О.В. О движении близкой к гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе в вынужденных колебаниях // Прикладная математика и механика. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 405–412.
18. Холостова О.В. О движении близкой к гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе четвертого порядка // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1999. № 4. С. 25–30.
19. Холостова О.В. О периодических движениях неавтономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при параметрическом резонансе основного типа // Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66. Вып. 4. С. 539–550.
20. Куницын А.Л. Об устойчивости в критическом случае чисто мнимых корней при внутреннем резонансе // Дифференциальные уравнения. 1971. Т. 7. № 9. С. 1704–1706.
21. Хазина Г.Г. Некоторые вопросы устойчивости при наличии резонансов // Прикладная математика и механика. 1974. Т. 38. Вып. 1. С. 56–65.
22. Куницын А.Л., Медведев С.В. Об устойчивости при наличии нескольких резонансов // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. Вып. 3. С. 422–429.
23. Куницын А.Л., Ташимов Л.Т. Некоторые задачи устойчивости нелинейных резонансных систем. Алма-Ата: Гылым, 1990. 196 с.
24. Хазин Л.Г. Об устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем дифференциальных уравнений (Взаимодействие резонансов третьего порядка). Институт прикладной математики АН СССР. Препринт № 133. М., 1981. 20 с.
25. Хазин Л.Г. Взаимодействие резонансов третьего порядка в задачах устойчивости гамильтоновых систем // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 494–498.
26. Маркеев А.П. О кратном резонансе в линейных системах Гамильтона // Доклады Российской Академии Наук. 2005. Т. 402. № 3. С. 339–343.
27. Маркеев А.П. О кратном параметрическом резонансе в системах Гамильтона // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 2. С. 200–220.
28. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2009. 396 с.
29. Маркеев А.П. Об одном особом случае параметрического резонанса в задачах небесной механики // Письма в Астрономический журнал. 2005. Т. 31. № 5. С. 388–394.
30. Маркеев А.П. Кратный резонанс в одной задаче об устойчивости движения спутника относительно центра масс // Письма в Астрономический журнал. 2005. Т. 31. № 9. С. 701–708.
31. Холостова О.В. О движениях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при наличии кратных резонансов третьего порядка // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 2. С. 267–288. DOI: [10.20537/nd1202005](https://doi.org/10.20537/nd1202005)
32. Холостова О.В. О взаимодействии резонансов третьего и четвертого порядков в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 4. С. 671–683. DOI: [10.20537/nd1504004](https://doi.org/10.20537/nd1504004)
33. Kholostova O. Stability of triangular libration points in a planar restricted elliptic three body problem in cases of double resonances // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2015. Vol 73. P. 64–68. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.005](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.005)
34. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 492 с.
35. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
36. Холостова О.В. Исследование нелинейных колебаний гамильтоновых систем с одной степенью свободы при резонансах. Учебное пособие. М.: Изд-во МАИ, 2011. 96 с.

Поступила в редакцию 20.08.2016

Сафонов Алексей Игоревич, аспирант, кафедры теоретической механики, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4.

E-mail: lexafonov@mail.ru

Холостова Ольга Владимировна, д. ф.-м. н., профессор, кафедры теоретической механики, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4.

E-mail: kholostova_o@mail.ru

A. I. Safonov, O. V. Kholostova

On the periodic motions of a Hamiltonian system in the neighborhood of unstable equilibrium in the presence of a double three-order resonance

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, no. 3, pp. 418–438 (in Russian).

Keywords: Hamiltonian system, multiple resonance, stability, periodic motion.

MSC2010: 70H05, 70H14, 70H15, 70K45

DOI: [10.20537/vm160310](https://doi.org/10.20537/vm160310)

The paper considers the motion of a near-autonomous time-periodic two-degree-of-freedom Hamiltonian system in a neighborhood of trivial equilibrium being stable in the linear approximation. The third-order double resonance (fundamental and Raman) is assumed to occur in the system, at that Raman resonance can be strong or weak. In both cases the equilibrium considered is unstable in a full nonlinear system. Normalization of Hamiltonians of the perturbed motion is carried out in the terms up to the fourth order with respect to disturbance, taking into account the existing resonances. The problem of the existence and number of equilibrium positions of the corresponding approximate (model) systems is solved, and sufficient and necessary conditions for their stability are obtained. By Poincaré's small parameter method, periodic motions of the initial full systems generated from the equilibrium positions of the model systems are constructed. The question of their stability in the linear approximation is solved. In particular, the conditions of the existence of stable (in the linear approximation) periodic motions in a small neighborhood of the unstable trivial equilibrium are obtained.

REFERENCES

1. Korteweg D.J. Sur certaines vibrations d'ordre supérieur et d'intensité anormale, vibrations de relation, dans les me Uchanismes'a plusieurs degres de liberté, *Archives Neerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles*, 1898, ser. 2, tom. 1, pp. 229–260.
2. Beth H.I.E. Les oscillations autour d'une position d'équilibre dans le cas d'existence d'une relation linéaire simple entre les nombres vibratoires, *Archives Neerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles*, 1911, ser. 2, tom. 15, pp. 246–283.
3. Beth H.I.E. Les oscillations autour d'une position d'équilibre dans le cas d'existence d'une relation linéaire simple entre les nombres vibratoires (suite), *Archives Neerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles*, 1912, ser. 3A, tom. 1, pp. 185–213.
4. Markeev A.P. *Tochki libratsii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike* (Libration points in celestial mechanics and cosmodynamics), Moscow: Nauka, 1978, 312 p.
5. Kunitsyn A.L., Markeev A.P. Stability in resonant cases, *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya Obshchaya Mekhanika*, 1979, vol. 4, pp. 58–139 (in Russian).
6. Markeev A.P. Stability in Hamiltonian systems, *Nonlinear mechanics*, Moscow: Fizmatlit, 2001, pp. 114–130 (in Russian).
7. Kholostova O.V. On motions of a Hamiltonian system with one degree of freedom under resonance in forced oscillations, *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 1996, no. 3, pp. 167–175 (in Russian).

8. Markeev A.P. The behaviour of a non-linear Hamiltonian system with one degree of freedom at the boundary of a parametric resonance domain, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1995, vol. 59, issue 4, pp. 541–551. DOI: [10.1016/0021-8928\(95\)00063-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(95)00063-1)
9. Markeev A.P. Parametric resonance and nonlinear oscillations of a heavy rigid body in the neighborhood of its planar rotations, *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 1995, no. 5, pp. 34–44 (in Russian).
10. Kholostova O.V. Parametric resonance in the problem of nonlinear oscillations of a satellite in an elliptic orbit, *Cosmic Research*, 1996, vol. 34, no. 3, pp. 288–292.
11. Markeev A.P. Third-order resonance in a Hamiltonian system with one degree of freedom, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1994, vol. 58, issue 5, pp. 793–804. DOI: [10.1016/0021-8928\(94\)90004-3](https://doi.org/10.1016/0021-8928(94)90004-3)
12. Kholostova O.V. The non-linear oscillations of a satellite with third-order resonance, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, vol. 61, issue 4, pp. 539–547. DOI: [10.1016/S0021-8928\(97\)00068-3](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(97)00068-3)
13. Markeev A.P. The critical case of fourth-order resonance in a hamiltonian system with one degree of freedom, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, vol. 61, issue 3, pp. 355–361. DOI: [10.1016/S0021-8928\(97\)00045-2](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(97)00045-2)
14. Kholostova O.V. Non-linear oscillations of a hamiltonian system with one degree of freedom and fourth-order resonance, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1998, vol. 62, issue 6, pp. 883–892. DOI: [10.1016/S0021-8928\(98\)00113-0](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(98)00113-0)
15. Kholostova O.V. On bifurcations and stability of resonance periodic motions of Hamiltonian systems with one degree of freedom caused by degeneration of the hamiltonian, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2006, vol. 2, no. 1, pp. 87–108. DOI: [10.20537/nd0601005](https://doi.org/10.20537/nd0601005)
16. Kholostova O.V. Resonant periodic motions of Hamiltonian systems with one degree of freedom when the Hamiltonian is degenerate, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, vol. 70, issue 4, pp. 516–526. DOI: [10.1016/j.jappmathmech.2006.09.005](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2006.09.005)
17. Kholostova O.V. The motion of a system close to Hamiltonian with one degree of freedom when there is resonance in forced vibrations, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1996, vol. 60, issue 3, pp. 399–406. DOI: [10.1016/S0021-8928\(96\)00050-0](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(96)00050-0)
18. Kholostova O.V. On motions of a one-degree-of-freedom system close to a Hamiltonian system under resonance of the fourth order, *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 1999, no. 4, pp. 25–30 (in Russian).
19. Kholostova O.V. The periodic motions of a non-autonomous Hamiltonian system with two degrees of freedom at parametric resonance of the fundamental type, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, vol. 66, issue 4, pp. 529–538. DOI: [10.1016/S0021-8928\(02\)00071-0](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)00071-0)
20. Kunitsyn A.L. The stability in the critical case of pure imaginary roots, with internal resonance, *Differ. Uravn.*, 1971, vol. 7, no. 9, pp. 1704–1706 (in Russian).
21. Khazina G.G. Certain stability questions in the presence of resonances, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1974, vol. 38, issue 1, pp. 43–51. DOI: [10.1016/0021-8928\(74\)90087-2](https://doi.org/10.1016/0021-8928(74)90087-2)
22. Kunitsyn A.L., Medvedev S.V. On stability in the presence of several resonances, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1977, vol. 41, issue 3, pp. 419–426. DOI: [10.1016/0021-8928\(77\)90033-8](https://doi.org/10.1016/0021-8928(77)90033-8)
23. Kunitsyn A.L., Tashimov L.T. *Nekotorye zadachi ustoychivosti nelineinykh rezonansnykh sistem* (Some problems of stability in nonlinear resonant systems), Alma-Ata: Gylym, 1990, 196 p.
24. Khazin L.G. *Ob ustoychivosti polozheniya ravnovesiya gamiltonovykh sistem differentsial'nykh uravnenii (Vzaimodeistvie rezonansov tret'ego poryadka)* (On stability of equilibrium in Hamiltonian systems of differential equations (Interaction of resonances of the third order)), Institute of Applied Mathematics of Academy of science of USSR, Preprint, no. 133, Moscow, 1981, 20 p.
25. Khazin L.G. Interaction of third-order resonances in problems of the stability of hamiltonian systems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1984, vol. 48, issue 3, pp. 356–360. DOI: [10.1016/0021-8928\(84\)90146-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(84)90146-1)
26. Markeev A.P. On a multiple resonance in linear Hamiltonian systems, *Doklady Physics*, 2005, vol. 50, no. 5, pp. 278–282. DOI: [10.1134/1.1941506](https://doi.org/10.1134/1.1941506)
27. Markeev A.P. Multiple parametric resonance in Hamiltonian systems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, vol. 70, issue 2, pp. 176–194. DOI: [10.1016/j.jappmathmech.2006.06.001](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2006.06.001)
28. Markeev A.P. *Lineinye gamiltonovy sistemy i nekotorye zadachi ob ustoychivosti dvizheniya sputnika otnositel'no tsentra mass* (Linear Hamiltonian systems and some problems of stability of satellite motion relative to the center of mass), Moscow–Izhevsk: RCD, Institute of Computer Science, 2009, 396 p.
29. Markeev A.P. On one special case of parametric resonance in problems of celestial mechanics, *Astronomy Letters*, 2005, vol. 31, no. 5, pp. 350–356. DOI: [10.1134/1.1922534](https://doi.org/10.1134/1.1922534)
30. Markeev A.P. Multiple resonance in one problem of the stability of the motion of a satellite relative to the center of mass, *Astronomy Letters*, 2005, vol. 31, no. 9, pp. 627–633. DOI: [10.1134/1.2039974](https://doi.org/10.1134/1.2039974)

31. Kholostova O.V. Motions of a two-degree-of-freedom Hamiltonian system in the presence of multiple third-order resonances, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2012, vol. 8, no. 2, pp. 267–288 (in Russian). DOI: [10.20537/nd1202005](https://doi.org/10.20537/nd1202005)
32. Kholostova O.V. The interaction of resonances of the third and fourth orders in a Hamiltonian two-degree-of-freedom system, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2015, vol. 11, no. 4, pp. 671–683 (in Russian). DOI: [10.20537/nd1504004](https://doi.org/10.20537/nd1504004)
33. Kholostova O. Stability of triangular libration points in a planar restricted elliptic three body problem in cases of double resonances, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2015, vol. 73, pp. 64–68. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.005](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.005)
34. Malkin I.G. *Nekotorye zadachi teorii nelineinykh kolebaniy* (Some problems of the theory of nonlinear oscillations), Moscow: Gostekhizdat, 1956, 492 p.
35. Yakubovich V.A., Starzhinskii V.M. *Parametricheskii rezonans v lineinykh sistemakh* (Parametric resonance in linear systems), Moscow: Nauka, 1987, 328 p.
36. Kholostova O.V. *Issledovanie nelineinykh kolebaniy gamil'tonovykh sistem s odnoi stepen'yu svobody pri rezonansakh* (The study of nonlinear oscillations of Hamiltonian systems with one degree of freedom at resonances), Moscow: Moscow Aviation Institute, 2011, 96 p.

Received 20.08.2016

Safonov Aleksei Igorevich, Post-Graduate Student, Department of Theoretical Mechanics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, 125993, Russia.

E-mail: lexafonov@mail.ru

Kholostova Ol'ga Vladimirovna, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Theoretical Mechanics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, 125993, Russia.

E-mail: kholostova.o@mail.ru