

УДК 517.956.4

© Д. А. Куликов, А. В. Секацкая

О ВЛИЯНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЛАСТИ НА СТРУКТУРУ НАНОРЕЛЬЕФА

Рассматривается обобщенное уравнение Курамото–Сивашинского в случае, когда неизвестная функция зависит от двух пространственных переменных. Такой вариант данного уравнения используется в качестве математической модели формирования неоднородного рельефа на поверхности полупроводников под воздействием потока ионов. В работе данное уравнение изучается вместе с однородными краевыми условиями Неймана в трех областях: прямоугольнике, квадрате и равнобедренном треугольнике. Изучен вопрос о локальных бифуркациях при смене устойчивости пространственно однородными состояниями равновесия. Показано, что в данных трех краевых задачах реализуются послекритические бифуркации и в их результате в каждой из трех изучаемых краевых задач бифурцируют пространственно неоднородные решения. Для них получены асимптотические формулы. Выявлена зависимость характера бифуркаций от выбора, геометрии области. В частности, определен вид зависимости от пространственных переменных. Изучен вопрос об устойчивости, в смысле определения А. М. Ляпунова, найденных пространственно неоднородных решений. Анализ бифуркационных задач использовал известные методы теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством: интегральных (инвариантных) многообразий, нормальных форм Пуанкаре–Дюлака в сочетании с асимптотическими методами.

Ключевые слова: уравнение Курамото–Сивашинского, краевая задача, нормальные формы, устойчивость, бифуркации.

DOI: [10.20537/vm180303](https://doi.org/10.20537/vm180303)

Данная работа посвящена изучению одной из основных математических моделей формирования нанорельефа на поверхности полупроводников под воздействием потока ионов (см., например, [1–3], а также [4, 5]). Она может быть рассмотрена как естественное продолжение работ [1–3]. После преобразований, перенормировок задача может быть сведена к анализу следующего нелинейного дифференциального уравнения с частными производными параболического типа

$$w_\tau = -\nu \Delta w - \delta \Delta^2 w - \gamma(w_{x_1}^2 + w_{y_1}^2), \quad (0.1)$$

где $w = w(\tau, x_1, y_1)$, $\delta > 0$, $\gamma \neq 0$, $\nu \in R$, $(x_1, y_1) \in D \subset R^2$. Ниже будем в качестве области D рассматривать прямоугольник

$$D = \{(x_1, y_1), 0 < x_1 < l_1, 0 < y_1 < l_2\}, l_1, l_2 > 0.$$

В частности, при $l_1 = l_2$ имеем квадрат.

Положим в уравнении (0.1)

$$\tau = d_1 t, \quad w = d_2 u, \quad x_1 = \frac{l_1}{\pi} x, \quad y_1 = \frac{l_2}{\pi} y, \quad \mu = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2, \quad d_1 = \left(\frac{l_1}{\pi}\right)^4 \frac{1}{\delta}, \quad d_2 = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\pi}{l_1}\right)^2 \delta.$$

Последние нормировки (замены) приводят уравнение (0.1) к виду

$$u_t = -b \Delta_\mu u - \Delta_\mu^2 u + (u_x^2 + \mu u_y^2), \quad (0.2)$$

где $u = u(t, x, y)$, $\Delta_\mu u = u_{xx} + \mu u_{yy}$, т. е. $\Delta_1 u = \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, а $b = \frac{\nu}{\delta} \left(\frac{l_1}{\pi}\right)^2$. Случай $\mu = 1$ соответствует квадрату.

В первой части работы уравнение (0.2) будем рассматривать вместе со следующими краевыми условиями

$$u_x \Big|_{x=0, x=\pi} = u_{xxx} \Big|_{x=0, x=\pi} = 0, \quad u_y \Big|_{y=0, y=\pi} = u_{yyy} \Big|_{y=0, y=\pi} = 0, \quad (0.3)$$

т. е. однородными краевыми условиями Неймана.

Кроме основной задачи в третьей части работы будет рассмотрено уравнение (0.2) при $\mu = 1$ вместе с краевыми условиями

$$\begin{aligned} u_y \Big|_{y=0} = 0, \quad u_x \Big|_{x=\pi} = 0, \quad (u_x - u_y) \Big|_{x=y} = 0, \\ u_{yyy} \Big|_{y=0} = 0, \quad u_{xxx} \Big|_{x=\pi} = 0, \quad (u_{xxx} - 3u_{xxy} + 3u_{xyy} - u_{yyy}) \Big|_{x=y} = 0. \end{aligned} \quad (0.4)$$

В данном случае рассматривается краевая задача (КЗ) Неймана для области

$$D_\Delta = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq x\},$$

т. е. для равнобедренного треугольника.

Напомним, что уравнение (0.1), (0.2) принято называть обобщенным уравнением Курамото–Сивашинского. В § 1 будет рассмотрена нелинейная КЗ (0.2), (0.3) при $\mu > 1$. Случай квадрата ($\mu = 1$) заслуживает отдельного анализа. Ему будет посвящен § 2. Вариант $\mu < 1$ сводится к первому ($\mu > 1$) переобозначением $x \rightarrow y, y \rightarrow x$. Наконец, вариант треугольника будет изучен в § 3.

Отметим также, что нелинейная КЗ (0.2), (0.3), а также (0.2), (0.4) имеет решения вида $u(t, x, y) = C$, где C — произвольная действительная постоянная. Более того, обе КЗ инвариантны относительно замены $u \rightarrow u + C$. Поэтому для определенности далее будет идти речь об окрестности нулевого состояния равновесия. При этом окрестность будем понимать в смысле нормы фазового пространства решений КЗ (пространства начальных условий).

Положим

$$u(0, x, y) = f(x, y).$$

Будем считать, что $f(x, y) \in W_2^4(\overline{D})$, где $\overline{D} = \{(x, y), 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ в случае КЗ (0.2), (0.3) и $f(x, y) \in W_2^4(\overline{D}_\Delta)$, где $\overline{D}_\Delta = \{(x, y), 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq x\}$ во втором случае (т. е. КЗ (0.2), (0.4)). Наконец, через $W_2^4(\overline{D})$ ($W_2^4(\overline{D}_\Delta)$) обозначено пространство Соболева [6], т. е. $f(x, y) \in L_2(\overline{D})$ ($f(x, y) \in L_2(\overline{D}_\Delta)$), а также интегрируемы с квадратом все частные производные $f(x, y)$ до четвертого порядка включительно. Подчеркнем, что в силу теорем вложения

$$f(x, y) \in C^2(\overline{D}) \quad (C^2(\overline{D}_\Delta)).$$

В работе предполагается изучить вопрос о существовании и устойчивости пространственно неоднородных решений у КЗ (0.2), (0.3), а также (0.2), (0.4). Уравнение Курамото–Сивашинского было предложено в работах [7, 8] в связи с задачами химической кинетики и гидродинамики. В них рассматривалось такое уравнение в случае, когда неизвестная функция зависит от t и x . В работе [4] было предложено несколько вариантов уравнений для описания формирования неоднородного рельефа на поверхности полупроводников под воздействием потока ионов. В наиболее распространенных версиях это приводит к уравнениям вида (0.1) или (0.2) после перенормировок. Иногда рассматривают более общий вариант таких уравнений. В большинстве работ, и в первую очередь физических (см., например, работы [4, 5], а также обзор соответствующей литературы из этих статей), уравнение (0.1) или (0.2) исследовалось вместе с периодическими краевыми условиями. В работах [1, 2] дан анализ задачи о локальных бифуркациях для уравнений вида (0.1) (0.2), дополненные периодическими краевыми условиями.

Выбор краевых условий (0.3) в случае, когда область является прямоугольником или их аналогом (0.4), в случае треугольника был сделан под влияниями, пожалуй, наиболее известных работ [9, 10], в которых рассматривалось уравнение Курамото–Сивашинского. В них уравнение

$$u_t + u_{xxxx} + bu_{xx} + c(u_x)^2 = 0 \quad (u = u(t, x)),$$

было рассмотрено вместе с краевыми условиями

$$u_x(t, 0) = u_x(t, l) = u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, l) = 0,$$

и было доказано существование глобального аттрактора для решений последней краевой задачи, но не был изучен вопрос о структуре решений, принадлежащих аттрактору. Тем самым данная работа в некоторой степени служит естественным продолжением этих работ, а также служит естественным дополнением к работе [3]. Ниже в § 1 будет рассмотрена близкая задача к той, что была рассмотрена в [3], и детально изучен вопрос о влиянии геометрических характеристик на структуры решений изучаемой краевой задачи. В работе [3] этот вопрос не был затронут.

§ 1. Вариант прямоугольника

В этом разделе нелинейная КЗ (0.2), (0.3) будет рассмотрена при $\mu > 1$. Сначала рассмотрим линеаризованный ее вариант

$$u_t = Au \equiv -b \Delta_\mu u - \Delta_\mu^2 u, \quad \Delta_\mu u = u_{xx} + \mu u_{yy}, \tag{1.1}$$

$$u_x \Big|_{x=0, x=\pi} = 0, \quad u_y \Big|_{y=0, y=\pi} = 0, \quad u_{xxx} \Big|_{x=0, x=\pi} = 0, \quad u_{yyy} \Big|_{y=0, y=\pi} = 0. \tag{1.2}$$

Линейный дифференциальный оператор (ЛДО) $A = A(b, \mu)$ при всех значениях b является симметричным линейным оператором, который имеет счетное множество собственных значений (СЗ)

$$\lambda_{k,m} = \lambda_{k,m}(b) = b(k^2 + \mu m^2) - (k^2 + \mu m^2)^2, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots,$$

отвечающих собственным функциям (СФ) $h_{k,m} = \cos kx \cos my$, которые в пространстве $L_2(D)$ образуют полную ортогональную систему

$$\int_0^\pi \int_0^\pi h_{k_1,m_1}(x, y) h_{k_2,m_2}(x, y) dx dy = 0$$

при $(k_1 - k_2)^2 + (m_1 - m_2)^2 \neq 0$. ЛДО $A(b)$ является производящим оператором аналитической полугруппы линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $L_2(D)$. Из двух предыдущих замечаний вытекает, что при выполнении неравенства $\lambda_{k,m}(b) \leq 0$ при всех k, m решения КЗ (1.1), (1.2) устойчивы ($\lambda_{0,0}(b) = 0$ при всех b). Если при некоторых $k = k_1, m = m_1$ выполнено неравенство $\lambda_{k_1,m_1}(b) > 0$, то решения КЗ (1.1), (1.2) неустойчивы.

Отметим, что при $b < 1$ справедливы неравенства

$$\lambda_{k,m}(b) < 0, \quad \text{если } k^2 + m^2 \geq 1,$$

а при $b = 1$ имеем $\lambda_{0,0}(1) = 0, \lambda_{1,0}(1) = 0$, а остальные СЗ ЛДО $A(1, \mu)$ лежат в полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенствами $\lambda_{k,m}(1) \leq -\gamma_0 < 0$, где в качестве γ_0 можно выбрать число $\min\{12, \mu^2 - \mu\}$.

Далее будем изучать уже нелинейную КЗ (0.2), (0.3) при $b = 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 \ll 1$. КЗ (0.2), (0.3) может быть записана в виде

$$u_t = A(\varepsilon)u + (u_x^2 + \mu u_y^2), \tag{1.3}$$

$$u_x \Big|_{x=0, x=\pi} = u_y \Big|_{y=0, y=\pi} = u_{xxx} \Big|_{x=0, x=\pi} = u_{yyy} \Big|_{y=0, y=\pi} = 0, \tag{1.4}$$

где $A(\varepsilon)u = -\Delta_\mu u - \varepsilon \Delta_\mu u - \Delta_\mu^2 u = A_0 u + \varepsilon B u$, т.е. $A_0 u = A(0, \mu)$, а $B u = -\Delta_\mu u$.

КЗ (1.3), (1.4) при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, если ε_0 достаточно малая положительная постоянная, имеет локально инвариантное притягивающее многообразие $M_2(\varepsilon)$, размерность которого равна 2 (центральное многообразие). Решения КЗ (1.3), (1.4), принадлежащие достаточно малой

окрестности нулевого состояния равновесия и $M_2(\varepsilon)$, удовлетворяют системе из двух обыкновенных уравнений

$$\psi'(s) = F_0(z, \varepsilon), \quad z'(s) = F_1(z, \varepsilon), \quad z = z(s), \quad (1.5)$$

где $s = \varepsilon t$ — «медленное» время, функции F_0, F_1 достаточно гладко зависят от аргументов, если $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ (см. [1, 2]). Систему дифференциальных уравнений (1.5) принято называть нормальной формой (НФ). Далее будет реализован алгоритм построения правых частей системы дифференциальных уравнений (1.5). Аналогичный алгоритм был использован в работах [1, 2], где изучалось уравнение (0.2), но при ином выборе краевых условий.

Положим

$$u(t, x, y, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2}u_1(x, y, z) + \varepsilon u_2(x, y, z) + \varepsilon^{3/2}u_3(x, y, z) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (1.6)$$

где $u_1(x, y, z) = z \cos x$, функции $u_2(x, y, z), u_3(x, y, z) \in W$. Через W обозначен класс следующих функций: $g(x, y, z) \in W$, если:

- 1) при фиксированном z функция $g(x, y, z) \in W_2^4(\overline{D})$;
- 2) функция $g(x, y, z)$ удовлетворяет краевым условиям (1.4);
- 3) $\int_0^\pi \int_0^\pi g(x, y, z) dx dy = \int_0^\pi \int_0^\pi g(x, y, z) \cos x dx dy = 0$;
- 4) она имеет непрерывные частные производные по переменной z .

Равенство (1.6) следует интерпретировать как уравнение интегрального многообразия $M_2(\varepsilon)$, если $\psi = \psi(s), z = z(s)$ — решения НФ (1.5) [1, 2, 11–13].

Подстановка суммы (1.6) в КЗ (1.3), (1.4) и выделение слагаемых при одинаковых степенях $\varepsilon : \varepsilon, \varepsilon^{3/2}$ приводит к формированию линейных неоднородных КЗ для определения u_2, u_3 .

Для определения $u_2 = u_2(x, y, z)$ получаем КЗ

$$\psi' = A_0 u_2 + (u_{1x}^2 + \mu u_{1y}^2), \quad (1.7)$$

$$u_{2x} \Big|_{x=0, x=\pi} = u_{2y} \Big|_{y=0, y=\pi} = 0, \quad u_{2xx} \Big|_{x=0, x=\pi} = u_{2yy} \Big|_{y=0, y=\pi} = 0. \quad (1.8)$$

Здесь $\psi' = \psi'(s) = \frac{d\psi}{ds} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} = \varepsilon z' \cos x \right)$. Уравнение (1.7) можно переписать в иной форме

$$\Delta_\mu u_2 + \Delta_\mu^2 u_2 = z^2 \sin^2 x - \psi'(s). \quad (1.9)$$

КЗ (1.7), (1.8) (или (1.8), (1.9)) при анализе которой следует рассматривать $z = z(s)$ как параметр, имеет единственное решение $u_2(x, y, z) \in W$, если выполнены условия разрешимости для данной КЗ (см. замечание 1). Их использование приводит к равенству

$$\psi'(s) = \frac{z^2}{2}.$$

При этом соответствующее решение

$$u_2(x, y, z) = -\frac{1}{24} z^2 \cos 2x.$$

Замечание 1. Неоднородное уравнение $A_0 v = \varphi(x, y), v = q(x, y)$ имеет решение, если выполнены условия разрешимости

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \varphi(x, y) dx dy = \int_0^\pi \int_0^\pi \varphi(x, y) \cos x dx dy = 0,$$

т. е. $\varphi(x, y)$ ортогональна в $L_2(D)$ функциям $1, \cos x$, принадлежащим ядру ЛДО A_0 .

На третьем шаге, приравнивая члены при $\varepsilon^{3/2}$, получаем неоднородную КЗ для определения $u_3(x, y, z)$

$$A_0 u_3 = \varphi(x, y, z), \tag{1.10}$$

$$u_{3x} \Big|_{x=0, x=\pi} = u_{3xxx} \Big|_{x=0, x=\pi} = 0, \quad u_{3y} \Big|_{y=0, y=\pi} = u_{3yyy} \Big|_{y=0, y=\pi} = 0, \tag{1.11}$$

где в данном случае

$$\varphi(x, y, z) = -2(u_{1x}u_{2x} + u_{1y}u_{2y}) + z' \cos x - z \cos x.$$

Здесь $z' = \frac{dz}{ds}$. Из условий разрешимости неоднородной КЗ (1.10), (1.11) вытекает, что с необходимостью

$$z' = z - \frac{z^3}{12}.$$

Решение этой КЗ из W определяется однозначно

$$u_3(x, y, z) = \frac{z^3}{864} \cos 3x.$$

На данном этапе уже получена главная часть НФ, т. е. найдены $F_0(z, 0)$, $F_1(z, 0)$. Итак,

$$\psi' = \frac{z^2}{2}, \tag{1.12}$$

$$z' = z - \frac{z^3}{12}. \tag{1.13}$$

Правые части дифференциальных уравнений (1.12), (1.13) выписаны с точностью до членов $O(\varepsilon)$. Уравнение (1.13) имеет два асимптотически устойчивых состояния равновесия S_{\pm} , где S_+ : $z_+ = 2\sqrt{3}$, S_- : $z_- = -2\sqrt{3}$. Этим состояниям равновесия дифференциального уравнения (1.13) соответствуют решения l_{\pm} , уравнения (1.12), где

$$l_+ : \psi_+(s) = 6s + \alpha_1, \quad l_- : \psi_-(s) = 6s + \alpha_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in R.$$

Из результатов работ [1, 2] вытекает справедливость утверждения.

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ состояниям равновесия S_{\pm} дифференциального уравнения (1.13) соответствуют два устойчивых пространственно неоднородных решения КЗ (1.1), (1.2)*

$$u_{\pm}(t, x, y, \varepsilon) = [6\varepsilon + o(\varepsilon)]t \pm 2\sqrt{3}\varepsilon^{1/2} \cos x - \frac{1}{2}\varepsilon \cos 2x \pm \frac{\sqrt{3}}{36}\varepsilon^{3/2} \cos 3x + o(\varepsilon^{3/2}).$$

Эти решения получены в результате подстановки координат состояний равновесия в формулу для интегрального многообразия (1.6). Устойчивость решений u_{\pm} вытекает из того обстоятельства, что решения S_{\pm} уравнения (1.13) асимптотически устойчивы. Уместно также подчеркнуть, что решения $u_+(t, x, y, \varepsilon)$ и $u_-(t, x, y, \varepsilon)$ не зависят от второй пространственной переменной y . Наконец, справедливо равенство

$$u_-(t, x, y, \varepsilon) = u_-(t, x, \varepsilon) = u_+(t, \pi - x, \varepsilon) = u_+(t, \pi - x, y, \varepsilon).$$

Добавим, что в правой части асимптотической формулы из теоремы 1 все слагаемые не зависят от переменной y (зависят только от x и t). Последнее вытекает из замечания о том, что решения КЗ

$$u_t + u_{xxxx} + bu_{xx} + (u_x)^2 = 0, \quad u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, \pi) = 0$$

удовлетворяют КЗ (0.2), (0.3).

§ 2. Случай квадрата

Пусть изначально был квадрат, т. е. $l_1 = l_2$. Тогда $\mu = 1$ и ЛДО $A(b, 1)$ при $b = 1$ имеет трехкратное нулевое СЗ, которому соответствуют три линейно независимые СФ: $1, \cos x, \cos y$.

В КЗ (1.1), (1.2) положим

$$b = 1 + \gamma_1 \varepsilon, \quad \mu = 1 + \gamma_2 \varepsilon, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in R,$$

а $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. В результате получим следующую КЗ

$$u_t = Au + \varepsilon B_1 u + \varepsilon^2 B_2 u + u_x^2 + u_y^2 + \gamma_2 \varepsilon u_y^2, \quad (2.1)$$

$$u_x \Big|_{x=0, x=\pi} = u_{xxx} \Big|_{x=0, x=\pi} = u_y \Big|_{y=0, y=\pi} = u_{yyy} \Big|_{y=0, y=\pi} = 0, \quad (2.2)$$

где в данном случае

$$Au = -\Delta u - \Delta^2 u, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}, \quad B_1 u = -\gamma_1 \Delta u - \gamma_2 u_{yy} - 2\gamma_2 u_{xxyy} - 2\gamma_2 u_{yyyy},$$

$$B_2 u = -\gamma_2^2 u_{yyyy} - \gamma_1 \gamma_2 u_{yy}.$$

Нелинейная КЗ (2.1), (2.2) при достаточно малых ε имеет трехмерное локально инвариантное (центральное) многообразие $M_3(\varepsilon)$. Решения, принадлежащие $M_3(\varepsilon)$ (см. [1, 2, 7–9]), будем искать в следующем виде:

$$u(t, x, y, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2} u_1 + \varepsilon u_2 + \varepsilon^{3/2} u_3 + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (2.3)$$

где $u_1 = u_1(x, y, z_1, z_2) = z_1(s) \cos x + z_2(s) \cos y$, $s = \varepsilon t$. Функции $u_k = u_k(x, y, z_1, z_2) \subset W$ ($k = 2, 3$). Здесь W — пространство функций, для которых справедливы следующие свойства:

- 1) функции $\varphi(x, y, z_1, z_2) \in W$ достаточно гладко зависят от x, y, z_1, z_2 ;
- 2) при фиксированных z_1, z_2 $\varphi(x, y, z_1, z_2) \in W_2^4(\overline{D})$;
- 3) удовлетворяют краевым условиям (2.2);
- 4) для таких функций справедливы равенства

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \varphi(x, y, z_1, z_2) dx dy = \int_0^\pi \int_0^\pi \varphi(x, y, z_1, z_2) \cos x dx dy = \int_0^\pi \int_0^\pi \varphi(x, y, z_1, z_2) \cos y dy dx = 0.$$

Как и в предыдущем разделе, после подстановки суммы (2.3) в КЗ (2.1), (2.2) и приравнивая слагаемые при $\varepsilon, \varepsilon^{3/2}$, получим неоднородные линейные КЗ для определения u_2, u_3 . При их выписывании учтено, что $\frac{\partial u_k}{\partial t} = \frac{\partial u_k}{\partial s} \varepsilon$. Итак,

$$\psi' = Au_2 + u_{1x}^2 + u_{1y}^2, \quad (2.4)$$

$$u_{2x} \Big|_{x=0, x=\pi} = u_{2xxx} \Big|_{x=0, x=\pi} = u_{2y} \Big|_{y=0, y=\pi} = u_{2yyy} \Big|_{y=0, y=\pi} = 0, \quad (2.5)$$

$$z_1' \cos x + z_2' \cos y = Au_3 + 2(u_{1x} u_{2x} + u_{1y} u_{2y}) + B_1 u_1, \quad (2.6)$$

$$u_{3x} \Big|_{x=0, x=\pi} = u_{3xxx} \Big|_{x=0, x=\pi} = u_{3y} \Big|_{y=0, y=\pi} = u_{3yyy} \Big|_{y=0, y=\pi} = 0. \quad (2.7)$$

Из условий разрешимости КЗ (2.4), (2.5) вытекает, что

$$\psi' = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2), \quad (2.8)$$

а из условий разрешимости КЗ (2.6), (2.7) получаем

$$z_1' = \gamma_1 z_1 - \frac{1}{12} z_1^3, \quad (2.9)$$

$$z_2' = (\gamma_1 - \gamma_2)z_2 - \frac{1}{12}z_2^3. \quad (2.10)$$

Систему (2.8)–(2.10), как и ранее, будем называть НФ («укороченной» НФ). При этом соответствующие решения КЗ (2.4), (2.5) и (2.6), (2.7) имеют следующий вид

$$u_2 = u_2(x, y, z_1, z_2) = -\frac{z_1^2}{24} \cos 2x - \frac{z_2^2}{24} \cos 2y, \quad u_3 = u_3(x, y, z_1, z_2) = \frac{z_1^3}{864} \cos 3x + \frac{z_2^3}{864} \cos 3y.$$

Рассмотрим сначала замкнутую подсистему дифференциальных уравнений (2.9), (2.10).

Лемма 1. Система дифференциальных уравнений (2.9), (2.10) может иметь следующие ненулевые состояния равновесия

$$\begin{aligned} S_1: z_1 &= \pm 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1}, & z_2 &= 0; & S_2: z_2 &= \pm 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1 - \gamma_2}, & z_1 &= 0; \\ S_3: z_1 &= 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1}, & z_2 &= 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1 - \gamma_2}; & S_4: z_1 &= -2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1}, & z_2 &= 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1 - \gamma_2}; \\ S_5: z_1 &= 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1}, & z_2 &= -2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1 - \gamma_2}; & S_6: z_1 &= -2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1}, & z_2 &= -2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1 - \gamma_2}, \end{aligned}$$

которые существуют, когда $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_1 - \gamma_2 > 0$.

Если $\gamma_1 > 0$, $\gamma_1 - \gamma_2 > 0$, то состояния равновесия S_3, S_4, S_5, S_6 асимптотически устойчиво, а остальные состояния равновесия S_1, S_2 и нулевое – неустойчивы.

Если $\gamma_1 > 0$, а $\gamma_1 - \gamma_2 < 0$, то существует и асимптотически устойчиво S_1 , а нулевое состояние равновесия неустойчиво.

Наконец, при $\gamma_1 - \gamma_2 > 0$, $\gamma_1 < 0$ асимптотически устойчиво S_2 , а нулевое, конечно, неустойчиво. Подчеркнем, что при $\gamma_1 \leq 0$, $\gamma_1 - \gamma_2 \leq 0$ ненулевых состояний равновесия нет, а нулевое состояние равновесия будет асимптотически устойчивым.

Справедливо утверждение [1, 2].

Теорема 2. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ нелинейная КЗ (2.1), (2.2) имеет ненулевое пространственно неоднородное решение

$$\begin{aligned} u(x, y, \varepsilon) &= \left[\frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2)\varepsilon + o(\varepsilon) \right] t + \varepsilon^{1/2} (\eta_1 \cos x + \eta_2 \cos y) - \\ &\quad - \frac{1}{24}\varepsilon (\eta_1^2 \cos 2x + \eta_2^2 \cos 2y) + \frac{1}{864}\varepsilon^{3/2} (\eta_1^3 \cos 3x + \eta_2^3 \cos 3y) + o(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned}$$

соответствующее состоянию равновесия S_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) с наследованием свойств устойчивости.

Здесь (η_1, η_2) – координаты соответствующего состояния равновесия S_j .

Подчеркнем, что состояниям равновесия S_3, S_4, S_5, S_6 соответствует состояние равновесия КЗ (2.1), (2.2), зависящее от двух пространственных переменных x и y . В остальных случаях такое состояние равновесия зависит только от одной переменной x или y . Решения, зависящие от x, y , имеют в качестве «главной» части функции

$$\varepsilon^{1/2} \left\{ \pm 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1} \cos x \pm 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1 - \gamma_2} \cos y \right\}.$$

В таком случае эти решения описывают «двухмодовый рельеф». Последний термин носит условный характер, так как решение зависит от $\cos 2x, \cos 2y$ и т. д., если выписать остальные части асимптотического представления.

Подчеркнем, что при $\gamma_2 > 0$ размер мишени (l_1, l_2) по переменной y был меньше, чем по x ($\mu = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2$) и, следовательно, «амплитуда» рельефа по переменной y будет меньше. Если же $\gamma_1 \leq \gamma_2$, то фактически мы возвратимся к § 1, и рельеф превратится в «одномодовый», зависящий только от x .

§ 3. Треугольная область

В данном разделе рассмотрим в качестве области равнобедренный треугольник, когда переменные x, y в значительной мере «неравноправны». Итак, $D_\Delta = \{0 < x < l, 0 < y < x\}$, $l_1 = l_2 = l$.

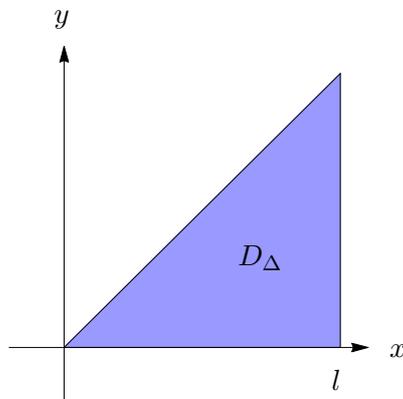


Рис. 1. Треугольная область $D_\Delta = \{0 < x < l, 0 < y < x\}$

На данном рис. 1 отмечена область D_Δ , которая подвергается воздействию потока ионов. В нормированных переменных x, y, t ($l = \pi$) в данном случае приходим к КЗ

$$u_t = Au + (u_x^2 + u_y^2), \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} u_y \Big|_{y=0} = u_x \Big|_{x=\pi} = (u_x - u_y) \Big|_{x=y} = 0, \\ u_{yyy} \Big|_{y=0} = u_{xxx} \Big|_{x=\pi} = (u_{xxx} - 3u_{xxy} + 3u_{xyy} - u_{yyy}) \Big|_{x=y} = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подчеркнем, что равенства (3.2) — это однородные краевые условия Неймана для области D_Δ .

КЗ (3.1), (3.2) похожа на задачу из § 2, но вместе с тем есть существенные различия, которые, в первую очередь, и будем отмечать.

Напомним, что ЛДО

$$Av = -b\Delta v - \Delta^2 v, \quad v = v(x, y)$$

и определен на достаточно гладких функциях $v(x, y)$ ($u = u(t, x, y)$), удовлетворяющих краевым условиям (3.2). Нетрудно проверить, что он имеет СЗ

$$\lambda_{k,m}(b) = b(k^2 + m^2) - (k^2 + m^2)^2,$$

которым отвечают СФ $h_{k,m}(x, y) = \cos kx \cos my + \cos mx \cos ky$, $k, m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Отметим, что при $m = k = 0$ имеем $h_{0,0} = 2$, при $m = k$ получим $h_{m,m}(x, y) = 2 \cos mx \cos my$. Относительно сложную структуру СФ имеют при $k \neq m$ и при этом $\lambda_{k,m} = \lambda_{m,k}$.

Подчеркнем, что $\lambda_{0,0} = 0$ вне зависимости от b , а также, как и ранее, $\lambda_{k,m} < 0$, если $b < 1$. При $b > 1$, по крайней мере, $\lambda_{1,0} > 0$.

Поэтому бифуркационная задача возникает при $b = 1 + \gamma\varepsilon$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\gamma \in R$. При таком выборе b имеем $\lambda_{0,0} = 0$, $\lambda_{1,0} = \gamma\varepsilon$ (соответствующая СФ $e_{1,0}(x, y) = e_{0,1}(x, y) = \cos x + \cos y$), а остальные СЗ ЛДО A лежат в полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенствами

$$\lambda_{k,m} \leq -\gamma_0 < 0 \quad (\gamma_0 \in R_+).$$

Итак, рассмотрим КЗ

$$u_t = A_0 u + \varepsilon B u + (u_x^2 + u_y^2), \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} u_y \Big|_{y=0} = 0, \quad u_x \Big|_{x=\pi} = 0, \quad (u_x - u_y) \Big|_{x=y} = 0, \\ u_{yyy} \Big|_{y=0} = 0, \quad u_{xxx} \Big|_{x=\pi} = 0, \quad (u_{xxx} - 3u_{xxy} + 3u_{xyy} - u_{yyy}) \Big|_{x=y} = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $A_0u = -\Delta u - \Delta^2 u$ ($\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$), $Bu = -\gamma \Delta u$. На двумерном центральном многообразии $M_2(\varepsilon)$ ($\dim M_2(\varepsilon) = 2$) динамика решений нелинейной КЗ (3.3), (3.4) из достаточно малой окрестности состояний равновесия может быть восстановлена после анализа двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — НФ

$$\psi' = F_0(z, \varepsilon), \quad z' = F_1(z, \varepsilon), \tag{3.5}$$

(см. § 1). Ниже приведем алгоритм, позволяющий найти, хотя бы приближенно, явный вид правых частей системы (3.5).

Решения нелинейной КЗ (3.3), (3.4), как и в §§ 1, 2, будем искать в виде суммы. В данном случае она приобретает следующий вид

$$u(t, x, y, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2} z(\cos x + \cos y) + \varepsilon u_2(x, y, z) + \varepsilon^{3/2} u_3(x, y, z) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

где $z = z(s)$, $s = \varepsilon t$ — «медленное» время, u_2, u_3 — функции, принадлежащие классу функций W (см. §§ 2, 3). Здесь есть некоторые отличия: они удовлетворяют краевым условиям (3.4), и соответствующие интегралы в условиях разрешимости следует понимать как интегралы по треугольнику $D_\Delta = \{0 < x < \pi, 0 < y < x\}$.

Для $u_2 = u_2(x, y, z)$ получаем линейную неоднородную КЗ

$$\psi' = A_0 u_2 + (\sin^2 x + \sin^2 y) z^2,$$

$$u_{2y} \Big|_{y=0} = u_{2x} \Big|_{x=\pi} = (u_{2x} - u_{2y}) \Big|_{x=y} = 0,$$

$$u_{2yyy} \Big|_{y=0} = 0, \quad u_{2xxx} \Big|_{x=\pi} = 0, \quad (u_{2xxx} - 3u_{2xxy} + 3u_{2xyy} - u_{2yyy}) \Big|_{x=y} = 0,$$

у которой есть единственное решение из соответствующего класса функций, если $F_0(z, \varepsilon) = z^2 + O(\varepsilon)$, а подходящее решение

$$u_2(x, y, z) = -\frac{z^2}{24}(\cos 2x + \cos 2y).$$

Для определения $u_3 = u_3(x, y, z)$ получаем аналогичную КЗ, но, конечно, с иным неоднородным членом в уравнении для u_3

$$0 = A_0 u_3 + \gamma \Delta u_1 - z'(\cos x + \cos y) - \frac{1}{6} z^3(\sin x \sin 2x + \sin y \sin 2y).$$

Из условий разрешимости соответствующей КЗ для u_3 получаем, что

$$F_1(z, \varepsilon) = \gamma z - \frac{1}{12} z^3 + O(\varepsilon).$$

Итак, укороченная НФ приобретает следующий вид

$$\begin{aligned} \psi' &= z^2, \\ z' &= \gamma z - \frac{1}{12} z^3. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Дифференциальное уравнение (3.6) имеет два асимптотически устойчивых состояния равновесия

$$S_\pm: z_\pm = \pm 2\sqrt{3}, \text{ если } \gamma > 0 \ (\gamma = 1).$$

При $\gamma \leq 0$ таких состояний равновесия нет.

Теорема 3. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ нелинейная КЗ (3.3), (3.4) имеет два устойчивых состояния равновесия*

$$u_{\pm}(x, y, \varepsilon) = [12\varepsilon + o(\varepsilon)]t \pm 2\sqrt{3}\varepsilon^{1/2}(\cos x + \cos y) - \frac{1}{2}\varepsilon(\cos 2x + \cos 2y) \pm \pm \frac{\sqrt{3}}{36}\varepsilon^{3/2}(\cos 3x + \cos 3y) + o(\varepsilon^{3/2}).$$

Подчеркнем, что

$$u_{-}(x, y, z) = u_{+}(\pi - x, \pi - y, \varepsilon).$$

Последнее равенство отражает то обстоятельство, что замена переменных не может существенным образом отражаться на форме и типе рельефа.

§ 4. Некоторые выводы

В работе рассмотрены три задачи о локальных бифуркациях пространственно неоднородных решений в окрестности однородных состояний равновесия соответствующих КЗ. Для всех трех случаев выбора области (прямоугольник, квадрат, равнобедренный треугольник) механизм формирования нанорельефа один и тот же. Соответствующий неоднородный рельеф возникает при потере устойчивости однородными состояниями равновесия. С другой стороны, в зависимости от формы области меняется и структура нанорельефа. Результаты бифуркационного анализа из данной работы на качественном уровне совпадают с результатами экспериментов (см., например, [5]). Подчеркнем, что в большинстве случаев для неоднородного рельефа на поверхности полупроводников характерна зависимость от обеих переменных x и y .

Случаи иных краевых условий для обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского были рассмотрены в работах [12, 13]. Следует отметить, что в настоящее время среди физиков нет единого взгляда на способ выбора краевых условий.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18–01–00672.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Formation of wavy nanostructures on the surface of flat substrates by ion bombardment // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2012. Vol. 52. Issue 5. P. 800–814. DOI: [10.1134/S0965542512050132](https://doi.org/10.1134/S0965542512050132)
2. Куликов А.Н., Куликов Д.А., Рудый А.С. Бифуркации наноструктур под воздействием ионной бомбардировки // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып 4. С. 86–99. DOI: [10.20537/vm110407](https://doi.org/10.20537/vm110407)
3. Секацкая А.В. Бифуркации пространственно неоднородных решений в одной краевой задаче для обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского // Модел. и анализ информ. систем. 2017. Т. 24. № 5. С. 615–628. DOI: [10.18255/1818-1015-2017-5-615-628](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2017-5-615-628)
4. Bradley R.M., Harper J.M.E. Theory of ripple topography induced by ion bombardment // Journal of Vacuum Science and Technology A: Vacuum, Surfaces, and Films. 1988. Vol. 6. Issue 4. P. 2390–2395. DOI: [10.1116/1.575561](https://doi.org/10.1116/1.575561)
5. Кудряшов Н.А., Рябов П.Н., Стриханов М.Н. Численное моделирование формирования наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Ядерная физика и инжиниринг. 2010. Т. 1. № 2. С. 151–158. <https://elibrary.ru/item.asp?id=15110142>
6. Функциональный анализ. Справочная математическая библиотека. М.: Наука, 1972. 544 с.
7. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer, 1984. 156 p. DOI: [10.1007/978-3-642-69689-3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-69689-3)
8. Sivashinsky G.I. Weak turbulence in periodic flow // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1985. Vol. 17. Issue 2. P. 243–255. DOI: [10.1016/0167-2789\(85\)90009-0](https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90009-0)
9. Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R. Some global dynamical properties of the Kuramoto–Sivashinsky equations: Nonlinear stability and attractors // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1985. Vol. 16. Issue 2. P. 155–183. DOI: [10.1016/0167-2789\(85\)90056-9](https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90056-9)

10. Foias C., Nicolaenko B., Sell G.R., Temam R. Inertial manifolds for the Kuramoto–Sivashinsky equation and an estimate of their lowest dimension // *J. Math. Pures Appl. IX Ser.* 1988. Vol. 67. No. 3. P. 197–226.
11. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Local bifurcations in the periodic boundary value problem for the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation // *Automation and Remote Control.* 2017. Vol. 78. No. 11. P. 1955–1966. DOI: [10.1134/S0005117917110029](https://doi.org/10.1134/S0005117917110029)
12. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Бифуркации пространственно неоднородных решений в двух краевых задачах для обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского // *Вестник НИЯУ МИФИ.* 2014. Т. 3. № 4. С. 408–415. DOI: [10.1134/S2304487X14040129](https://doi.org/10.1134/S2304487X14040129)
13. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Bifurcation in a boundary-value problem of nanoelectronics // *Journal of Mathematical Sciences.* 2015. Vol. 208. Issue 2. P. 211–221. DOI: [10.1007/s10958-015-2438-x](https://doi.org/10.1007/s10958-015-2438-x)

Поступила в редакцию 19.03.2018

Куликов Дмитрий Анатольевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра дифференциальных уравнений, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, 150003, Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14. E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Секацкая Алина Вадимовна, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, 150003, Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14. E-mail: alinastart@mail.ru

D. A. Kulikov, A. V. Sekatskaya

On the influence of the geometric characteristics of the region on nanorelief structure

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 3, pp. 293–304 (in Russian).

Keywords: Kuramoto–Sivashinsky equation, boundary-value problem, normal forms, stability, bifurcations.

MSC2010: 37H20

DOI: [10.20537/vm180303](https://doi.org/10.20537/vm180303)

The generalized Kuramoto–Sivashinsky equation in the case when the unknown function depends on two spatial variables is considered. This version of the equation is used as a mathematical model of formation of nonhomogeneous relief on a surface of semiconductors under ion beam. This equation is studied along with homogeneous Neumann boundary conditions in three regions: a rectangle, a square, and an isosceles triangle. The problem of local bifurcations in the case when spatially homogeneous equilibrium states change stability is studied. It is shown that for these three boundary value problems post-critical bifurcations occur and, as a result, spatially nonhomogeneous solutions bifurcate in each of these boundary value problems. For them asymptotic formulas are obtained. The dependence of the nature of bifurcations on the choice and geometry of the region is revealed. In particular, the type of dependence on spatial variables is determined. The problem of Lyapunov stability of spatially nonhomogeneous solutions is studied. Well-known methods from dynamical systems theory with an infinite-dimensional phase space: integral (invariant) manifolds, normal Poincaré–Dulac forms in combination with asymptotic methods are used to analyze the bifurcation problems.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research under Grant 18–01–00672.

REFERENCES

1. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Formation of wavy nanostructures on the surface of flat substrates by ion bombardment, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, vol. 52, issue 5, pp. 800–814. DOI: [10.1134/S0965542512050132](https://doi.org/10.1134/S0965542512050132)
2. Kulikov A.N., Kulikov D.A., Rudyi A.S. Bifurcation of the nanostructures induced by ion bombardment, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2011, issue 4, pp. 86–99 (in Russian). DOI: [10.20537/vm110407](https://doi.org/10.20537/vm110407)

3. Sekatskaya A.V. Bifurcations of spatially inhomogeneous solutions of a boundary value problem for the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation, *Model. Anal. Inf. Syst.*, 2017, vol. 24, no. 5, pp. 615–628 (in Russian). DOI: [10.18255/1818-1015-2017-5-615-628](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2017-5-615-628)
4. Bradley R.M., Harper J.M.E. Theory of ripple topography induced by ion bombardment, *Journal of Vacuum Science and Technology A: Vacuum, Surfaces, and Films*, 1988, vol. 6, issue 4, pp. 2390–2395. DOI: [10.1116/1.575561](https://doi.org/10.1116/1.575561)
5. Kudryashov N.A., Ryabov P.N., Strikhanov M.N. Numerical modeling of the formation of nanostructures on the surface of flat substrates during ion bombardment, *Yadernaya Fizika i Inzhiniring*, 2010, vol. 1, no. 2, pp. 151–168 (in Russian). <https://elibrary.ru/item.asp?id=15110142>
6. *Funktsional'nyi analiz. Spravochnaya matematicheskaya biblioteka* (Functional analysis. Reference mathematical library), M.: Nauka, 1972, 544 p.
7. Kuramoto Y. *Chemical oscillations, waves and turbulence*, Berlin: Springer, 1984, 156 p. DOI: [10.1007/978-3-642-69689-3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-69689-3)
8. Sivashinsky G.I. Weak turbulence in periodic flow, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1985, vol. 17, issue 2, pp. 243–255. DOI: [10.1016/0167-2789\(85\)90009-0](https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90009-0)
9. Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R. Some global dynamical properties of the Kuramoto–Sivashinsky equations: Nonlinear stability and attractors, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1985, vol. 16, issue 2, pp. 155–183. DOI: [10.1016/0167-2789\(85\)90056-9](https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90056-9)
10. Foias C., Nicolaenko B., Sell G.R., Temam R. Inertial manifolds for the Kuramoto–Sivashinsky equation and an estimate of their lowest dimension, *J. Math. Pures Appl., IX Ser.*, 1988, vol. 67, no. 3, pp. 197–226.
11. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Local bifurcations in the periodic boundary value problem for the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation, *Automation and Remote Control*, 2017, vol. 78, issue 11, pp. 1955–1966. DOI: [10.1134/S0005117917110029](https://doi.org/10.1134/S0005117917110029)
12. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Bifurcations of spatially nonhomogeneous solutions in two value boundary problems for generalized Kuramoto–Sivashinsky equation, *Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI"*, 2014, vol. 3, no. 4, pp. 408–415 (in Russian). DOI: [10.1134/S2304487X14040129](https://doi.org/10.1134/S2304487X14040129)
13. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Bifurcation in a boundary-value problem of nanoelectronics, *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 208, issue 2, pp. 211–221. DOI: [10.1007/s10958-015-2438-x](https://doi.org/10.1007/s10958-015-2438-x)

Received 19.03.2018

Kulikov Dmitrii Anatol'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Differential Equations, Yaroslavl State University, ul. Sovetskaya, 14, Yaroslavl, 150003, Russia.

E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Sekatskaya Alina Vadimovna, Post-Graduate Student, Department of Differential Equations, Yaroslavl State University, ul. Sovetskaya, 14, Yaroslavl, 150003, Russia.

E-mail: alinastart@mail.ru